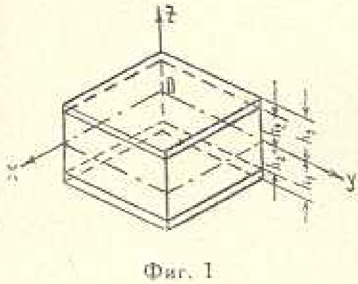
ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXVI, № 3, 1973 Механика

С. О. САРКИСЯН

О НЕКОТОРЫХ МЕТОДАХ В ФИЗИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ ТРЕХСЛОЙНЫХ ПЛАСТИН

Изучение малых упруго-пластических деформаций приводит к некоторым краевым задачам для нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных [1], которые изучались рядом авторов [3—7]. В работе [3] выяснены условия существования классических решений первой краевой задачи в „малом". В [4] обосновывается приложение метода упругих решений для первой и второй краевых задач теории малых упруго-пластических деформаций без каких-либо предположений о малости параметров, определяющих задачу; доказано, что обобщенные решения упомянутых краевых задач принадлежат к пространству $W_2^{(2)}$. В [5] доказано существование классических решений плоской задачи теории малых упруго-пластических деформаций. В работе [6] дано некоторое обобщение метода упругих решений. В [7] в предположении дифференцируемости операторов, определяющих вышеупомянутые задачи, доказана разрешимость основных краевых задач. В [8, 9] обосновывается приложение метода упругих решений для основных краевых задач теории малых упруго-пластических деформаций пластин и цилиндрических оболочек.



Фиг. 1

В настоящей работе обосновываются метод упругих решений и известные методы Ритца и Бубнова-Галеркина для основных краевых задач теории малых упруго-пластических деформаций трехслойных пластин, слои которых расположены симметрично относительно срединной плоскости (фиг. 1).

1. Как известно [2], основное уравнение теории малых упруго-пластических деформаций тонкой трехслойной пластинки представляет собой квазилинейное уравнение эллиптического типа четвертого порядка

$$\nabla^4 w = \frac{q}{D_e} + \frac{\partial^2}{\partial x_2}\left[\Omega\left(\varkappa_1 + \frac{1}{2}\varkappa_2\right)\right] + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left[\Omega \varkappa_{12}\right] +$$
$$+ \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left[\Omega\left(\varkappa_2 + \frac{1}{2}\varkappa_1\right)\right] \tag{1.1}$$

где q—поперечная нагрузка на пластинку, D_e—обычная цилиндрическая жесткость пластинки

$$D_e = \frac{8}{3}\left[G_2 h_2^3 + G_1 (h_1^3 - h_2^3)\right] \tag{1.2}$$

$$\Omega = 1 - \frac{J(P_s)}{D_e}, \quad J(P_s) = D_e - D_p \tag{1.3}$$

$$P_s = w_{xx}^2 + w_{xx} w_{yy} + w_{yy}^2 + w_{xy}^2 \tag{1.4}$$

$$D_p = 8G_2 \int_0^{h_2} \omega_2(e_i) z^2 dz + 8G_1 \int_{h_2}^{h_1} \omega_1(e_i) z^2 dz \tag{1.5}$$

$G_j (j = 1, 2)$ — модули сдвига материала слоев пластинки, $\omega_j(e_i)$ $(j=1, 2)$—функции от e_i, определяющие пластические свойства материала слоев пластинки,

$$\sigma_i^j = 3G_j\left[1 - \omega_j(e_i)\right] e_i, \quad j = 1, 2 \tag{1.6}$$

где $\sigma_i^j (j = 1, 2)$ — интенсивность напряжений слоев пластинки, e_i—интенсивность деформаций:

$$e_i = \frac{2|z|}{\sqrt{3}} \sqrt{P_s} \tag{1.7}$$

Для реальных материалов функции $\omega_j(e_i)$, $j = 1, 2$ удовлетворяют условиям [1, 3]

$$0 \leqslant \omega_j(e_i) \leqslant \omega_j(e_i) + \frac{d\omega_j}{de_i} e_i \leqslant \lambda_j, \quad j=1, 2 \tag{1.8}$$

Пусть S—ограниченная область, занятая пластинкой в плане, Γ—граница S. Будем рассматривать следующую граничную задачу: найти решение (1.1), если на Γ

$$w|_\Gamma = 0, \quad \left.\frac{\partial w}{\partial n}\right|_\Gamma = 0 \tag{1.9}$$

Для дальнейших рассмотрений используем гильбертово пространство H_1 [8].

Из результатов работ* [10, 11] известно, что если область S звездна относительно каждой точки некоторого своего круга и $w \in H_1$, то $w \in W_2^{(2)}(S)$. Если использовать теоремы вложения [12], получим, что $w \in C^{(0)}(S)$, w_x и $w_y \in L_q(S)$, где $q > 1$ и произвольна, далее имеют место следующие соотношения:

* См. также докторскую диссертацию И. И. Воровича.

$$\|w\|_{C(S)} \leqslant m\|w\|_{H_1}, \quad \|w_x\|_{L_q(S)} \leqslant m(q)\|w\|_{H_1}, \quad \|w_y\|_{L_q(S)} \leqslant m(q)\|w\|_{H_1} \quad (1.10)$$

$$\|w_{xx}\|_{L_2(S)} \leqslant m\|w\|_{H_1}, \quad \|w_{yy}\|_{L_2(S)} \leqslant m\|w\|_{H_1}, \quad \|w_{xy}\|_{L_2(S)} \leqslant m\|w\|_{H_1} \quad (1.11)$$

Если Γ^*—некоторый кусочно-гладкий контур класса $\Lambda_1(m, 0)$, целиком лежащий в S, то при любом $q > 1$

$$\left(\int\limits_{\Gamma^*} |w_x|^q \, d\Gamma^*\right)^{\frac{1}{q}} \leqslant m(q)\|w\|_{H_1}, \quad \left(\int\limits_{\Gamma^*} |w_y|^q \, d\Gamma^*\right)^{\frac{1}{q}} \leqslant m(q)\|w\|_{H_1} \quad (1.12)$$

Определение. Обобщенным решением задачи (1.1, 1.9) назовем функцию $w(x, y) \in H_1$, удовлетворяющую интегральному тождеству

$$(w, \varphi)_{H_1} = \iint\limits_S D_p(w, \varphi)\, dS + \iint\limits_S q\varphi\, dS \quad (1.13)$$

для любой функции $\varphi \in H_1$.

Заметим, что если функция—обобщенное решение задачи (1.1, 1.9) в смысле принятого определения, то выполнены все условия равновесия пластинки, если их сформулировать с помощью принципа возможных перемещений Лагранжа. Кроме того, обобщенное решение всегда будет классическим, если оно четыре раза непрерывно-дифференцируемо.

Введем оператор A соотношением

$$(Aw, \varphi)_{H_1} = \iint\limits_S D_p(w, \varphi)\, dS + \iint\limits_S q\varphi\, dS \quad (1.14)$$

для любого $\varphi \in H_1$.

Как и в [8], если $q \in L_p(S)$ при $p \geqslant 1$, используя (1.8), неравенства Гельдера и теорему Рисса, можно показать, что оператор A будет действовать в пространстве H_1.

Очевидно, отыскание обобщенного решения краевой задачи (1.1, 1.9) эквивалентно решению операторного уравнения в пространстве H_1

$$w = Aw \quad (1.15)$$

Теорема 1. *Пусть выполняются условия:*

1) $q \in L_p(S)$ при $p \geqslant 1$

2) $\omega_j(e_i)$, $j = 1, 2$ *удовлетворяют условиям (1.8).*

Тогда оператор Aw есть оператор сжатия во всем пространстве H_1, причем имеет место соотношение $\|Aw_1 - Aw_2\|_{H_1} \leqslant \lambda \|w_1 - w_2\|_{H_1}$ *для любых $w_1, w_2 \in H_1$,* где $\lambda < 1$, *откуда вытекает однозначная разрешимость задачи (1.1, 1.9).*

На самом деле, поступая таким же образом, как и в [8], будем иметь

$$\|Aw_1 - Aw_2\|^2_{H_1} = \iint\limits_S \Big\{ \Big[8G_2 \int\limits_0^{h_2} \omega_2 (e_i^{(1)})\, z^2 dz + 8G_1 \int\limits_{h_2}^{h_1} \omega_1 (e_i^{(1)})\, z^2 dz \Big] \times$$

$$\times (w_1,\ Aw_1 - Aw_2) - \Big[8G_2 \int\limits_0^{h_2} \omega_2 (e_i^{(2)})\, z^2 dz + 8(G_1) \int\limits_{h_2}^{h_1} \omega_1 (e_1^{(2)}) z^2 dz \Big] \times$$

$$\times (w_2,\ Aw_1 - Aw_2) \Big\}\, dS \leqslant \lambda \|w_1 - w_2\|_{H_1} \|Aw_1 - Aw_2\|_{H_1} \tag{1.16}$$

где

$$\lambda = \frac{G_2 h_2^3 \lambda_2 + G_1 (h_1^3 - h_2^3) \lambda_1}{G_2 h_2^3 + G_1 (h_1^3 - h_2^3)} \tag{1.17}$$

откуда получим

$$\|Aw_1 - Aw_2\|_{H_1} \leqslant \lambda \|w_1 - w_2\|_{H_1} \tag{1.18}$$

где λ будет меньше 1 в следующих случаях:

1) $\lambda_1 < 1$, $\lambda_2 < 1$, то есть материалы слоев являются упрочняющимися;

2) $\lambda_1 \leqslant 1$, $\lambda_2 < 1$, то есть материал второго слоя является упрочняющимся, а материал первого слоя может быть и не упрочняющимся, то есть кривая зависимости между интенсивностями $\sigma_i^{(1)}$ и e_i может иметь горизонтальный участок;

3) $\lambda_1 < 1$, $\lambda_2 \leqslant 1$, то есть материал первого слоя является упрочняющимся, а материал второго слоя может быть и не упрочняющимся;

4) материал одного из слоев может быть линейно-упругим, а материал другого слоя—упрочняющимся.

Итак, при таких условиях оператор A будет оператором сжатия во всем пространстве H_1. Теорема доказана.

Из доказанной теоремы вытекает сходимость известного метода упругих решений [1] в пространстве H_1 со скоростью геометрической прогресии со знаменателем λ при любом выборе начального приближения.

2. Пусть $\{\varphi_i\}_{i=1}^{\infty}$ образуют ортонормированный базис в пространстве H_1.

Будем искать приближенное решение операторного уравнения (1.18) в виде

$$w_n = \sum_{i=1}^{n} C_{in} \varphi_i \tag{2.1}$$

используя метод Бубнова-Галеркина.

Ниже будет доказано, что

а) на каждом этапе применения метода Бубнова-Галеркина к уравнению (1.15) система алгебраических уравнений для C_{in} разрешима;

б) последовательность w_n в H_1 сильно сходится к обобщенному решению краевой задачи (1.1, 1.9).

Переходим к доказательству утверждения (а). Система галеркинских уравнений для определения C_{in} имеет вид

$$C_{in} = \iint\limits_S D_p\left(\sum_{j=1}^{n} C_{jn}\chi_j,\ \chi_i\right) dS + \iint\limits_S q\chi_i\, dS, \quad i = 1, \cdots, n \tag{2.2}$$

где в D_p вместо w подставлено (2.1).

Рассмотрим евклидово n-мерное пространство E_n. Если векторы $\vec{x} = \{\xi_1, \cdots, \xi_n\}$ и $\vec{y} = \{\eta_1, \cdots, \eta_n\}$, то расстояние между ними в E_n определяется следующим образом:

$$\rho(\vec{x}, \vec{y}) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (\xi_i - \eta_i)^2} \tag{2.3}$$

Рассмотрим в этом пространстве оператор $\vec{y} = M(\vec{x})$, заданный с помощью равенств

$$\eta_i = \iint\limits_S D_p\left(\sum_{j=1}^{n} \xi_j \chi_j,\ \chi_i\right) dS + \iint\limits_S q\chi_i dS, \quad i = 1, \cdots, n \tag{2.4}$$

где в D_p вместо w подставлено $\sum\limits_{j=1}^{n} \xi_j \chi_j$.

Пусть $\vec{x}_1 = \{C_{1n}^{(1)}, \cdots, C_{nn}^{(1)}\}$, $\vec{x}_2 = \{C_{1n}^{(2)}, \cdots, C_{nn}^{(2)}\}$, а соответствующие $\vec{y}_1 = \{C_{1n}^{*}, \cdots, C_{nn}^{*}\}$, $\vec{y}_2 = \{C_{1n}^{**}, \cdots, C_{nn}^{**}\}$; используя ход рассуждений, как и в (1.16), будем иметь

$$\begin{aligned}
[\rho(\vec{y}_1, \vec{y}_2)]^2 = \iint\limits_S \Bigg\{ &\left[8G_2 \int_0^{h_2} \omega_2(e_i^{(1)}) z^2\, dz + 8G_1 \int_{h_2}^{h_1} \omega_1(e_i^{(1)}) z^2 dz \right] \times \\
&\times \left(\sum_{j=1}^{n} C_{jn}^{(1)}\chi_j,\ \sum_{j=1}^{n} (C_{jn}^{*} - C_{jn}^{**})\chi_j \right) - \\
&- \left[8G_2 \int_0^{h_2} \omega_2(e_i^{(2)}) z^2\, dz + 8G_1 \int_{h_2}^{h_1} \omega_1(e_i^{(2)}) z^2 dz \right] \times \\
&\times \left(\sum_{j=1}^{n} C_{jn}^{(2)}\chi_j,\ \sum_{j=1}^{n} (C_{jn}^{*} - C_{jn}^{**})\chi_j \right) \Bigg\} dS \leqslant \\
&\leqslant \lambda \left\| \sum_{j=1}^{n} (C_{jn}^{(1)} - C_{jn}^{(2)})\chi_j \right\|_{H_1} \cdot \left\| \sum_{j=1}^{n} (C_{jn}^{*} - C_{jn}^{**})\chi_j \right\|_{H_1} =
\end{aligned}$$

$$=\lambda\rho(\vec{x}_1, \vec{x}_2)\rho(\vec{y}_1, \vec{y}_2)$$

$$\rho(\vec{y}_1, \vec{y}_2)\leqslant\lambda\rho(\vec{x}_1, \vec{x}_2)$$

и при $\lambda<1$ оператор M системы галеркинских уравнений является оператором сжатия в E_n и, следовательно, система (2.2) в этом пространстве имеет единственное решение, которое можно определить методом последовательных приближений.

Переходим теперь к доказательству утверждения (б). Легко видеть, что последовательность $\{w_n\}$ лежит в некоторой сфере пространства H_1, радиус которой не зависит от n.

На самом деле,

$$\|w_n\|^2_{H_1}=\iint\limits_S\left[8G_2\int\limits_0^{h_2}\omega_2(e_i)z^2\,dz+8G_1\int\limits_{h_2}^{h_1}\omega_1(e_i)z^2dz\right]\|w_n\|^2\,dS+$$

$$+\iint\limits_S qw_n dS$$

при $q\in L_2(S)$, используя (1.11), имеем

$$\iint\limits_S|qw_n|\,dS\leqslant\frac{\varepsilon^2}{2}\iint\limits_S|q|^2dS+\frac{1}{2\varepsilon^2}\iint\limits_S|w_n|^2\,dS\leqslant$$

$$\leqslant\frac{\varepsilon^2}{2}\iint\limits_S|q|^2dS+\frac{m^2}{2\varepsilon^2}\|w\|_{H_1}$$

где $\varepsilon>0$ и произвольно. Далее,

$$\iint\limits_S\left[8G_2\int\limits_0^{h_2}\omega_2(e_i)z^2dz+8G_1\int\limits_{h_2}^{h_1}\omega_1(e_i)z^2dz\right]\|w_n\|^2dS\leqslant\lambda\|w_n\|^2_{H_1}$$

Следовательно, будем иметь

$$\left(1-\lambda-\frac{m^2}{2\varepsilon^2}\right)\|w_n\|^2_{H_1}\leqslant\frac{\varepsilon^2}{2}\iint\limits_S|q|^2\,dS$$

Выражение в скобках можно сделать положительным при соответствующем выборе числа ε, и мы получим

$$\|w_n\|^2_{H_1}\leqslant\frac{\varepsilon^2}{2\left(1-\lambda-\dfrac{m^2}{2\varepsilon^2}\right)}\iint\limits_S|q|^2\,dS \qquad (2.5)$$

что и требовалось доказать.

Рассмотрим теперь полную энергию системы

$$Э=\iint\limits_S\left[2\int\limits_0^{h_2}W_2dz+2\int\limits_{h_2}^{h_1}W_1dz\right]dS-\iint\limits_S qwdS \tag{2.6}$$

где W_j—работа внутренних усилий j-го слоя пластинки при переходе элемента тела единичного объема из недеформированного состояния в деформированное.

Полную энергию системы можно представить и в следующем эквивалентном виде:

$$Э=\|w\|^2_{H_1}-\iint\limits_S D_p\|w\|^2dS-\iint\limits_S qwdS\equiv\|w\|^2_{H_2}-(Aw,\ w)_{H_1} \tag{2.7}$$

Известно [1,13], что обобщенное решение задачи (1.1, 1.5) сообщает функционалу полной энергии минимальное значение.

Система уравнений метода Ритца, примененного к функционалу Э, совпадает при наших условиях с системой Бубнова-Галеркина (2.2).

На самом деле, система уравнений метода Ритца имеет следующий вид:

$$\frac{\partial Э}{\partial C_{in}}=\iint\limits_S\left|2\int\limits_0^{h_2}\frac{dW_2}{de_i}\frac{\partial e_i}{\partial C_{in}}dz+2\int\limits_{h_2}^{h_1}\frac{\partial W_1}{\partial e_i}\frac{\partial e_i}{\partial C_{in}}dz\right|dS-$$

$$-\iint\limits_S q\chi_i\,dS=0,\quad i=1,\cdots,n \tag{2.8}$$

так как

$$\frac{dW_j}{de_i}=\sigma_i^j,\quad j=1,\ 2 \tag{2.9}$$

Используя (1.6) и вычисляя $\frac{\partial e_i}{\partial C_{in}}$, системе (2.8) придадим вид

$$\iint\limits_S\left\{8G_2\int\limits_0^{h_2}[1-\omega_2(e_i)]z^2dz+8G_1\int\limits_{h_2}^{h_1}[1-\omega_1(e_i)]z^2dz\right\}\times$$

$$\times\left(\sum_{j=1}^n C_{jn}\chi_j,\ \chi_i\right)dS-\iint\limits_S q\chi_i\,dS=0,\quad i=1,\cdots,n$$

так как $\{\chi_i\}_{i=1}^{\infty}$ образуют ортонормированный базис в H_1, то будем иметь систему

$$C_{in}-\iint\limits_S\left|8G_2\int\limits_0^{h_2}\omega_2(e_i)z^2dz+8G_1\int\limits_{h}^{h_1}\omega_1(e_i)z^2dz\right|\times$$

$$\times\left(\sum_{j=1}^{n} C_{jn}\gamma_j\gamma_i\right)dS-\iint_S q\gamma_i\,dS=0,\quad i=1,\cdots,n \tag{2.8'}$$

которая точно совпадает с системой (2.2).

Итак, разрешима и система метода Ритца, примененного к функционалу энергии (2.6).

Теперь попробуем оценить погрешность при применении метода Бубнова-Галеркина.

Обобщенное решение задачи (1.1, 1.9) разложим в ряд по γ_i

$$w_0=\sum_{i=1}^{\infty} C_i^0\gamma_i \tag{2.10}$$

и обозначим

$$P_n w_0=\sum_{i=1}^{n} C_i^0\gamma_i \tag{2.11}$$

Имеем

$$\|w_n-w_0\|_{H_1}\leqslant\|w_n-P_nw_0\|_{H_1}+\|P_nw_0-w_0\|_{H_1} \tag{2.12}$$

Но, используя систему (2.2) и тот факт, что w_0 удовлетворяет интегральному тождеству (1.16), применяя те же самые рассуждения, как и в (1.16), можно получить, что

$$\|w_n-P_nw_0\|_{H_1}\leqslant\lambda\|w_n-w_0\|_{H_1} \tag{2.13}$$

Из (2.13) при $\lambda<1$ получим, что

$$\|w_n-w_0\|_{H_1}\leqslant\frac{1}{1-\lambda}\|P_nw_0-w_0\|_{H_1} \tag{2.14}$$

Итак, приближения, определяемые по методу Бубнова-Галеркина, сходятся к точному решению уравнения (1.15).

Полученные результаты можно сформулировать в виде теоремы.

Теорема 2. *Пусть выполняются условия:*

1) $q\in L_p(S)$ *при* $p\geqslant 2$,

2) $\omega_j(e_i)$, $j=1, 2$ *удовлетворяют условиям (1.8),*

3) *число* λ, *определяемое выражением (1.17), меньше 1.*

Пусть, далее, приближенное представление для w_n ищется в виде (2.1) применением метода Бубнова-Галеркина или метода Ритца. В этих случаях имеют место следующие факты.

1) Уравнения метода Бубнова-Галеркина (2.2) оказываются эквивалентными уравнениям метода Ритца (2.8').

2) На каждом этапе система (2.2) и, следовательно, система (2.8') имеют единственное решение, которое можно определить методом последовательных приближений. Оператор системы (2.2) или (2.8') в E_n является оператором сжатия с коэффициентом λ. Решение системы можно определить методом последовательных приближений.

3. Все множество приближений $\{w_n\}$, получаемых посредством (2.2) или (2.8'), лежит в некотором шаре H_1.

4) Последовательность $\{w_n\}$ сильно сходится в H_1 к обобщенному решению w_0 задачи (1.1, 1.9).

5) Быстрота сходимости приближенных решений w_n к w_0 характеризуется неравенством (2.14).

Замечание. Как следует из самого способа доказательства всех утверждений, они опираются на неравенства (1.10—1.12). Поскольку эти неравенства доказаны и для случая шарнирного опирания пластинки [11], следовательно, утверждения теорем 1 и 2 остаются верными и в случае шарнирного опирания.

В случае неоднородных граничных условий все утверждения теорем 1 и 2 можно таким же образом доказать в пространстве H_2 [8].

Ереванский государственный
университет

Поступила 14 IV 1972

Ս. Հ. ՍԱՐԳՍՅԱՆ

ԵՌԱՇԵՐՏ ՍԱԼԵՐԻ ՖԻԶԻԿԱԿԱՆ ՈՉ-ԳԾԱՅԻՆ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՄԻ ՔԱՆԻ ՄԵԹՈԴՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Դիտարկված է սիմետրիկ հավաքած եռաշերտ սալի ծռման խնդիրը ֆիզիկական ոչ-գծային դրվածքով, երբ սալի եզրը ամրակցված է: Եզրային խնդրի լուծումը բերվում է էներգետիկ տարածությունում օպերատորի հավասարման լուծմանը:

Այնուհետև հիմնավորված են H_1S *տարածությունում հայտնի Բուբնով-Գալյորկինի և Ռիտցի «առաձգական լուծումներ» մեթոդները:*

Պարզվում է, որ նշված մոտավորությունները զուգամիտում են հետևյալ դեպքերում՝

1) շերտերի նյութերն ամրապնդվող են,

2) շերտերից մեկի կամ երկուսի նյութը ամրապնդվող է, իսկ մյուսներինը կամ մյուսինը կարող է ունենալ Միզեսի պլաստիկության տեղամաս,

3) շերտերից մեկի կամ երկուսի նյութը կարող է լինել գծային-առաձգական, իսկ համապատասխանորեն մյուսինը՝ ամրապնդվող:

ON SOME METHODS IN THE PHYSICAL NON-LINEAR THEORY OF THREE-LAYER PLATES

S. O. SARKISIAN

S u m m a r y

The bending of a three-layer plate, fixed over its outline beyond elasticity limit, is considered.

The boundary problem is reduced to the operator equation in the energetic space. Further, the well known methods of „elastic solutions" of Bubnov-Galerkin and Rits in the $H_1(S)$ space are substantiated. The above approximations are found to converge in the following cases:

1. The materials of the layers are hardening;
2. The material of one layer is hardening while that of another layer can be assumed to have the Mizis yield plane;
3. The material of one layer can be linear-elastic while that of another layer is hardening.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ильюшин А. А.* Пластичность. ГИТТЛ, М.—Л., 1948.
2. *Амбарцумян С. А.* Об изгибе нелинейно-упругих трехслойных пластинок. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, № 6, 1960.
3. *Петрова С. Г.* О первой краевой задаче нелинейной теории упругости. Докл. АН СССР, т. 114, № 1, 1957.
4. *Ворович И. И., Красовский Ю. П.* О методе упругих решений. Докл. АН СССР, т. 126, № 4, 1959.
5. *Красовский Ю. П.* Разрешимость плоской задачи теории малых упруго-пластических деформаций. Докл. АН СССР, т. 126, № 5, 1959.
6. *Быков Д. Л., Шачнев В. А.* Об одном обобщении метода упругих решений. ПММ, т. 33, № 2, 1969.
7. *Ланген6ах А.* О некоторых нелинейных операторах теории упругости в гильбертовом пространстве. Вестник Ленинградского ун-та, № 1, 1961.
8. *Саркисян С. О.* О методе упругих решений в теории пластин. Изв. АН АрмССР, Механика, т. XXV, № 4, 1972.
9. *Саркисян С. О.* О методе упругих решений в теории цилиндрических оболочек, Изв. АН АрмССР, Механика, т. XXV, № 5, 1972.
10. *Ворович И. И.* О существовании решений в нелинейной теории оболочек. Изв. АН СССР, сер. мат., т. 19, № 4, 1956.
11. *Ворович И. И.* О некоторых прямых методах в нелинейной теории пологих оболочек. ПММ, т. 20, вып. 4, 1956.
12. *Соболев С. Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Изд. Ленинград. ун-та, 1950.
13. *Качанов Л. М.* Основы теории пластичности. Изд. „Наука", М., 1969.