ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXVI, № 3, 1973 Механика

А. Г. ПЕТРОСЯН

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ ЖИДКОСТИ С МОМЕНТНЫМИ НАПРЯЖЕНИЯМИ

Асимметрическая механика сплошных сред представляет собой обобщение обычной континуальной механики сплошных сред на случай, когда тензор напряжений становится асимметрическим.

Асимметричность тензора напряжения вызвана наличием моментных напряжений и массовыми моментами. В этом случае действие одной соприлегающей части среды на другую характеризуется не только поверхностными силами (напряжениями), но и поверхностными моментами (моментными напряжениями).

Асимметрическая механика сплошных сред первоначально развивалась как теория упругости, но в дальнейшем велись исследования [1—5], в которых разрабатывалась асимметрическая гидромеханика. Следует ожидать, что асимметрическая гидромеханика даст возможность объяснить ряд отклонений экспериментальных данных от теоретических.

Общие вопросы теории жидкости с моментными напряжениями (асимметрической гидромеханики) рассмотрены в работах [3—4].

Уравнения пограничного слоя жидкости с моментными напряжениями рассмотрены в работе [5]*.

В работе изучаются уравнения плоского пограничного слоя вязкой несжимаемой жидкости с моментными напряжениями, несимметричным тензором напряжения и внутренней инерцией частиц. Рассмотрены различные типы уравнений плоского пограничного слоя. Сформулированы граничные условия. Приводятся решения уравнений пограничного слоя в довольно общем виде, пригодные для рассмотрения ряда задач.

§1. Общая система уравнений движения вязкой, несжимаемой жидкости с моментными напряжениями имеет вид [5]

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + 2\nu\nabla\cdot(\nabla\vec{v})^d + \nu_r\nabla\times[2\vec{\omega} - \nabla\times\vec{v}]$$

$$I\frac{d\vec{\omega}}{dt} = 2\nu_r(\nabla\times\vec{v} - 2\vec{\omega}) + c_0\nabla(\nabla\cdot\vec{\omega}) + 2c_d\nabla\cdot(\nabla\vec{\omega})^d + \tag{1.1}$$

$$+ 2c_a\nabla\cdot(\nabla\vec{\omega})^a$$

* Аналогичная система уравнений была получена в работе [7], о чем автору статьи стало известно после сдачи рукописи в печать.

Здесь ρ—плотность жидкости, p—давление, I—скалярная константа с размерностью момента инерции единицы массы, $\vec{v}$—вектор скорости точки, $\vec{\omega}$—вектор, характеризующий среднюю угловую скорость вращения частиц, из которых состоит точка континуума, ν—кинематическая ньютоновская вязкость, ν_r—кинематическая вращательная вязкость, c_0, c_d и c_a—коэффициенты моментной вязкости, $d(\cdots)/dt$—полная производная по времени, ∇—пространственный градиент, $(\nabla\vec{v})^d$, $(\nabla\vec{\omega})^d$—симметричные части соответствующих диад, $(\nabla\vec{v})^a$ и $(\nabla\vec{\omega})^a$—антисимметричные диады.

Система уравнений (1.1) для двумерного (плоского) движения имеет следующий вид:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}=0$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_x}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+(\nu+\nu_r)\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}\right)+$$
$$+2\nu_r\frac{\partial\omega_z}{\partial y}$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_y}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_y}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}+(\nu+\nu_r)\left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2}\right)-$$
$$-2\nu_r\frac{\partial\omega_z}{\partial x}$$

$$\frac{\partial\omega_z}{\partial t}+v_x\frac{\partial\omega_z}{\partial x}+v_y\frac{\partial\omega_z}{\partial y}=\frac{2\nu_r}{I}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x}-\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)-$$
$$-\frac{4\nu_r}{I}\omega_z+\gamma\left(\frac{\partial^2\omega_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\omega_z}{\partial y^2}\right) \tag{1.2}$$

Следуя Л. Г. Лойцянскому [6], обозначим через X масштаб продольных координат x, через Y—масштаб поперечных координат y, через V_x и V_y—соответственно масштабы продольных и поперечных компонент скорости.

Примем в качестве масштабов скалярных величин времени, давления, величины, характеризующей среднюю угловую скорость вращения частиц, некоторые, пока неопределенные постоянные величины T, P и Ω_z.

Отметим штрихом соответствующие безразмерные переменные, положив

$$t=Tt',\quad x=Xx',\quad y=Yy'$$
$$v_x=V_xv_x',\quad v_y=V_yv_y',\quad p=Pp'$$
$$\omega_z=\Omega_z\omega_z' \tag{1.3}$$

Подставив эти величины в систему уравнений (1.2) при установленном выборе масштабов, получим уравнения для двумерного случая в безразмерной форме в следующем виде:

$$\frac{\partial v_x'}{\partial x'} + \frac{XV_y}{YV_x}\frac{\partial v_y'}{\partial y'} = 0$$

$$\frac{X}{V_xT}\frac{\partial v_x'}{\partial t'} + v_x'\frac{\partial v_x'}{\partial x'} + \frac{XV_y}{YV_x}v_y'\frac{\partial v_x'}{\partial y'} = -\frac{P}{\rho V_x^2}\frac{\partial p'}{\partial x'} +$$

$$+(\nu+\nu_r)\frac{1}{V_xX}\frac{\partial^2 v_x'}{\partial x'^2} + (\nu+\nu_r)\frac{X}{V_yY^2}\frac{\partial^2 v_x'}{\partial y'^2} + 2\nu_r\frac{\Omega_zX}{YV_x^2}\frac{\partial \omega_z'}{\partial y'}$$

$$\frac{X}{V_xt}\frac{\partial v_y'}{\partial t'} + v_x'\frac{\partial v_y'}{\partial x'} + \frac{XV_y}{YV_x}v_y'\frac{\partial v_y'}{\partial y'} = -\frac{PX}{\rho YV_xV_y}\frac{\partial p'}{\partial y'} +$$

$$+(\nu+\nu_r)\frac{1}{V_xX}\frac{\partial^2 v_y'}{\partial x'^2} + (\nu+\nu_r)\frac{X}{V_xY^2}\frac{\partial^2 v_y'}{\partial y'^2} - 2\nu_r\frac{\Omega_z}{V_xV_y}\frac{\partial \omega_z'}{\partial x'}$$

$$\frac{X}{V_xT}\frac{\partial \omega_z'}{\partial t'} + v_x'\frac{\partial \omega_z'}{\partial x'} + \frac{V_yX}{YV_x}v_y'\frac{\partial \omega_z'}{\partial y'} = \frac{2\nu_r}{I}\frac{V_y}{V_x\Omega_z}\frac{\partial v_y'}{\partial x'} -$$

$$-\frac{2\nu_r}{I}\frac{X}{Y\Omega_z}\frac{\partial v_x'}{\partial y'} - \frac{4\nu_r}{I}\frac{X}{V_x}\omega_z' + \gamma\frac{1}{XV_x}\frac{\partial^2 \omega_z'}{\partial x'^2} + \gamma\frac{X}{Y^2V_x}\frac{\partial^2 \omega_z'}{\partial y'^2}$$

Будем считать основными масштабами величины X, V_x и составим при их помощи рейнольдсовы числа потока

$$R = \frac{XV_x}{\nu}, \quad R_r = \frac{XV_x}{\nu_r}$$

Выбрав таким образом основные, в общем случае условные, масштабы продольных длин и скоростей, выразим через них прежде всего масштабы времени и давления, положив

$$T = \frac{X}{V_x}, \quad P = \rho V_x^2$$

Масштабы поперечных длин и скоростей Y и V_y выбираются из условий

$$\frac{XV_y}{YV_x} = 1, \quad \frac{\nu X}{V_xY^2} = 1$$

откуда вытекает

$$Y = X/\sqrt{R}, \quad V_y = V_x/\sqrt{R}$$

Тогда получим

$$\frac{\partial v_x'}{\partial t'} + v_x'\frac{\partial v_x'}{\partial x'} + v_y'\frac{\partial v_x'}{\partial y'} = -\frac{\partial p'}{\partial x'} + \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_r}\right)\frac{\partial^2 v_x'}{\partial x'^2} +$$

$$+\left(1 + \frac{R}{R_r}\right)\frac{\partial^2 v_x'}{\partial y'^2} + \frac{2R}{R_r}\frac{\partial \omega_z'}{\partial y'}$$

$$\frac{1}{R}\left(\frac{\partial v_y'}{\partial t'}+v_x'\frac{\partial v_y'}{\partial x'}+v_y'\frac{\partial v_y'}{\partial y'}\right)=-\frac{\partial p'}{\partial y'}+$$

$$+\left(\frac{1}{R^2}+\frac{1}{RR_r}\right)\frac{\partial^2 v_y'}{\partial x'^2}+\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R_r}\right)\frac{\partial^2 v_y'}{\partial y'^2}-\frac{2}{R_r}\frac{\partial \omega_z'}{\partial x'}$$

$$\frac{\partial \omega_z'}{\partial t'}+v_x'\frac{\partial \omega_z'}{\partial x'}+v_y'\frac{\partial \omega_z'}{\partial y'}=-\frac{4E}{R_r}\omega_z'+\frac{ER}{R_c}\left(\frac{1}{R}\frac{\partial^2 \omega_z'}{\partial x'^2}+\frac{\partial^2 \omega_z'}{\partial y'^2}\right)+$$

$$+\frac{2E}{R_r}\left(\frac{1}{R}\frac{\partial v_y'}{\partial x'}-\frac{\partial v_x'}{\partial y'}\right) \tag{1.4}$$

$$\frac{\partial v_x'}{\partial x'}+\frac{\partial v_y'}{\partial y'}=0$$

Здесь

$$R=\frac{V_x X}{\nu},\quad E=\frac{X^2}{I},\quad R_r=\frac{V_x X}{\nu_r}$$

$$R_c=\frac{V_x X^3}{\gamma I}=\frac{V_x X^3}{c_a+c_d},\quad \gamma=\frac{c_a+c_d}{I} \tag{1.5}$$

Для масштабов имеем

$$Y=X/\sqrt{R},\ V_y=V_x/\sqrt{R},\ \Omega_z=V_x\sqrt{R}/X \tag{1.6}$$

Полученная система уравнений представляет собой исходную систему (1.2) уравнений движения вязкой несжимаемой жидкости с моментными напряжениями, преобразованную к безразмерному виду. Основным параметром является число Рейнольдса потока R.

Устремим в полученных уравнениях R к бесконечности. В зависимости от соотношений между величинами R, R_r, R_c, E рассмотрим четыре возможных типа дифференциальных уравнений пограничного слоя с моментными напряжениями.

1. Если R, R_r, E, R_c/R имеют одинаковый порядок, то в размерных переменных получим

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+(\nu+\nu_r)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+2\nu_r\frac{\partial \omega}{\partial y}$$

$$\frac{\partial p}{\partial y}=0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t}+u\frac{\partial \omega}{\partial x}+v\frac{\partial \omega}{\partial y}=-\frac{4\nu_r}{I}\omega-\frac{2\nu_r}{I}\frac{\partial u}{\partial y}+\gamma\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \tag{1.7}$$

где

$$u=v_x,\quad v=v_y,\quad \omega=\omega_z \tag{1.8}$$

В этом случае дифференциальные уравнения пограничного слоя содержат члены, характеризующие несимметричность диады напряжений, моментные напряжения и инерцию частиц жидкости при вращении.

2. В случае, когда R, R_r, E имеют одинаковый порядок, а $ER \ll R_c$, имеем систему уравнений (1.7), в которой последнее уравнение заменяется следующим равенством:

$$\frac{\partial\omega}{\partial t}+u\frac{\partial\omega}{\partial x}+v\frac{\partial\omega}{\partial y}=-\frac{4\nu_r}{I}\omega-\frac{2\nu_r}{I}\frac{\partial u}{\partial y} \tag{1.9}$$

Этот случай соответствует отсутствию моментных напряжений в жидкости.

3. Если R, R_r, R_c имеют одинаковый порядок при условии, что $E \gg R$, то получим систему (1.7), в которой последнее уравнение имеет вид

$$0=-4\nu_r\omega-2\nu_r\frac{\partial u}{\partial y}+I\gamma\frac{\partial^2\omega}{\partial y^2} \tag{1.10}$$

Это соответствует случаю, когда инерцией вращения частиц можно пренебречь.

4. В том случае, когда R, R_r, R_c/E имеют одинаковый порядок при условии $E \ll R$, то в системе (1.7) последнее уравнение заменяется следующим уравнением:

$$\frac{\partial\omega}{\partial t}+u\frac{\partial\omega}{\partial x}+v\frac{\partial\omega}{\partial y}=\gamma\frac{\partial^2\omega}{\partial y^2} \tag{1.11}$$

Уравнение (1.11) соответствует случаю, когда моментное напряжение играет главную роль при вращении частиц.

§ 2. Рассмотрим задачи о стационарном ламинарном пограничном слое в случаях, когда моментное напряжение играет главную роль при вращении частиц.

Рассмотрим более общие классы решения, когда скорости на внешней границе пограничного слоя заданы в следующей форме:

$$U(x)=x^m\left[u_0+u_1x^{m+1}+u_2x^{2(m+1)}+\ldots\ldots\right] \tag{2.1}$$

В рассматриваемом случае уравнение пограничного слоя сводится к следующему:

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=U\frac{\partial U}{\partial x}+(\nu+\nu_r)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+2\nu_r\frac{\partial\omega}{\partial y}$$

$$u\frac{\partial\omega}{\partial x}+v\frac{\partial\omega}{\partial y}=\gamma\frac{\partial^2\omega}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial p}{\partial y}=0 \tag{2.2}$$

При решении этой системы уравнений для какой-нибудь конкретной задачи необходимо учесть граничные условия данной задачи. В асимметрической теории, как уже отмечали, состояние жидкости характеризуется дополнительно полем угловых скоростей. Очевидно, что в связи с этим в теории появляются дополнительные уравнения движения. Из этого и следует, что состояние жидкости у границы раздела между жидкостью и твердым телом (на стенке) необходимо характеризовать дополнительными граничными условиями. Поле поступательных скоростей у границы может быть задано так, как в обычной гидромеханике. По современным воззрениям и опытным данным частицы жидкости прилипают к поверхности тела, и следовательно, как нормальные, так и касательные составляющие векторов скорости жидкости и тела дожны быть одинаковыми в точках на поверхности тела. В частном случае, если вязкая жидкость обтекает неподвижное тело, то на его поверхности

$$u = v = 0 \quad \text{при} \quad y = 0 \quad \text{(плоская задача)} \tag{2.3}$$

Граничное условие на бесконечности будет

$$u \to U(x) \quad \text{при} \quad y \to \infty \tag{2.4}$$

Дополнительные граничные условия должны определять поле угловых скоростей вращения частиц $\vec{\omega}$. В этих условиях должен найти отражение механизм влияния границы на поле угловых скоростей вращения частиц. Этот механизм взаимодействия далеко не ясен.

Можно представить, что на твердой стенке угловая скорость вращения частиц равна нулю

$$\omega = 0 \quad \text{при} \quad y = 0 \quad \text{(плоская задача)} \tag{2.5}$$

На бесконечности граничное условие будет

$$\omega \to 0 \quad \text{при} \quad y \to \infty \tag{2.6}$$

Из уравнений (2.2) при условиях (2.3), (2.4), (2.5) и (2.6) видно, что $\omega \equiv 0$, то есть решение (2.2) при $\omega \neq 0$ невозможно при указанных граничных условиях. В частности, угловую скорость вращения частиц на твердой стенке нельзя представить равной нулю.

Можно представить, что на твердой стенке равна нулю антисимметричная часть тензора напряжений.

Тогда получим

$$2\omega = -\frac{\partial u}{\partial y} \quad \text{при} \quad y = 0 \tag{2.7}$$

Насколько хорошо сформулированные граничные условия отражают природу взаимодействия частиц жидкости с твердой стенкой, должен решить опыт.

Введем функцию тока $\psi(x, y)$; тогда

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \qquad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \tag{2.8}$$

При этом система уравнений (2.2) сводится к следующей:

$$\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y} - \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = U\frac{\partial U}{\partial x} + (\nu+\nu_r)\frac{\partial^3\psi}{\partial y^3} + 2\nu_r\frac{\partial\omega}{\partial y}$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial\omega}{\partial x} - \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\omega}{\partial y} = \gamma\frac{\partial^2\omega}{\partial y^2} \tag{2.9}$$

а граничные условия

$$\psi = 0, \quad \frac{\partial\psi}{\partial y} = 0, \quad 2\omega = -\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}$$

$$\text{при} \quad y = 0 \tag{2.10}$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial y} \to U(x), \quad \omega \to 0 \quad \text{при} \quad y \to \infty$$

Представим функцию тока $\psi(x, y)$ и среднюю угловую скорость вращения частиц $\omega(x, y)$ в следующем виде:

$$\psi = \sqrt{(\nu+\nu_r)u_0 x^{m+1}}\,[f_0 + x^{m+1}f_1 + x^{2(m+1)}f_2 + \cdots]$$

$$\omega = \sqrt{\frac{(\nu+\nu_r)}{\nu_r^2}u_0^3 x^{3m-1}}\,[\varphi_0 + x^{m+1}\varphi_1 + x^{2(m+1)}\varphi_2 + \cdots] \tag{2.11}$$

где положено

$$\eta = y\sqrt{\frac{u_0 x^{m-1}}{\nu+\nu_r}} \tag{2.12}$$

Подставив формально эти разложения в систему уравнений (2.9) и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, придем к системе обыкновенных дифференциальных уравнений для функции $f_i(\eta)$ и $\varphi_i(\eta)$ (штрих означает дифференцирование по η):

$$f_0''' + \frac{m+1}{2}f_0 f_0'' - m f_0'^2 = -m - 2\varphi_0'$$

$$\frac{\gamma}{\nu+\nu_r}\varphi_0'' + \frac{m+1}{2}f_0\varphi_0' - \frac{3m-1}{2}f_0'\varphi_0 = 0$$

$$f_1''' + \frac{m+1}{2}f_0 f_1'' - (3m+1)f_0' f_1' + \frac{3(m+1)}{2}f_0'' f_1 =$$

$$= -(3m+1)\frac{u_1}{u_0} - 2\varphi_1'$$

$$\frac{\gamma}{\nu+\nu_r}\varphi_1'' + \frac{m+1}{2}f_0\varphi_1' - \frac{5m-1}{2}f_0'\varphi_1 - \frac{3m-1}{2}\varphi_0 f_1' +$$

$$+ \frac{3(m+1)}{2}\varphi_0' f_1 = 0$$

$$f_2''' + \frac{m+1}{2} f_0 f_2'' - 2(2m+1) f_0' f_2' + \frac{5(m+1)}{2} f_0'' f_2 =$$

$$= -2(2m+1)\frac{u_2}{u_0} - (2m+1)\frac{u_1^2}{u_0^2} + (2m+1) f_1'^2 -$$

$$-\frac{3(m+1)}{2} f_1 f_1'' - 2\varphi_2'$$

$$\frac{\gamma}{\nu+\nu_r}\varphi_2'' + \frac{m+1}{2} f_0 \varphi_2' - \frac{7m+3}{2} f_0' \varphi_2 - \frac{3m-1}{2}\varphi_0 f_2' +$$

$$+\frac{5(m+1)}{2}\varphi_0' f_2 = \frac{5m+1}{2} f_1' \varphi_1 - \frac{3(m+1)}{2}\varphi_1' f_1$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad (2.13)$$

Граничные условия имеют вид

$$f_i = f_i' = 0, \quad f_i'' + 2\left(1 + \frac{\nu}{\nu_r}\right)\varphi_i = 0 \quad \text{при } \eta = 0$$

$$f_i' \to \frac{u_i}{u_0}, \quad \varphi_i \to 0 \quad \text{при} \quad \eta \to \infty \qquad (2.14)$$

Систему уравнений (2.13) и граничные условия (2.14) можем привести к виду, не содержащему характерных параметров $u_0, u_1, u_2, \cdots$ отдельной задачи.

С этой целью заменим функции f_i новыми линейно с ними связанными функциями g_i, h_i и т. д., положив

$$f_1 = \frac{u_1}{u_0} g_1, \quad \varphi_1 = \frac{u_1}{u_0} j_1$$

$$f_2 = \frac{u_2}{u_0}\left(g_2 + \frac{u_1^2}{u_0 u_2} h_2\right)$$

$$\varphi_2 = \frac{u_2}{u_0}\left(j_2 + \frac{u_1^2}{u_0 u_2} k_2\right) \quad \text{и так далее.} \qquad (2.15)$$

Тогда будем иметь следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$f_0''' + \frac{m+1}{2} f_0 f_0'' - m f_0'^2 = -m - 2\varphi_0'$$

$$\frac{\gamma}{\nu+\nu_r}\varphi_0'' + \frac{m+1}{2} f_0 \varphi_0' - \frac{3m-1}{2} f_0' \varphi_0 = 0$$

$$g_1''' + \frac{m+1}{2} f_0 g_1'' - (3m+1) f_0' g_1' + \frac{3(m+1)}{2} f_0'' g_1 =$$

$$= -(3m+1) - 2j_1'$$

$$\frac{\gamma}{\nu+\nu_r} j_1'' + \frac{m+1}{2} f_0 j_1' - \frac{5m+1}{2} f_0' j_1 -$$

$$- \frac{3m-1}{2} \varphi_0 g_1' + \frac{3(m+1)}{2} \varphi_0' g_1 = 0$$

$$g_2''' + \frac{m+1}{2} f_0 g_2'' - 2(2m+1) f_0' g_2' + \frac{5(m+1)}{2} f_0'' g_2 =$$

$$= -2(2m+1) - 2j_2'$$

$$\frac{\gamma}{\nu+\nu_r} j_2'' + \frac{m+1}{2} f_0 j_2' - \frac{7m+3}{2} f_0' j_2 -$$

$$- \frac{3m-1}{2} \varphi_0 g_2' + \frac{5(m+1)}{2} \varphi_0' g_2 = 0$$

$$h_2''' + \frac{m+1}{2} f_0 h_2'' - 2(2m+1) f_0' h_2' + \frac{5(m+1)}{2} f_0'' h_2 =$$

$$= -(2m+1) + (2m+1) g_1'^2 - \frac{3(m+1)}{2} g_1 g_1'' - 2k_2'$$

$$\frac{\gamma}{\nu+\nu_r} k_2'' + \frac{m+1}{2} f_0 k_2' - \frac{7m+3}{2} f_0' k_2 - \frac{3m-1}{2} \varphi_0 h_2' +$$

$$+ \frac{5(m+1)}{2} \varphi_0' h_2 = \frac{5m+1}{2} g_1' j_1 - \frac{3(m+1)}{2} j_1' g_1$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots \tag{2.16}$$

и граничные условия к ней

$$f_0 = f_0' = g_i = g_i' = h_i = h_i' = \cdots = 0, \quad f_0'' + 2\left(1 + \frac{\nu}{\nu_r}\right)\varphi_0 = 0$$

$$g_i'' + 2\left(1 + \frac{\nu}{\nu_r}\right) j_i = 0, \quad h_i'' + 2\left(1 + \frac{\nu}{\nu_r}\right) k_i = 0, \cdots, \quad \text{при } \eta = 0$$

$$f_0' \to 1, \quad g_1' \to 1, \quad g_2' \to 1, \cdots, \quad h_i' = \cdots \to 0$$

$$\varphi_0 = k_i = j_i \to 0 \quad \text{при } \eta \to \infty \tag{2.17}$$

§ 4. Полученное решение можно применять для рассмотрения ряда задач. В частности, принимая $m=0$, $u_0=c$, $u_1=u_2=\cdots=0$, $f_1=$

$=f_2=\cdots=g_1=g_2=\cdots=\varphi_1=\varphi_2=\cdots=j_1=j_2=\cdots 0$, получим задачу обтекания плоской полубесконечной пластинки вязкой несжимаемой жидкостью с моментными напряжениями.

Тогда из (2.16) будем иметь

$$2f_0''' + f_0 f_0'' = -4\varphi_0'$$

$$\frac{2\gamma}{\nu+\nu_r}\varphi_0'' + (f_0\varphi_0)' = 0 \tag{2.18}$$

и граничные условия

$$f_0 = f_0' = 0, \quad f_0'' + 2\left(1+\frac{\nu}{\nu_r}\right)\varphi_0 = 0 \quad \text{при } \eta = 0$$

$$f_0' \to 1, \quad \varphi_0 \to 0 \quad \text{при } \eta \to \infty$$

Ереванский государственный университет

Поступила 20 IX 1971

Լ. Գ. ՊԵՏՐՈՍՅԱՆ

ՍԱՀՄԱՆԱՅԻՆ ՇԵՐՏԻ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԸ ՄՈՄԵՆՏԱՅԻՆ ԼԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ԱՌԿԱՅՈՒԹՅԱՄԲ

Ամփոփում

Հոդվածում ուսումնասիրվում են մածուցիկ անսեղմելի հեղուկի հարթ սահմանային շերտի հավասարումները մոմենտային լարումների, լարումների ոչ սիմետրիկ տենզորի եվ մասնիկների ներքին իներցիայի առկայության դեպքում։ Դիտարկված են հարթ սահմանային շերտի հավասարումների տարբեր տիպեր։

Բերված է սահմանային շերտի հավասարումների լուծումը բավական ընդհանուր տեսքով, որը կարելի է կիրառել մի շարք խնդիրների լուծման համար։

THE EQUATIONS FOR THE BOUNDARY LAYER OF FLUID WITH MOMENTUM STRESSES

L. G. PETROSIAN

Summary

The equations for the plane boundary layer of a viscous incompressible fluid with momentum stresses, the asymmetric tensor of stresses and the internal inertia of particles are studied. The equations of various kinds for the plane boundary layer are examined.

The solutions for the boundary layer equation in a rather general form which can be used to solve a number of problems are presented.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Dahler I. S.* Transport Phenomena in a Fluid Composed of Diatomic Molecules. J. Chem. Phys., vol. 30, 1959, p. 1447.
2. *Dahler I. S., Scriven L. E.* Angular momentum of continua. Nature, vol. 192, № 4797, 1961.
3. *Grad H.* Statistical Mechanics, Thermodynamics and Arbitrary Namber of Integrals. Commun. Pure, App. Math., vol. 5, 1952, p. 455.
4. *Аэро Э. Л., Булыгин А. Н., Кувшинский Е. В.* Асимметрическая гидро механика ПММ. т. 29, вып. 2, 1965.
5. *Нгун Ван Дьеп.* Об уравнениях пограничного слоя жидкости с моментными напряжениями. ПММ, т. 32, вып. 4, 1968.
6. *Лойцянский Л. Г.* Ламинарный пограничный слой. Физматгиз, Л. 1962.
7. *Peddieson J., Mc Nitt R. P.* Boundary-layer theory for a micropolar fluid. Recent advances in Engineering Science, vol. 5, p. 1, 1970. 405—426.