ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXVI, № 3, 1973 Механика

Р. Е. МКРТЧЯН

# КУСОЧНО-ЛИНЕЙНЫЙ ЗАКОН СВЯЗИ МЕЖДУ НАПРЯЖЕНИЯМИ И ДЕФОРМАЦИЯМИ ПРИ БОЛЬШИХ ДЕФОРМАЦИЯХ

Деформативные свойства упругого материала полностью выражаются с помощью функции энергии деформации материала $W$. Однако, выбор формы зависимости $W$ от инвариантов деформаций $I_1, I_2, I_3$ для изотропного материала при конечных деформациях представляет трудную задачу. Достаточно вспомнить, что для сжимаемого материала известны выражения $W(I_1, I_2, I_3)$ только в рамках теории упругости второго и третьего порядка [1, 2]. Кроме того, почти все известные выражения нелинейные и применение их в конкретных задачах связано с определенными трудностями.

Для случая малых деформаций, когда соотношения между напряжениями и деформациями отклоняются от линейного закона, существуют различные варианты кусочной линеаризации этих соотношений [1, 3, 4, 5].

При наложении малых деформаций на большие, которые возникают при однородном растяжении, зависимость между изменениями напряжений и малыми деформациями линейная [6, 7].

На основании этого факта в настоящей работе предлагается приближенный метод нахождения физической связи между напряжениями и деформациями сжимаемого материала при конечных деформациях. Суть этого метода заключается в том, что искомый физический закон связи между напряжениями и деформациями приближенно заменяется кусочно линейными функциями.

Весь практически возможный диапазон деформаций элементарного прямоугольного параллелепипеда, вырезанного из деформированного упругого тела по главным направлениям деформаций, разделяется на такие маленькие области, где можно применить линейный закон связи между напряжениями и деформациями.

Затем, приравниванием напряжений соседних областей в отдельных характерных граничных точках этих областей получены формулы для определения упругих постоянных.

С деформируемым телом свяжем ортогональную систему координат $(\overline{\vartheta}_1, \overline{\vartheta}_2, \overline{\vartheta}_3)$ так, чтобы в каждой точке она совпадала с главными направлениями деформаций $(\overline{y}_1, \overline{y}_2, \overline{y}_3)$.

Выделим мысленно из деформированного тела прямоугольный параллелепипед с ребрами $d\overline{y}_1$, $d\overline{y}_2$, $d\overline{y}_3$, параллельными главным направлениям деформаций в этой точке. Тогда его деформация будет состоять только из однородных растяжений, которые можно предполагать, что происходили постепенно от малых растяжений, которые каждый раз прибавляются к имеющимся фиксированным деформациям однородных растяжений до появления нового фиксированного состояния.

Компоненты тензора напряжений $\sigma_{ij}$ $(i, j=1, 2, 3)$ в рассматриваемой точке относительно системы $(\overline{y}_1, \overline{y}_2, \overline{y}_3)$ представим в следующем виде [6, 7]:

$$\sigma_{ii}=\sigma_{ii}^0+\varepsilon\sigma_{ii}' \qquad (\text{по индексу } i \text{ не суммировать})$$

$$\sigma_{ij}=\sigma_{ij}^0=\sigma_{ij}'=0 \qquad (i\neq j) \tag{1.1}$$

где $\sigma_{ij}^0$—компоненты тензора напряжений от больших деформаций растяжений последнего фиксированного положения выделенного параллелепипеда относительно системы $(\overline{y}_1, \overline{y}_2, \overline{y}_3)$; $\varepsilon$—малый параметр, квадраты и высшие степени которого пренебрегаются относительно $\varepsilon$; $\varepsilon\sigma_{ij}'$—компоненты тензора напряжений от наложенных малых деформаций однородных растяжений, с прибавлением которых получаем действительно имеющиеся деформации выделенного параллелепипеда.

$\varepsilon\sigma_{ii}'$ определяются выражениями [6]

$$\begin{aligned} \varepsilon\sigma_{11}' &= \left(c_{11}\frac{\partial u}{\partial \overline{y}_1}+c_{12}\frac{\partial v}{\partial \overline{y}_2}+c_{13}\frac{\partial w}{\partial \overline{y}_3}\right)\varepsilon \\ \varepsilon\sigma_{22}' &= \left(c_{21}\frac{\partial u}{\partial \overline{y}_1}+c_{22}\frac{\partial v}{\partial \overline{y}_2}+c_{23}\frac{\partial w}{\partial \overline{y}_3}\right)\varepsilon \\ \varepsilon\sigma_{33}' &= \left(c_{31}\frac{\partial u}{\partial \overline{y}_1}+c_{32}\frac{\partial v}{\partial \overline{y}_2}+c_{33}\frac{\partial w}{\partial \overline{y}_3}\right)\varepsilon \end{aligned} \tag{1.2}$$

Здесь $c_{ij}$ $(i, j=1, 2, 3)$—упругие постоянные, причем

$$\begin{aligned} c_{21}-c_{12} &= \sigma_{11}^0-\sigma_{22}^0 \\ c_{32}-c_{23} &= \sigma_{22}^0-\sigma_{33}^0 \\ c_{13}-c_{31} &= \sigma_{33}^0-\sigma_{11}^0 \end{aligned} \tag{1.3}$$

$\varepsilon u, \varepsilon v, \varepsilon w$—компоненты малых перемещений по направлениям $\overline{y}_1, \overline{y}_2, \overline{y}_3$ соответственно относительно последнего фиксированного положения. Тогда

$$\frac{\partial\varepsilon u}{\partial \overline{y}_1}=e_1, \quad \frac{\partial\varepsilon v}{\partial \overline{y}_2}=e_2, \quad \frac{\partial\varepsilon w}{\partial \overline{y}_3}=e_3 \tag{1.4}$$

с принятой точностью будут представлять компоненты малой деформации удлинения.

Вышеуказанные фиксированные положения деформаций нумеруем тремя индексами $(\alpha, \beta, \gamma)$, которые могут принимать значения $-m$,

$-(m-1), \cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots, n$, где целые положительные числа $m$ и $n$ могут быть определены, исходя из упругомеханических свойств конкретного материала и из точности поставленной задачи.

Область деформаций выделенного параллелепипеда, в пределах которой справедливы соотношения (1.1) и (1.2), нумеруем тем же номером $(\alpha, \beta, \gamma)$, какой имеют те фиксированные деформации, соответствующие напряжения для которых входят в эти соотношения.

Обозначая $\sigma^0_{ii} = B_i^{\alpha, \beta, \gamma}$, $\sigma_{ii} = \sigma_i^{\alpha, \beta, \gamma}$ и принимая во внимание (1.2) и (1.4), формулы (1.1) и (1.3) представим в виде

$$\begin{aligned} \sigma_1^{\alpha, \beta, \gamma} &= B_1^{\alpha, \beta, \gamma} + c_{11}^{\alpha, \beta, \gamma} e_1 + c_{12}^{\alpha, \beta, \gamma} e_2 + c_{13}^{\alpha, \beta, \gamma} e_3 \\ \sigma_2^{\alpha, \beta, \gamma} &= B_2^{\alpha, \beta, \gamma} + c_{21}^{\alpha, \beta, \gamma} e_1 + c_{22}^{\alpha, \beta, \gamma} e_2 + c_{23}^{\alpha, \beta, \gamma} e_3 \\ \sigma_3^{\alpha, \beta, \gamma} &= B_3^{\alpha, \beta, \gamma} + c_{31}^{\alpha, \beta, \gamma} e_1 + c_{32}^{\alpha, \beta, \gamma} e_2 + c_{33}^{\alpha, \beta, \gamma} e_3 \end{aligned} \tag{1.5}$$

$$\begin{aligned} c_{21}^{\alpha, \beta, \gamma} - c_{12}^{\alpha, \beta, \gamma} &= B_1^{\alpha, \beta, \gamma} - B_2^{\alpha, \beta, \gamma} \\ c_{32}^{\alpha, \beta, \gamma} - c_{23}^{\alpha, \beta, \gamma} &= B_2^{\alpha, \beta, \gamma} - B_3^{\alpha, \beta, \gamma} \\ c_{13}^{\alpha, \beta, \gamma} - c_{31}^{\alpha, \beta, \gamma} &= B_3^{\alpha, \beta, \gamma} - B_1^{\alpha, \beta, \gamma} \end{aligned} \tag{1.6}$$

где $-e \leqslant e_1, e_2, e_3 \leqslant e$.

В этой области с номером $(\alpha, \beta, \gamma)$ главные удлинения $\chi_1, \chi_2, \chi_3$ находятся в пределах

$$\begin{aligned} \chi^{(\alpha-1, \alpha)} &= \chi^{(\alpha)}(1-e) \leqslant \chi_1 \leqslant \chi^{(\alpha)}(1+e) = \chi^{(\alpha, \alpha+1)} \\ \chi^{(\beta-1, \beta)} &= \chi^{(\beta)}(1-e) \leqslant \chi_2 \leqslant \chi^{(\beta)}(1+e) = \chi^{(\beta, \beta+1)} \\ \chi^{(\gamma-1, \gamma)} &= \chi^{(\gamma)}(1-e) \leqslant \chi_3 \leqslant \chi^{(\gamma)}(1+e) = \chi^{(\gamma, \gamma+1)} \end{aligned} \tag{1.7}$$

а $e_1, e_2, e_3$ определяются выражениями

$$e_1 = \frac{\chi_1}{\chi^{(\alpha)}} - 1, \quad e_2 = \frac{\chi_2}{\chi^{(\beta)}} - 1, \quad e_3 = \frac{\chi_3}{\chi^{(\gamma)}} - 1 \tag{1.8}$$

где $\chi^{(\alpha)}, \chi^{(\beta)}, \chi^{(\gamma)}$ — главные удлинения фиксированного положения $(\alpha, \beta, \gamma)$ по направлениям $\overline{y}_1, \overline{y}_2, \overline{y}_3$ соответственно; $\chi^{(\alpha-1, \alpha)}$, $\chi^{(\beta-1, \beta)}$, $\chi^{(\gamma-1, \gamma)}$ — главные удлинения, соответствующие границам между смежными областями деформаций: $(\alpha-1, \beta, \gamma)$ и $(\alpha, \beta, \gamma)$, $(\alpha, \beta-1, \gamma)$ и $(\alpha, \beta, \gamma)$, $(\alpha, \beta, \gamma-1)$ и $(\alpha, \beta, \gamma)$ по направлениям $\overline{y}_1, \overline{y}_2, \overline{y}_3$ соответственно. Эти удлинения определяются следующим образом:

$$\begin{gathered} \chi^{(0)} = 1 \\ \chi^{(0, 1)} = 1 + e \\ \chi^{(1)} = 1 + e + e(1+e) = (1+e)^2 \\ \chi^{(1, 2)} = (1+e)^2 + e(1+e)^2 = (1+e)^3 \\ \chi^{(2)} = (1+e)^3 + e(1+e)^3 = (1+e)^4 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \chi^{(-1, 0)} = 1 - e \end{gathered}$$

$$\chi^{(-1)}=1-e-e(1-e)=(1-e)^2$$
$$\chi^{(-2,\,-1)}=(1-e)^2-e(1-e)^2=(1-e)^3$$
$$\chi^{(-2)}=(1-e)^3-e(1-e)^3=(1-e)^4$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\chi^{(k)}=(1+\delta_k e)^{2\delta_k k}$$
$$\chi^{(k-1,\,k)}=(1+\delta_{(2k-1)}e)^{\delta_{(2k-1)}(2k-1)}$$

где
$$\delta_k=\operatorname{sign} k \tag{1.9}$$

Если $W$—функция энергии деформации рассматриваемого материала, то постоянные $c_{ij}^{\alpha,\beta,\gamma}$, входящие в выражения (1.5), определяются следующим образом [6, 7]:

$$\begin{aligned}
c_{11}^{\alpha,\beta,\gamma} &= -B_1^{\alpha,\beta,\gamma}+2A\chi^{(\alpha)4}+2B\chi^{(\alpha)4}(\chi^{(\beta)2}+\chi^{(\gamma)2})^2+\\
&+2C\chi^{(\alpha)4}\chi^{(\beta)4}\chi^{(\gamma)4}+4D\chi^{(\alpha)4}\chi^{(\beta)2}\chi^{(\gamma)2}(\chi^{(\beta)2}+\chi^{(\gamma)2})+\\
&+4E\chi^{(\alpha)4}\chi^{(\beta)2}\chi^{(\gamma)2}+4F\chi^{(\alpha)4}(\chi^{(\beta)2}+\chi^{(\gamma)2})\\
c_{12}^{\alpha,\beta,\gamma} &= -\Phi\chi^{(\alpha)2}+\Psi\chi^{(\beta)2}(\chi^{(\beta)2}-\chi^{(\gamma)2})+p+4A\chi^{(\alpha)2}\chi^{(\beta)2}+\\
&+2B\chi^{(\alpha)2}\chi^{(\beta)2}(\chi^{(\beta)2}+\chi^{(\gamma)2})(\chi^{(\gamma)2}+\chi^{(\alpha)2})+2C\chi^{(\alpha)4}\chi^{(\beta)4}\chi^{(\gamma)4}+\\
&+2D\chi^{(\alpha)2}\chi^{(\beta)2}\chi^{(\gamma)2}(\chi^{(\beta)2}\chi^{(\gamma)2}+\chi^{(\gamma)2}\chi^{(\alpha)2}+2\chi^{(\alpha)2}\chi^{(\beta)2})+\\
&+2E\chi^{(\alpha)2}\chi^{(\beta)2}\chi^{(\gamma)2}(\chi^{(\alpha)2}+\chi^{(\beta)2})+2F\chi^{(\alpha)2}\chi^{(\beta)2}(\chi^{(\alpha)2}+\chi^{(\beta)2}+\chi^{(\gamma)2})
\end{aligned} \tag{1.10}$$

С помощью циклических перестановок $\chi^{(\alpha)}$, $\chi^{(\beta)}$, $\chi^{(\gamma)}$ и $B_1^{\alpha,\beta,\gamma}$, $B_2^{\alpha,\beta,\gamma}$, $B_3^{\alpha,\beta,\gamma}$ получаются соответственно выражения для $c_{22}^{\alpha,\beta,\gamma}$, $c_{33}^{\alpha,\beta,\gamma}$, $c_{23}^{\alpha,\beta,\gamma}$ и $c_{31}^{\alpha,\beta,\gamma}$.

Здесь

$$\begin{gathered}
\Phi=\frac{2}{\sqrt{I_3}}\frac{\partial W}{\partial I_1},\quad \Psi=\frac{2}{\sqrt{I_3}}\frac{\partial W}{\partial I_2},\quad p=2\sqrt{I_3}\frac{\partial W}{\partial I_3}\\
A=\frac{2}{\sqrt{I_3}}\frac{\partial^2 W}{\partial I_1^2},\quad B=\frac{2}{\sqrt{I_3}}\frac{\partial^2 W}{\partial I_2^2},\quad C=\frac{1}{\sqrt{I_3}}\frac{\partial^2 W}{\partial I_3^2}\\
D=\frac{2}{\sqrt{I_3}}\frac{\partial^2 W}{\partial I_2\partial I_3},\quad E=\frac{2}{\sqrt{I_3}}\frac{\partial^2 W}{\partial I_3\partial I_1},\quad F=\frac{2}{\sqrt{I_3}}\frac{\partial^2 W}{\partial I_1\partial I_2}
\end{gathered} \tag{1.11}$$

причем значения инвариантов $I_1$, $I_2$, $I_3$ и производных $W$ в выражениях (1.11) берутся для фиксированного положения ($\alpha$, $\beta$, $\gamma$).

В области номером (0, 0, 0) выражения (1.5) совпадают с законом Гука, так что

$$\begin{gathered}
B_1^{0,0,0}=B_2^{0,0,0}=B_3^{0,0,0}=0\\
c_{11}^{0,0,0}=c_{22}^{0,0,0}=c_{33}^{0,0,0}=\lambda_0+2\mu_0\\
c_{23}^{0,0,0}=c_{31}^{0,0,0}=c_{12}^{0,0,0}=c_{32}^{0,0,0}=c_{13}^{0,0,0}=c_{21}^{0,0,0}=\lambda_0
\end{gathered} \tag{1.12}$$

где $\lambda_0$ и $\mu_0$—упругие постоянные Ляме.

Таким образом, действующая связь между напряжениями и деформациями приближенно аппроксимируется кусочно линейным законом (1.5)—(1.12). При этом непрерывность напряжений при переходе от одной области к другой не соблюдается.

Однако, так как разница между действительными напряжениями, действующими на границах соседних областей, и соответствующими граничными напряжениями этих областей, полученными путем аппроксимации, малая, то разрыв соответствующих аппроксимированных напряжений на границах соседних областей тоже малый.

В произвольной системе координат $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ контрвариантные компоненты тензора напряжения $\tau^{ij}_{\alpha,\beta,\gamma}$ в зоне $(\alpha, \beta, \gamma)$ определяются выражением

$$\tau^{ij}_{\alpha,\beta,\gamma} = \frac{\partial\theta^i}{\partial\overline{\theta}_m}\frac{\partial\theta^j}{\partial\overline{\theta}_n}\sigma^{\alpha,\beta,\gamma}_{mn} \qquad (1.13)$$

причем вместо $e_1$, $e_2$, $e_3$ следует подставить

$$e_i = \frac{\partial\overline{\theta}_i}{\partial\theta^m}\frac{\partial\overline{\theta}_i}{\partial\theta^n}e^{mn} \qquad (1.14)$$

(по индексу $i$ не суммировать).

Заметим, что при решении задач в деформированном теле может возникнуть несколько участков, где напряжения и деформации связаны различными линейными выражениями. Тогда решение задачи затрудняется в связи с определением появившихся зон. Поэтому более практическое значение могут иметь те случаи, когда свойства материала позволяют диапазон деформаций разделить на не многие участки.

2. Упругие постоянные $c^{\alpha,\beta,\gamma}_{ij}$ могут быть определены из (1.10) лишь тогда, когда заранее определено выражение функции энергии деформации $W(I_1, I_2, I_3)$ (что не всегда возможно), на основании которого определяются производные $W$ по инвариантам в формулах (1.11). Кроме того, выражения (1.10) имеют довольно сложный вид и могут затруднять определение постоянных $c^{\alpha,\beta,\gamma}_{ij}$.

Разрыв напряжений на границах между соседними зонами тоже может усложнять решения задач и приводит к некоторой некорректности.

Определенным образом видоизменив выражения (1.5), постараемся найти кусочно линейную связь между напряжениями и деформациями так, чтобы они по возможности освободились от указанных недостатков.

Пусть в области $(\alpha, \beta, \gamma)$ напряжения определяются следующими линейными выражениями:

$$\begin{aligned}
\sigma_1^{\alpha,\beta,\gamma} &= B_1^{\alpha,\beta,\gamma} + b_{11}^{\alpha,\beta,\gamma}e_1 + b_{12}^{\alpha,\beta,\gamma}e_2 + b_{13}^{\alpha,\beta,\gamma}e_3\\
\sigma_2^{\alpha,\beta,\gamma} &= B_2^{\alpha,\beta,\gamma} + b_{21}^{\alpha,\beta,\gamma}e_1 + b_{22}^{\alpha,\beta,\gamma}e_2 + b_{23}^{\alpha,\beta,\gamma}e_3 \qquad (2.1)\\
\sigma_3^{\alpha,\beta,\gamma} &= B_3^{\alpha,\beta,\gamma} + b_{31}^{\alpha,\beta,\gamma}e_1 + b_{32}^{\alpha,\beta,\gamma}e_2 + b_{33}^{\alpha,\beta,\gamma}e_3
\end{aligned}$$

Здесь постоянные $b_{ij}^{\alpha,\beta,\gamma}$ в общем различаются от постоянных $c_{ij}^{\alpha,\beta,\gamma}$, входящих в (1.5).

В области (0, 0, 0) соблюдается закон Гука

$$b_{11}^{0,0,0} = b_{22}^{0,0,0} = b_{33}^{0,0,0} = \lambda_0 + 2\mu_0$$
$$b_{ij}^{0,0,0} = \lambda_0 \ (i \neq j; \ \ i, j = 1, 2, 3) \tag{2.2}$$
$$B_i^{0,0,0} = 0$$

Рассмотрим те области деформированного состояния, где от единицы отличается только одно главное удлинение фиксированного положения, то есть области с номерами $(\alpha, 0, 0)$, $(0, \beta, 0)$ и $(0, 0, \gamma)$. Пусть известны напряжения $B_i^{\alpha,0,0}$ фиксированного положения $(\alpha, 0, 0)$.

Из того условия, что направления $\overline{y}_2$ и $\overline{y}_3$ в этом частном случае равноправные, находим

$$B_2^{\alpha,0,0} = B_3^{\alpha,0,0}, \ \ b_{12}^{\alpha,0,0} = b_{13}^{\alpha,0,0}, \ \ b_{21}^{\alpha,0,0} = b_{31}^{\alpha,0,0}$$
$$b_{22}^{\alpha,0,0} = b_{33}^{\alpha,0,0}, \ \ b_{23}^{\alpha,0,0} = b_{32}^{\alpha,0,0} \tag{2.3}$$

Когда в рассматриваемой области относительное удлинение $e_1$ по отношению к фиксированному положению $(\alpha, 0, 0)$ принимает значение $e_1 = -e$, то это состояние деформаций является граничным между областями $(\alpha, 0, 0)$ и $(\alpha-1, 0, 0)$. Тогда в области $(\alpha-1, 0, 0)$, $e_1 = e$.

Принимая, что напряжения непрерывны на границе указанных областей, находим

$$B_1^{\alpha,0,0} - b_{11}^{\alpha,0,0} e + b_{12}^{\alpha,0,0}(e_2 + e_3) = B_1^{\alpha-1,0,0} + b_{11}^{\alpha-1,0,0} e + b_{12}^{\alpha-1,0,0}(e_2 + e_3)$$
$$B_2^{\alpha,0,0} - b_{21}^{\alpha,0,0} e + b_{22}^{\alpha,0,0} e_2 + b_{23}^{\alpha,0,0} e_3 = B_2^{\alpha-1,0,0} + b_{21}^{\alpha-1,0,0} e +$$
$$+ b_{22}^{\alpha-1,0,0} e_2 + b_{23}^{\alpha-1,0,0} e_3 \tag{2.4}$$

Отсюда, применяя метод индукции, получим

$$b_{12}^{\alpha,0,0} = b_{12}^{\alpha-1,0,0} = b_{12}^{\alpha-2,0,0} = b_{12}^{\alpha+1,0,0} = \cdots = b_{12}^{0,0,0} = \lambda_0$$
$$b_{23}^{\alpha,0,0} = b_{23}^{\alpha-1,0,0} = b_{23}^{\alpha-2,0,0} = b_{23}^{\alpha+1,0,0} = \cdots = b_{23}^{0,0,0} = \lambda_0$$
$$b_{22}^{\alpha,0,0} = b_{22}^{\alpha-1,0,0} = b_{22}^{\alpha-2,0,0} = b_{22}^{\alpha+1,0,0} = \cdots = b_{22}^{0,0,0} = \lambda_0 + 2\mu_0$$
$$b_{11}^{\alpha,0,0} = \frac{1}{e}\left(B_1^{\alpha,0,0} - B_1^{\alpha-1,0,0}\right) - b_{11}^{\alpha-1,0,0} =$$
$$= \frac{1}{e}\left(B_1^{\alpha,0,0} - 2B_1^{\alpha-1,0,0} + B_1^{\alpha-2,0,0}\right) + b_{11}^{\alpha-2,0,0} = \tag{2.5}$$
$$= \frac{1}{e}\left(B_1^{\alpha,0,0} - 2B_1^{\alpha-1,0,0} + 2B_1^{\alpha-2,0,0} - B_1^{\alpha-3,0,0}\right) - b_{11}^{\alpha-3,0,0} = \cdots$$

$$\cdots = -\frac{1}{e}\left(B_1^{\alpha,0,0} - B_1^{\alpha+1,0,0}\right) - b_{11}^{\alpha+1,0,0} =$$

$$= -\frac{1}{e}\left(B_1^{\alpha,0,0} - 2B_1^{\alpha+1,0,0} + B_1^{\alpha+2,0,0}\right) + b_{11}^{\alpha+2,0,0}$$

$$b_{21}^{\alpha,0,0} = \frac{1}{e}\left(B_2^{\alpha,0,0} - B_2^{\alpha-1,0,0}\right) - b_{21}^{\alpha-1,0,0} =$$

$$= \frac{1}{e}\left(B_2^{\alpha,0,0} - 2B_2^{\alpha-1,0,0} + B_2^{\alpha-2,0,0}\right) - b_{21}^{\alpha-1,0,0} =$$

$$= -\frac{1}{e}\left(B_2^{\alpha,0,0} - B_2^{\alpha+1,0,0}\right) - b_{21}^{\alpha+1,0,0}$$

Таким образом, принимая во внимание (2.3), из (2.5) определяем постоянные $b_{ij}^{\alpha,0,0}$

$$b_{12}^{\alpha,0,0} = b_{13}^{\alpha,0,0} = b_{23}^{\alpha,0,0} = b_{32}^{\alpha,0,0} = \lambda_0$$

$$b_{22}^{\alpha,0,0} = b_{33}^{\alpha,0,0} = \lambda_0 + 2\mu_0$$

$$b_{11}^{\alpha,0,0} = \frac{\delta_\alpha}{e}\left[2\sum_{k=0}^{\alpha}(-1)^k B_1^{\alpha-k,0,0} - B_1^{\alpha,0,0}\right] + (-1)^\alpha(\lambda_0 + 2\mu_0) \qquad (2.6)$$

$$b_{21}^{\alpha,0,0} = b_{31}^{\alpha,0,0} = \frac{\delta_\alpha}{e}\left[2\sum_{k=0}^{\alpha}(-1)^k B_2^{\alpha-k,0,0} - B_2^{\alpha,0,0}\right] + (-1)^\alpha\lambda_0$$

Постоянные $b_{ij}^{0,\beta,0}$ и $b_{ij}^{0,0,\gamma}$, соответствующие областям $(0, \beta, 0)$ и $(0, 0, \gamma)$ определяются аналогичным путем и могут быть получены из (2.6) с помощью круговой перестановки индексов $(\alpha, 0, 0)$, $(0, \beta, 0)$, $(0, 0, \gamma)$; 1, 2, 3 и $\alpha$, $\beta$, $\gamma$.

Рассмотрим области $(0, \beta, \gamma)$, $(\alpha, 0, \gamma)$ и $(\alpha, \beta, 0)$, то есть области, где одно из главных удлинений фиксированного положения равно единице.

Состояние, когда в области $(0, \beta, \gamma)$ $e_2 = -e$, является граничным между областями $(0, \beta, \gamma)$ и $(0, \beta-1, \gamma)$. В этом состоянии в области $(0, \beta-1, \gamma)$ $e_2 = e$. Принимая, что на границе этих областей напряжения не имеют разрывов, когда в обеих областях $e_3 = 0$, получаем

$$B_i^{0,\beta,\gamma} + b_{i1}^{0,\beta,\gamma}e_1 - b_{i2}^{0,\beta,\gamma}e = B_i^{0,\beta-1,\gamma} + b_{i1}^{0,\beta-1,\gamma}e_1 + b_{i2}^{0,\beta-1,\gamma}e \qquad (2.7)$$

В граничном положении областей $(0, \beta, \gamma)$ и $(0, \beta, \gamma-1)$ принимаем, что напряжения не разрываются, когда в обеих областях $e_2 = 0$

$$B_i^{0,\beta,\gamma} + b_{i1}^{0,\beta,\gamma}e_1 - b_{i3}^{0,\beta,\gamma}e = B_i^{0,\beta,\gamma-1} + b_{i1}^{0,\beta,\gamma-1}e_1 + b_{i3}^{0,\beta,\gamma-1}e \qquad (2.8)$$

Из (2.7) и (2.8) следует

$$b_{i1}^{0,\beta,\gamma} = b_{i1}^{0,\beta-1,\gamma} = b_{i1}^{0,\beta+1,\gamma} = b_{i1}^{0,\beta,\gamma-1} = b_{i1}^{0,\beta,\gamma+1} = \cdots = b_{i1}^{0,0,\gamma} = b_{i1}^{0,\beta,0}$$

$$b_{i2}^{0,\beta,\gamma}=\frac{1}{e}(B_i^{0,\beta,\gamma}-B_i^{0,\beta-1,\gamma})-b_{i2}^{0,\beta-1,\gamma}=$$

$$=-\frac{1}{e}(B_i^{0,\beta,\gamma}-B_i^{0,\beta+1,\gamma})-b^{0,\beta+1,\gamma}=\cdots \tag{2.9}$$

$$\cdots=\frac{\delta_\beta}{e}\left[2\sum_{k=0}^{\beta}(-1)^k B_i^{0,\beta-k,\gamma}-B_i^{0,\beta,\gamma}-(-1)^\beta B_i^{0,0,\gamma}\right]+(-1)^\beta b_{i2}^{0,0,\gamma}$$

$$b_{i3}^{0,\beta,\gamma}=\frac{\delta_\gamma}{e}\left[2\sum_{k=0}^{\gamma}(-1)^k B_i^{0,\beta,\gamma-k}-B_i^{0,\beta,\gamma}-(-1)^\gamma B_i^{0,\beta,0}\right]+(-1)^\gamma b_{i3}^{0,\beta,0}$$

Подставляя значения постоянных $b_{ij}^{0,0,\gamma}$ и $b_{ij}^{0,\beta,0}$, входящих в (2.6), получим

$$b_{11}^{0,\beta,\gamma}=\lambda_0+2\mu,\quad b_{21}^{0,\beta,\gamma}=b_{31}^{0,\beta,\gamma}=\lambda_0$$

$$b_{12}^{0,\beta,\gamma}=\frac{\delta_\beta}{e}\left[2\sum_{k=0}^{\beta}(-1)^k B_1^{0,\beta-k,\gamma}-B_1^{0,\beta,\gamma}-(-1)^\beta B_1^{0,0,\gamma}\right]+(-1)^\beta\lambda_0$$

$$b_{13}^{0,\beta,\gamma}=\frac{\delta_\gamma}{e}\left[2\sum_{k=0}^{\gamma}(-1)^k B_1^{0,\beta,\gamma-k}-B_1^{0,\beta,\gamma}-(-1)^\gamma B_1^{0,\beta,0}\right]+(-1)^\gamma\lambda_0$$

$$b_{22}^{0,\beta,\gamma}=\frac{\delta_\beta}{e}\left[2\sum_{k=0}^{\beta}(-1)^k B_2^{0,\beta-k,\gamma}-B_2^{0,\beta,\gamma}-(-1)^\beta B_2^{0,0,\gamma}\right]+$$

$$+(-1)^\beta(\lambda_0+2\mu_0) \tag{2.10}$$

$$b_{23}^{0,\beta,\gamma}=\frac{\delta_\gamma}{e}\left[2\sum_{k=0}^{\gamma}(-1)^k B_2^{0,\beta,\gamma-k}-B_2^{0,\beta,\gamma}-(-1)^\gamma B_2^{0,\beta,0}\right]+(-1)^\gamma\lambda_0$$

$$b_{32}^{0,\beta,\gamma}=\frac{\delta_\beta}{e}\left[2\sum_{k=0}^{\beta}(-1)^k B_3^{0,\beta-k,\gamma}-B_3^{0,\beta,\gamma}-(-1)^\beta B_3^{0,0,\gamma}\right]+(-1)^\beta\lambda_0$$

$$b_{23}^{0,\beta,\gamma}=\frac{\delta_\gamma}{e}\left[2\sum_{k=0}^{\gamma}(-1)^k B_3^{0,\beta,\gamma-k}-B_3^{0,\beta,\gamma}-(-1)^\gamma B_3^{0,\beta,0}\right]+$$

$$+(-1)^\gamma(\lambda_0+2\mu_0)$$

Постоянные $b_{ij}^{\alpha,0,\gamma}$ и $b_{ij}^{\alpha,\beta,0}$ для соответствующих областей получаются из (2.10) с помощью круговой перестановки индексов $(0,\beta,\gamma)$, $(\alpha,0,\gamma)$, $(\alpha,\beta,0)$; 1, 2, 3 и $\alpha$, $\beta$, $\gamma$.

В общем случае постоянные $b_{ij}^{\alpha,\beta,\gamma}$ определяем следующим образом. В граничном состоянии областей $(\alpha,\beta,\gamma)$ и $(\alpha-1,\beta,\gamma)$, то есть когда в области $(\alpha,\beta,\gamma)$, $e_1=-e$, а в $(\alpha-1,\beta,\gamma)$ $e_1=e$, принимаем, что напряжения не имеют разрыва, когда в обеих областях $e_2=e_3=0$.

$$B_i^{\alpha,\beta,\gamma}-eb_{i1}^{\alpha,\beta,\gamma}=B_i^{\alpha-1,\beta,\gamma}+eb_{i1}^{\alpha-1,\beta,\gamma} \tag{2.11}$$

откуда, применяя метод индукции, находим

$$b_{i1}^{\alpha, \beta, \gamma} = \frac{\delta_\alpha}{e}\left[ 2\sum_{k=0}^{\alpha}(-1)^k B_i^{\alpha-k, \beta, \gamma} - B_i^{\alpha, \beta, \gamma} - (-1)^\alpha B_i^{0, \beta, \gamma}\right] + (-1)^\alpha b_{i1}^{0, \beta, \gamma} \tag{2.12}$$

Принимаем, что в граничном состоянии областей $(\alpha, \beta, \gamma)$ и $(\alpha, \beta-1, \gamma)$ напряжения не претерпевают разрыва, когда $e_1=e_3=0$, а в граничном состоянии областей $(\alpha, \beta, \gamma)$ и $(\alpha, \beta, \gamma-1)$, когда $e_1=e_2=0$. Тогда аналогичным образом найдем

$$b_{i2}^{\alpha, \beta, \gamma} = \frac{\delta_\beta}{e}\left[ 2\sum_{k=0}^{\beta}(-1)^k B_i^{\alpha, \beta-k, \gamma} - B_i^{\alpha, \beta, \gamma} - (-1)^\beta B_i^{\alpha, 0, \gamma}\right] + (-1)^\beta b_{i2}^{\alpha, 0, \gamma}$$

$$b_{i3}^{\alpha, \beta, \gamma} = \frac{\delta_\gamma}{e}\left[ 2\sum_{k=0}^{\gamma}(-1)^k B_i^{\alpha, \beta, \gamma-k} - B_i^{\alpha, \beta, \gamma} - (-1)^\gamma B_i^{\alpha, \beta, 0}\right] + (-1)^\gamma b_{i3}^{\alpha, \beta, 0} \tag{2.13}$$

где постоянные $b_{i1}^{0, \beta, \gamma}$, $b_{i2}^{\alpha, 0, \gamma}$, $b_{i3}^{\alpha, \beta, 0}$ определяются из (2.10), либо из аналогичных с (2.10) выражений, полученных путем круговой перестановки индексов

$$b_{11}^{0, \beta, \gamma} = b_{22}^{\alpha, 0, \gamma} = b_{33}^{\alpha, \beta, 0} = \lambda_0 + 2\mu_0$$

$$b_{21}^{0, \beta, \gamma} = b_{31}^{0, \beta, \gamma} = b_{12}^{\alpha, 0, \gamma} = b_{32}^{\alpha, 0, \gamma} = b_{13}^{\alpha, \beta, 0} = b_{23}^{\alpha, \beta, 0} = \lambda_0 \tag{2.14}$$

Заметим, что непрерывность напряжений при переходе от одной области в другую соблюдается только в пределах зон $(\alpha, 0, 0)$, $(0, \beta, 0)$, $(0, 0, \gamma)$. В остальных случаях напряжения непрерывны только в указанных местах границы.

Если теоретическим, либо экспериментальным путем определены напряжения фиксированных положений $B_{ij}^{\alpha, \beta, \gamma}$, то указанным путем могут определяться упругие постоянные всех областей.

В произвольной системе координат применяются формулы (1.13) и (1.14).

3. Рассмотрим случай, когда функция энергии деформации выражается законом Мурнагана

$$W = A_1 J_2 + A_2 J_1^2 + A_3 J_1 J_2 + A_4 J_1^3 + A_5 J_3 \tag{3.1}$$

где

$$J_1 = I_1 - 3, \quad J_2 = I_2 - 2I_1 + 3, \quad J_3 = I_3 - I_2 + I_1 - 1$$

$$I_1 = g^{rs} G_{rs}, \quad I_2 = g_{rs} G^{rs} I_3, \quad I_3 = \frac{G}{g} \tag{3.2}$$

$$G = |G_{ij}|, \quad g = |g_{ij}|$$

$I_1, I_2, I_3$ и $J_1$, $J_2$, $J_3$—инварианты деформации $G_{ij}$, $G^{ij}$, $g_{ij}$, $g^{ij}$—ковариантные и контрвариантные компоненты метрических тензоров деформированного и недеформированного состояний соответственно относительно подвижной системы координат $\theta^i$ $(i=1, 2, 3)$.

Разделим диапазон деформации в каком-то направлении на три участка:

а) нулевой участок — $(1-e)=\gamma^{(-1,\,0)} \leqslant \gamma \leqslant \gamma^{(0,\,1)}=(1+e)$,
б) участок № 1 — $(1+e)=\gamma^{(0,\,1)} \leqslant \gamma \leqslant \gamma^{(1,\,2)}=(1+e)^3=\gamma^{\max}$,
в) участок № $(-1)$ — $\gamma^{\min}=(1-e)^3=\gamma^{(-2,\,-1)} \leqslant \gamma \leqslant \gamma^{(-1,\,0)}=(1-e)$,

где $\gamma$—удлинение в каком-то направлении.

Если при деформации все главные удлинения находятся в нулевом участке, то имеем область деформации с номером (0, 0, 0), где справедлив закон Гука

$$\sigma_i^{0,\,0,\,0}=\lambda_0(e_1+e_2+e_3)+2\mu_0 e_i \tag{3.3}$$

В этой области выражение (3.1) приводится к виду

$$W=A_1 J_2+A_2 J_1^2 \tag{3.4}$$

где

$$A_1=-\frac{1}{2}\mu_0, \qquad A_2=\frac{1}{8}(\lambda_0+2\mu_0)$$

откуда

$$\mu_0=-2A_1, \quad \lambda_0=4(2A_1+A_2) \tag{3.5}$$

Для определения остальных упругих постоянных, входящих в выражения линейных зависимостей между напряжениями и деформациями различных областей, необходимо определить напряжения $B_i$ фиксированных положений.

Решение задачи однородного растяжения изотропного тела при больших деформациях дано в работе [7]

$$\begin{aligned}\sigma_1&=\gamma_1^2\Phi+\gamma_1^2(\gamma_2^2+\gamma_3^2)\Psi+p\\ \sigma_2&=\gamma_2^2\Phi+\gamma_2^2(\gamma_3^2+\gamma_1^2)\Psi+p\\ \sigma_3&=\gamma_3^2\Phi+\gamma_3^2(\gamma_1^2+\gamma_2^2)\Psi+p\end{aligned} \tag{3.6}$$

где $\Phi$, $\Psi$ и $p$ определяются из (1.11) и (3.1)

$$\Phi=\frac{2}{\sqrt{I_3}}[A_5-2A_1+2(A_2-A_3)(I_1-3)+A_3(I_2-3)+3A_4(I_1-3)^2]$$

$$\Psi=\frac{2}{\sqrt{I_3}}[A_1-A_5+A_3(I_1-3)], \quad p=2A_5\sqrt{I_3} \tag{3.7}$$

где

$$\begin{aligned}I_1&=\gamma_1^2+\gamma_2^2+\gamma_3^2\\ I_2&=\gamma_2^2\gamma_3^2+\gamma_3^2\gamma_1^2+\gamma_1^2\gamma_2^2\\ I_3&=\gamma_1^2\gamma_2^2\gamma_3^2\end{aligned}$$

Кроме нулевой области, в деформированном теле, в зависимости от значений главных удлинений $\gamma_i$, могут возникать следующие области.

Если одно из главных удлинений, например $\gamma_1$, находится в участке № 1, а остальные два—в нулевом участке, то имеем

$$\begin{aligned}
\sigma_1^{1,0,0} &= B_1^{1,0,0} + b_{11}^{1,0,0} e_1 + \lambda_0(e_2 + e_3) \\
\sigma_2^{1,0,0} &= B_2^{1,0,0} + b_{21}^{1,0,0} e_1 + (\lambda_0 + 2\mu_0) e_2 + \lambda_0 e_3 \\
\sigma_3^{1,0,0} &= B_2^{1,0,0} + b_{21}^{1,0,0} e_1 + \lambda_0 e_2 + (\lambda_0 + 2\mu_0) e_3
\end{aligned} \tag{3.8}$$

где

$$\begin{aligned}
b_{11}^{1,0,0} &= \frac{1}{e} B_1^{1,0,0} - \lambda_0 - 2\mu_0 \\
b_{21}^{1,0,0} &= \frac{1}{e} B_2^{1,0,0} - \lambda_0
\end{aligned} \tag{3.9}$$

$B_1^{1,0,0}$ и $B_2^{1,0,0}$ определяются из (3.6) после подстановки $\lambda_1 = \lambda^{(1)} = (1+e)^2$; $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$.

Выражения напряжений для областей (0, 1, 0), (0, 0, 1) получаем из (3.8) и (3.9) с помощью круговых перестановок индексов (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1) и 1, 2, 3. Если в (3.8) вместо $B_i^{1,0,0}$, $b_{11}^{1,0,0}$ и $b_{21}^{1,0,0}$ подставить $B_i^{-1,0,0}$, $b_{11}^{-1,0,0}$ и $b_{21}^{-1,0,0}$ соответственно, то получим выражения напряжений $\sigma_i^{-1,0,0}$ $(i = 1, 2, 3)$ для области $(-1, 0, 0)$, причем

$$\begin{aligned}
b_{11}^{-1,0,0} &= -\frac{1}{e} B_1^{1,0,0} - \lambda_0 - 2\mu_0 \\
b_{21}^{-1,0,0} &= -\frac{1}{e} B_2^{-1,0,0} - \lambda_0
\end{aligned} \tag{3.10}$$

а при определении $B_i^{-1,0,0}$ в выражения (3.6) подставляем $\lambda_1 = \lambda^{(-1)} = (1-e)^2$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$.

Если два из главных удлинений, например $\lambda_2$ и $\lambda_3$, находятся в участке № 1, а $\lambda_1$—в нулевом участке, то имеем область (0, 1, 1). В этой области напряжения определяются

$$\begin{aligned}
\sigma_1^{0,1,1} &= (\lambda_0 + 2\mu_0) e_1 + b_{12}^{0,1,1} e_2 + b_{13}^{0,1,1} e_3 \\
\sigma_2^{0,1,1} &= \lambda_0 e_1 + b_{22}^{0,1,1} e_2 + b_{23}^{0,1,1} e_3 \\
\sigma_3^{0,1,1} &= \lambda_0 e_1 + b_{32}^{0,1,1} e_2 + b_{33}^{0,1,1} e_3
\end{aligned} \tag{3.11}$$

где

$$\begin{aligned}
b_{12}^{0,1,1} &= \frac{1}{e} (B_1^{0,1,1} - B_1^{0,0,1}) - \lambda_0 \\
b_{13}^{0,1,1} &= \frac{1}{e} (B_1^{0,1,1} - B_1^{0,1,0}) - \lambda_0 \\
b_{22}^{0,1,1} &= \frac{1}{e} (B_2^{0,1,1} - B_2^{0,0,1}) - \lambda_0 - 2\mu_0 \\
b_{23}^{0,1,1} &= \frac{1}{e} (B_2^{0,1,1} - B_2^{0,1,0}) - \lambda_0
\end{aligned} \tag{3.12}$$

$$b_{32}^{0,1,1}=\frac{1}{e}\left(B_3^{0,1,1}-B_3^{0,0,1}\right)-\lambda_0$$

$$b_{33}^{0,1,1}=\frac{1}{e}\left(B_3^{0,1,1}-B_3^{0,1,0}\right)-\lambda_0-2\mu_0$$

Для определения постоянных $B_i^{0,1,1}$, $B_i^{0,0,1}$ и $B_i^{0,1,0}$ подставляем в (3.6) значения $\lambda_1=1$, $\lambda_2=\lambda_3=(1+e)^2$; $\lambda_1=\lambda_2=1$, $\lambda_3=(1+e)^2$ и $\lambda_1=\lambda_3=1$, $\lambda_2=(1+e)^2$ соответственно.

Выражения напряжений в областях $(0, -1, 1)$, $(0, 1, -1)$, $(0, -1, -1)$ имеют вид (3.11) с той разницей, что вместо постоянных $b_{ij}^{0,1,1}$ фигурируют постоянные $b_{ij}^{0,-1,1}$, $b_{ij}^{0,1,-1}$, $b_{ij}^{0,-1,-1}$ соответственно, которые определяются аналогичным образом.

В области $(1, 1, -1)$, где $\lambda_1$ и $\lambda_2$ находятся в участке № 1, а $\lambda_3$ в № $(-1)$, напряжения определяются выражениями

$$\sigma_i^{1,1,-1}=B_i^{1,1,-1}+b_{ik}^{1,1,-1}e_k \tag{3.13}$$

где на основании (2.12) и (2.13)

$$\begin{aligned}
b_{i1}^{1,1,-1}&=\frac{1}{e}\left(B_i^{1,1,-1}-B_i^{0,1,-1}\right)-b_{i1}^{0,1,-1}\\
b_{i2}^{1,1,-1}&=\frac{1}{e}\left(B_i^{1,1,-1}-B_i^{1,0,-1}\right)-b_{i2}^{1,0,-1}\\
b_{i3}^{1,1,-1}&=-\frac{1}{e}\left(B_i^{1,1,-1}-B_i^{1,1,0}\right)-b_{i3}^{1,1,0}
\end{aligned} \tag{3.14}$$

где

$$b_{11}^{0,1,-1}=b_{22}^{1,0,-1}=b_{33}^{1,1,0}=\lambda_0+2\mu_0$$

$$b_{21}^{0,1,-1}=b_{31}^{0,1,-1}=b_{12}^{1,0,-1}=b_{32}^{1,0,-1}=b_{13}^{1,0,-1}=b_{23}^{1,0,-1}=\lambda_0$$

Напряжения остальных областей, где все главные удлинения находятся в участках № 1 и № $(-1)$, определяются аналогичным образом.

Институт механики
АН Армянской ССР

Поступила 24 V 1972

Ռ. Ե. ՄԿՐՏՉՅԱՆ

ԼԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ԵՎ ԴԵՖՈՐՄԱՑԻԱՆԵՐԻ ՄԻՋԵՎ ԿՏՈՐ ԱՌ ԿՏՈՐ ԳԾԱՅԻՆ ԿԱՊԻ ՕՐԵՆՔԸ ՄԵԾ ԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ԴԵՖՈՐՄԱՑԻԱՆԵՐԻ ԴԵՊՔՈՒՄ

Ամփոփում

*Հիմնվելով այն փաստի վրա, որ երբ համասեռ ձողից առաջացած մեծ դեֆորմացիաներին ավելացնում ենք փոքր դեֆորմացիաներ այս լարումնե-*

րի մեծ և փոքր դեֆորմացիաների մեջ կապը ստացվում է գծային, առաջարկվում է վերջավոր դեֆորմացիաների առկայության դեպքում սեղմելի նյութի լարումների և դեֆորմացիաների միջև ֆիզիկական կապի արտահայտելու մոտավոր մեթոդ։ Այդ մեթոդի էությունը կայանում է նրանում, որ լարումների և դեֆորմացիաների միջև ընդունված ֆիզիկական կապը մոտավոր կերպով արտահայտվում է կտոր առ կտոր գծային ֆունկցիաների օգնությամբ։

Դեֆորմացված մարմնից, դեֆորմացիաների գլխավոր ուղղություններով անջատված էլեմենտար ուղղանկյուն զուգահեռանիստի պրակտիկորեն հնարավոր դեֆորմացիաների ամբողջ միջակայքը բաժանվում է այնպիսի փոքր մասերի, որոնցից յուրաքանչյուրում կարելի է օգտագործել լարումների և դեֆորմացիաների միջև կապի գծային օրենք։

Բերվում է այդ մասերում առաձգական հաստատունները որոշելու եղանակ։

Որպես օրինակ դիտարկվում է այն դեպքը, երբ դեֆորմացիաների էներգիայի ֆունկցիան արտահայտվում է Մուրնագանի օրենքով։

## THE PIECEWISE LINEAR LAW OF RELATIONS BETWEEN STRESSES AND STRAINS FOR LARGE DEFORMATIONS

R. E. MKRTCHIAN

S u m m a r y

In view of the fact that, when small deformations are superposed on large deformations arising on uniform extension, the dependence between the alterations in stresses and small deformations is linear, an approximate method is suggested for finding a physical relation between stresses and strains of compressible material under finite deformations. The essence of the method lies in the fact that the physical law of stress-strain relations is approximately substituted by piecewise linear functions.

All the practically possible range of deformations of an elementary cuboid, cut out of a deformed elastic body, is divided, in the principal directions of deformations, into such small regions where the linear law of relation between stresses and strains can be applied.

The method to define the elastic constants of these regions is suggested.

An example is considered where the strain energy function is expressed by the Murnaghan law.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Лурье А. И.* Теория упругости. Изд-во „Наука", М., 1970.
2. *Савин Г. Н., Койфман Ю. И.* Общая нелинейная теория упругости (обзор) Прикл. механика, т. VI, в 12, 1970.

3. *Каудерер Г.* Нелинейная механика. Изд-во ИЛ, М., 1961.
4. *Wesolowski Z.* Piecewise Linear Elastic Material. Arch. Mech. Stos., 3, 22, 1970.
5. *Ишлинский А. Ю.* Общая теория пластичности с линейным упрочнением. Украинский математ. ж., т. VI, № 3, 1954.
6. *Green A. E., Rivlin R. S., Shield R. T.* General Theory of Smoll Elastic Deformations Superposed on Finite Elastic Deformations. Proc. Roy. Soc. of London, ser. A, vol. 211, 1952, 128.
7. *Green A. E., Zerna W.* Theoretical Elasticity. Clarendon Press, Oxford, 1954.