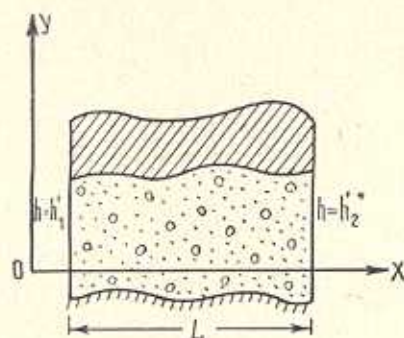


Р. М. БАРСЕГЯН

## О НЕУСТАНОВИВШЕЙСЯ ОДНОМЕРНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ ЖИДКОСТИ В НЕОДНОРОДНОМ ПЛАСТЕ

Рассматриваются задачи теории неустановившейся фильтрации жидкости в прямоугольном неоднородном пласте, заключенном между двумя прямолинейными параллельными галереями, расстояние между которыми равно  $L$ , а напоры на них постоянны и равны соответственно  $h_1'$  и  $h_2'$ .



Фиг. 1

При напорной неустановившейся фильтрации в одном неоднородном по коэффициенту фильтрации и по мощности пласте, вертикальный разрез которого показан на фиг. 1, искомый напор  $h(x, t)$  удовлетворяет следующему дифференциальному уравнению:

$$\lambda T(x) \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ K(x) T(x) \frac{\partial h}{\partial x} \right] \quad (1)$$

где  $\lambda$  — коэффициент упругости напорного пласта,  $K(x)$  и  $T(x)$  — соответственно переменные коэффициент фильтрации и мощность этого пласта.

С помощью преобразования

$$z = \varphi_1(x) = \int_{x_0}^x \frac{dx}{K(x) T(x)}$$

принимая существование обратного преобразования  $x = \varphi_1^{-1}(z)$ , уравнение (1) приводим к уравнению

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \psi_1(z) \frac{\partial^2 h}{\partial z^2}$$

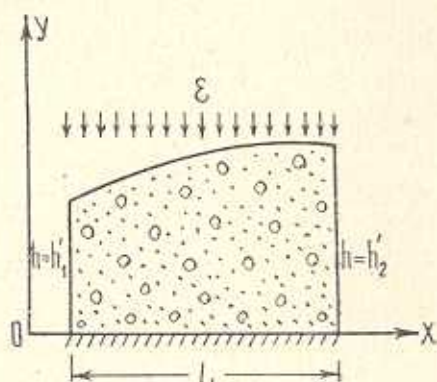
где

$$\psi_1(z) = \frac{1}{\lambda K[\psi_1'(z)] T^2[\psi_1'(z)]} = \frac{\varphi_1'[\psi_1'(z)]}{\lambda T[\psi_1'(z)]}$$

При безнапорной неустановившейся одномерной фильтрации (фиг. 2) глубина фильтрационного потока  $h(x, t)$  в общем случае удовлетворяет следующему уравнению:

$$\lambda_0 \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ h K(x) \frac{\partial h}{\partial x} \right] + \varepsilon(x, t) \quad (2)$$

где  $\varepsilon(x, t)$  — инфильтрация,  $\lambda_0$  — коэффициент водоотдачи (недостатка насыщения) пласта, который в общем случае является функцией от глубины фильтрационного потока, то есть  $\lambda_0 = \lambda_0(h)$ . Но в практике



Фиг. 2

обычно принимается  $\lambda_0 = \text{const}$ , а глубина фильтрационного потока  $h$  в квадратных скобках выражения (2) осредняется, то есть  $h$  заменяется некоторым средним значением  $h_{cp}$ . Этим нелинейное уравнение аппроксимируется следующим линейным уравнением:

$$\lambda_0 \frac{\partial h}{\partial t} = h_{cp} \frac{\partial}{\partial x} \left[ K(x) \frac{\partial h}{\partial x} \right] + \varepsilon(x, t) \quad (3)$$

С помощью преобразования  $z = \varphi_2(x) = \int_{x_0}^x \frac{dx}{K(x)}$ , принимая существование обратного преобразования  $x = \psi_2'(z)$ , получим уравнение

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \psi_2(z) \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} + \varepsilon_0(z, t) \quad (4)$$

где

$$\psi_2(z) = \frac{h_{\text{ср}}}{\lambda_0 K[\psi_2(z)]} \quad \text{и} \quad \varepsilon_0(z, t) = \frac{1}{\lambda_0} \varepsilon[\psi_2(z), t]$$

Таким образом, задачи напорной и безнапорной (после линеаризации уравнения движения в последнем случае, а также при отсутствии инфильтрации) неустановившейся неоднородной фильтрации приводятся к решению подобных уравнений.

Рассмотрим напорную неустановившуюся фильтрацию в одном неоднородном пласте с постоянной мощностью ( $T = \text{const}$ ) и с переменным коэффициентом фильтрации  $K(x) = ax + b$ . Тогда из уравнения (1) получим следующее уравнение:

$$\lambda T \frac{\partial h}{\partial t} = T \frac{\partial}{\partial x} \left[ (ax + b) \frac{\partial h}{\partial x} \right]$$

которое с помощью преобразования

$$z = \frac{\lambda}{a} \ln(ax + b)$$

приводится к уравнению

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \lambda e^{-\frac{a}{\lambda} z} \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} \quad (5)$$

Отметим, что к решению подобного уравнения приводится задача о неустановившейся фильтрации в одном однородном пласте с постоянным коэффициентом фильтрации ( $K = \text{const}$ ) и с переменной мощностью  $T(x) = a_1 x + b_1$ .

Коэффициенты  $a$ ,  $b$ ,  $a_1$ ,  $b_1$  в вышеприведенных уравнениях — постоянные. Отметим также, что эти задачи часто встречаются в практике фильтрационных расчетов, но, как правило, они решаются после осреднения коэффициента фильтрации и мощности пласта. Так как такие осреднения не всегда допустимы, то становится ясным, какую практическую важность приобретают точные решения задач с переменными мощностью и коэффициентом фильтрации водоносного пласта.

Таким образом, следует рассмотреть вопрос решения уравнения

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \lambda e^{-\gamma z} \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} \quad (6)$$

которое представляет собой дифференциальное уравнение движения жидкости для следующих случаев:

1) напорная фильтрация в одном пласте, соответствующая уравнению (1) при  $K(x) = ax + b$ ,  $T = \text{const}$ , замене переменного  $z = \frac{1}{a} \ln(ax + b)$  и обозначениях  $\lambda = \frac{1}{\lambda}$ ,  $\gamma = a$ ;

2) напорная фильтрация в одном пласте при  $K = \text{const}$ ,  $T(x) = a_1x + b_1$ , преобразовании  $z = \frac{1}{a_1} \ln(a_1x + b_1)$  и обозначениях  $\sigma = \frac{K}{\lambda}$ ,  $\gamma = 2a_1$ ;

3) безнапорная фильтрация, соответствующая уравнению (3) при  $\varepsilon(x, t) = 0$ ,  $K(x) = a'x + b'$ , преобразовании  $z = \frac{1}{a'} \ln(a'x + b')$  и при обозначениях  $\sigma = \frac{h_{cp}}{h_0}$ ,  $\gamma = a'$ .

Найдем решение уравнения (6) для граничных условий первого рода

$$h|_{z=0} = h_1, \quad h|_{z=l} = h_2$$

замещающих условия  $h|_{z=1} = h'_1$  и  $h|_{z=1-L} = h'_2$  в натуре (фиг. 1) и с начальным условием  $h(z, 0) = h_1$ .

Положим  $h - h_1 = \bar{h}$ . Тогда нужно решить задачу (7)–(9)

$$\frac{\partial \bar{h}}{\partial t} = \sigma e^{-\gamma z} \frac{\partial^2 \bar{h}}{\partial z^2} \quad (7)$$

$$\bar{h}|_{z=0} = 0, \quad \bar{h}|_{z=l} = h_0 \quad (8)$$

$$\bar{h}|_{t=0} = 0 \quad (9)$$

где  $h_0 = h_2 - h_1$ . Применяя к задаче (7)–(9) преобразование Лапласа по времени, получим задачу (10)–(11)

$$\frac{d^2 H}{dz^2} - \frac{p}{\sigma} e^{\gamma z} H = 0 \quad (10)$$

$$H|_{z=0} = 0, \quad H|_{z=l} = \frac{h_0}{p} \quad (11)$$

где

$$H(z, p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} \bar{h}(z, t) dt$$

Общее решение уравнения (10) имеет вид

$$H = C_1 J_0 \left( \frac{2i}{\gamma} \sqrt{\frac{p}{\sigma}} e^{\frac{\gamma z}{2}} \right) + C_2 Y_0 \left( \frac{2i}{\gamma} \sqrt{\frac{p}{\sigma}} e^{\frac{\gamma z}{2}} \right) \quad (12)$$

где  $J_0(z)$  и  $Y_0(z)$  — функции Бесселя нулевого порядка соответственно первого и второго родов;  $C_1$  и  $C_2$  — произвольные постоянные, которые определяются из условий (11) и имеют вид

$$C_1 = - \frac{h_0 Y_0(\mu)}{p [J_0(\mu) Y_0(\beta_0 \mu) - Y_0(\mu) J_0(\beta_0 \mu)]}$$

$$C_2 = \frac{h_0 J_0(\mu)}{p [J_0(\mu) Y_0(\beta_0 \mu) - Y_0(\mu) J_0(\beta_0 \mu)]}$$

где

$$\mu = \frac{2i}{\gamma} \sqrt{\frac{p}{\sigma}}, \quad \beta_0 = e^{\frac{\gamma t}{2}}$$

Подставляя значения  $C_1$  и  $C_2$  в (12), получим, что решением задачи (10)–(11) будет функция

$$H = \frac{h_0 [J_0(\mu) Y_0(\beta \mu) - Y_0(\mu) J_0(\beta \mu)]}{p [J_0(\mu) Y_0(\beta_0 \mu) - Y_0(\mu) J_0(\beta_0 \mu)]} \quad (13)$$

где

$$\beta = e^{\frac{\gamma t}{2}}$$

Решение (13) можно представить в виде

$$H = \frac{\Phi(p)}{\Psi(p)}$$

где  $\Phi(p)$  и  $\Psi(p)$  — обобщенные полиномы. Переход от решения задачи в изображении (13) к оригиналу осуществляется теоремой разложения

$$\tilde{h}(t) = L^{-1} \left[ \frac{\Phi(p)}{\Psi(p)} \right] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Phi(p_n)}{\Psi'(p_n)} e^{p_n t}$$

Найдем корни функции  $\Psi(p)$ , для чего приравняем ее нулю. При этом получим: 1) простой корень  $p=0$ ; 2) бесчисленное множество простых корней  $p_n$ , определяемых из уравнения

$$J_0(\mu) Y_0(\beta_0 \mu) - Y_0(\mu) J_0(\beta_0 \mu) = 0 \quad (14)$$

Корни уравнения (14) находятся графически. Первые шесть корней приведены в табл. 1 для значений  $\beta_0$  от 1.2 до 4.0 [1].

Таблица 1

$\beta_0$	$p_1$	$p_2$	$p_3$	$p_4$	$p_5$	$p_6$
1.2	15.7014	31.4126	47.1217	62.8304	78.5385	94.2467
1.5	6.2702	12.5598	18.8451	25.1294	31.4133	37.6969
2.0	3.1230	6.2734	9.4182	12.5614	15.7040	18.8462
2.5	2.0732	4.1773	6.2754	8.3717	10.4672	12.5606
3.0	1.5485	3.1291	4.7038	6.2767	7.8487	9.4185
3.5	1.2339	2.5002	3.7608	5.0196	6.2776	7.5338
4.0	1.0244	2.0809	3.1322	4.1816	5.2301	6.2762

Для нулевого корня  $p = 0$  имеем

$$\frac{\Phi(0)}{\Psi'(0)} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{\Phi(p)}{\Psi'(p)} = h_0 \frac{z}{l}$$

для корней  $p_n$  уравнения (14) имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Phi(p_n)}{\Psi'(p_n)} e^{p_n t} = \\ = \pi h_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\mu_n) Y_0(\beta_0 \mu_n) - Y_0(\mu_n) J_0(\beta_0 \mu_n)}{J_0^2(\beta_0 \mu_n) - J_0^2(\mu_n)} J_0(\mu_n) J_0(\beta_0 \mu_n) e^{-\frac{\mu_n^2 z^2 t}{4}}$$

Тогда решение задачи (7)–(9) будет

$$\bar{h}(z, t) = \frac{h_0 z}{l} + \\ + \pi h_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\mu_n) Y_0(\beta_0 \mu_n) - Y_0(\mu_n) J_0(\beta_0 \mu_n)}{J_0^2(\beta_0 \mu_n) - J_0^2(\mu_n)} J_0(\mu_n) J_0(\beta_0 \mu_n) e^{-\frac{\mu_n^2 z^2 t}{4}} \quad (15)$$

Нетрудно проверить, что решение (15) удовлетворяет граничным условиям (8).

Известно, что при больших  $t$  неустановившаяся фильтрация почти стабилизируется. Теоретически это значит, что при  $t \rightarrow \infty$  действие неустановившегося режима фильтрации стремится к нулю. Действительно, при  $t \rightarrow \infty$  из решения (15) получим

$$\bar{h} = \frac{h_0}{l} z$$

что совпадает с решением уравнения  $\frac{d^2 \bar{h}}{dz^2} = 0$ , которое является уравнением установившейся одномерной фильтрации жидкости в прямоугольном пласте. Здесь отметим, что этот результат можно получить, если для малых  $p$  (больших  $t$ ) удовлетвориться первыми членами в разложениях в ряды для функций  $J_0$  и  $Y_0$  в формуле (13).

Действительно, принимая

$$J_0(u) \approx 1 \quad \text{и} \quad Y_0(u) \approx \frac{2}{\pi} \left( C + \ln \frac{u}{2} \right)$$

где  $C$  — постоянная Эйлера, из (13) получим

$$H = \frac{h_0}{p} \frac{\ln \beta}{\ln \beta_0}$$

Переходя к оригиналу и учитывая, что  $\beta = e^{\frac{pz}{2}}$  и  $\beta_0 = e^{\frac{lz}{2}}$ , получим

$$\bar{h} = h_0 \frac{z}{l}$$

При достаточно больших  $t$  для практических расчетов можно воспользоваться приближенным решением, которое получается из (13), если в нем функции  $J_0(u)$  и  $Y_0(u)$  заменить следующими своими приближенными величинами (второе приближение):

$$J_0(u) \approx 1 - \left(\frac{u}{2}\right)^2, \quad Y_0(u) \approx \frac{2}{\pi} \left[ \left(C + \ln \frac{u}{2}\right) \left(1 - \frac{u^2}{4}\right) + \frac{u^2}{4} \right]$$

Абсолютная ошибка  $|R(u)|$ , допущенная при таком приближении для значений аргумента  $u$  из интервала  $[-1, 1]$  не превышает  $2^{-6}$  ( $|R(u)| < 2^{-6}$ ), где  $|R(u)| = \max\{|R_1(u)|, |R_2(u)|\}$ ,  $R_1$  и  $R_2$  — остатки рядов соответственно для функций  $J_0(u)$  и  $Y_0(u)$ . Подставляя вышеуказанные приближенные выражения для функций  $J_0(u)$  и  $Y_0(u)$  в решение (13), после преобразований получим

$$H = \frac{2\pi h_0}{p} \frac{(\sigma + \gamma p)(\sigma + \beta^2 \gamma p) \ln \beta - (\beta^2 - 4) \gamma \sigma p}{(\sigma + \gamma p)(\sigma + \beta_0^2 \gamma p) \ln \beta_0 - (\beta_0^2 - 4) \gamma \sigma p} \quad (16)$$

Переходя к оригиналу в (16), получим решение задачи для больших  $t$  в виде

$$\bar{h} = 2\pi h_0 \left\{ \frac{z}{l} + \sum_{i=1}^2 \frac{[(\sigma + \gamma \alpha_i)(\sigma + \beta^2 \gamma \alpha_i) \gamma z - (\beta^2 - 4) \gamma \sigma \alpha_i] e^{-\alpha_i t}}{\alpha_i [2\gamma^2 \beta_0^2 \gamma l \alpha_i + \gamma^2 \sigma l + \beta_0^2 \gamma^2 \sigma l - \gamma^3 \sigma l^2 + 4\gamma \sigma]} \right\}$$

где  $\alpha_i$  — корни квадратного уравнения

$$z^2 (\gamma^2 \beta_0^2 \ln \beta_0) + z (\gamma \sigma \ln \beta_0 + \gamma \sigma \beta_0^2 \ln \beta_0 - \gamma \sigma \beta_0^2 + 4\gamma \sigma) + \sigma^2 \ln \beta_0 = 0$$

Отдельно исследуем решение задачи для малых  $t$ , когда в основном сказывается неустановившийся режим фильтрации. Рассмотрим решение задачи в виде (13) для больших  $p$ . Известно, что при больших значениях аргумента  $u$  имеют место следующие асимптотические формулы для бесселевых функций  $J_0(u)$  и  $Y_0(u)$

$$J_0(u) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi u}} \left\{ P_0(u) \cos \left(u - \frac{\pi}{4}\right) - Q_0(u) \sin \left(u - \frac{\pi}{4}\right) \right\}$$

$$Y_0(u) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi u}} \left\{ P_0(u) \sin \left(u - \frac{\pi}{4}\right) - Q_0(u) \cos \left(u - \frac{\pi}{4}\right) \right\}$$

где

$$P_0(u) = 1 - \frac{1^2 \cdot 3^2}{2! (8u)^2} + \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2}{4! (8u)^4} - \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 9^2 \cdot 11^2}{6! (8u)^6} + \dots$$

$$Q_0(u) = -\frac{1}{8u} + \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2}{3! (8u)^3} - \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 9^2}{5! (8u)^5} + \dots$$

Если оборвать ряды  $P_0(u)$  и  $Q_0(u)$  после члена с  $u^{-n}$ , то получим ошибку  $R(u)$ , абсолютная величина которой  $|R(u)| < Au^{-n-1}$ , где

$A = \text{const}$  и  $|R(u)| \rightarrow 0$  при  $|u| \rightarrow \infty$ . Отсюда следует, что при  $|u| \gg 1$  справедливо первое приближение:

$$\begin{aligned} J_0(u) &\approx \sqrt{\frac{2}{\pi u}} \cos\left(u - \frac{\pi}{4}\right) \\ Y_0(u) &\approx \sqrt{\frac{2}{\pi u}} \sin\left(u - \frac{\pi}{4}\right) \end{aligned} \quad (17)$$

Подставляя выражения (17) для  $J_0(u)$  и  $Y_0(u)$  в (13), после преобразований получим

$$H = \frac{h_0}{p} \sqrt{\frac{\beta_0}{\beta}} \frac{\sin \mu(\beta - 1)}{\sin \mu(\beta_0 - 1)} \quad (18)$$

Для перехода от решения в изображении (18) к решению для оригинала представим (18) в виде

$$H = \frac{H_0}{p} \frac{\sin \mu(\beta - 1)}{\sin \mu(\beta_0 - 1)} = H_0 \frac{\Phi_1(p)}{\Psi_1(p)}$$

где

$$H_0 = h_0 \sqrt{\frac{\beta_0}{\beta}}$$

Если разложить в ряды  $\Phi_1(p)$  и  $\Psi_1(p)$ , то числитель и знаменатель выражения (18) не будут обобщенными полиномами относительно  $p$ , но их можно привести к ним, умножив числитель и знаменатель

на  $i \sqrt{\frac{p}{\sigma}}$

$$H = \frac{\Phi(p)}{\Psi(p)}$$

где  $\Phi(p)$  и  $\Psi(p)$  — обобщенные полиномы:

$$\begin{aligned} \Phi(p) &= H_0 \left\{ 2(\beta - 1) \left(-\frac{p}{\sigma}\right) - \frac{[2(\beta - 1)]^2}{3!} \left(-\frac{p}{\sigma}\right)^2 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{[2(\beta - 1)]^3}{5!} \left(-\frac{p}{\sigma}\right)^3 - \frac{[2(\beta - 1)]^4}{7!} \left(-\frac{p}{\sigma}\right)^4 + \dots \right\} \\ \Psi(p) &= p \left\{ 2(\beta_0 - 1) \left(-\frac{p}{\sigma}\right) - \frac{[2(\beta_0 - 1)]^2}{3!} \left(-\frac{p}{\sigma}\right)^2 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{[2(\beta_0 - 1)]^3}{5!} \left(-\frac{p}{\sigma}\right)^3 - \frac{[2(\beta_0 - 1)]^4}{7!} \left(-\frac{p}{\sigma}\right)^4 + \dots \right\} \end{aligned}$$

Корнями функции  $\Psi(p)$  являются:  $p = 0$  (нулевой корень) и бесчисленное множество корней



$$p_n = -\frac{\varepsilon n^2 \pi^2 \gamma^2}{4(\beta_0 - 1)^2} \quad (n = 1, 2, \dots) \text{ уравнения } \sin(\beta_0 - 1)\mu = 0$$

Далее имеем

$$\begin{aligned} L^{-1} \left[ \frac{\Phi(0)}{\Psi(0)} \right] &= \lim_{p \rightarrow 0} \frac{\Phi(p)}{\Psi'(p)} = H_0 \frac{\beta_0 - 1}{\beta_0 - 1} \\ L^{-1} \left[ \frac{\Phi(p_n)}{\Psi(p_n)} \right] &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Phi(p_n)}{\Psi'(p_n)} e^{p_n t} = \\ &= \frac{2H_0}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin \frac{n\pi(\beta_0 - 1)}{\beta_0 - 1} e^{p_n t} \end{aligned}$$

Следовательно, решение задачи для малых  $t$  имеет вид

$$\bar{h} = H_0 \frac{\beta_0 - 1}{\beta_0 - 1} - \frac{2H_0}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin \frac{n\pi(\beta_0 - 1)}{\beta_0 - 1} e^{-\frac{n^2 \pi^2 \gamma^2 t}{4(\beta_0 - 1)^2}} \quad (19)$$

Легко проверить, что решение (19) удовлетворяет граничным условиям (8).

С помощью приближенных равенств (17) непосредственно из решения (15) можно получить решение поставленной задачи, пригодное для малых  $t$ , в виде

$$\begin{aligned} h &= h_0 \frac{z}{l} - \frac{2}{\pi} (\beta_0 - 1) \sqrt{\frac{\beta_0}{\beta}} \times \\ &\times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi(\beta_0 - 1)}{\beta_0 - 1} \cos \left( \frac{n\pi}{\beta_0 - 1} - \frac{\pi}{4} \right) \cos \left( \frac{\beta_0 n\pi}{\beta_0 - 1} - \frac{\pi}{4} \right)}{\beta_0 \cos^2 \left( \frac{n\pi}{\beta_0 - 1} - \frac{\pi}{4} \right) - \cos^2 \left( \frac{\beta_0 n\pi}{\beta_0 - 1} - \frac{\pi}{4} \right)} e^{-\frac{n^2 \pi^2 \gamma^2 t}{4(\beta_0 - 1)^2}} \quad (20) \end{aligned}$$

Таким образом, для малых  $t$ , именно когда существенным является неустановившийся режим фильтрации, можно с большей точностью для практики принять за расчетные формулы решения (19) или (20).

С целью сопоставления решения задачи с переменным коэффициентом фильтрации (или мощности) водоносного горизонта с решением той же задачи, но с постоянным осредненным коэффициентом фильтрации (или мощностью) водоносного горизонта, рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial \bar{h}}{\partial t} = \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \bar{h}}{\partial z^2} \quad (21)$$

где  $\varepsilon_0 = -\frac{\varepsilon}{l\gamma} (e^{-l/\gamma} - 1)$ , получаемое из уравнения (6) после осреднения коэффициента  $\varepsilon e^{-l/\gamma}$  по формуле

$$\sigma_0 = \frac{1}{l} \int_0^l z e^{-\tau z} dz$$

Решение уравнения (21) с условиями

$$\bar{h}|_{z=0} = 0, \quad \bar{h}|_{z=l} = h_0 \text{ и } h|_{t=0} = 0$$

в преобразовании Лапласа по времени имеет вид

$$H = \frac{h_0 \operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{\sigma_0}} z}{p \operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{\sigma_0}} l} \quad (22)$$

где

$$H(z, p) \doteq \bar{h}(z, t)$$

Оригинал выражения (22) есть функция

$$\bar{h} = \frac{z}{l} h_0 - \frac{2}{\pi} h_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \sin \frac{n\pi z}{l} e^{-\frac{n^2 \pi^2}{l^2} t} \quad (23)$$

Для малых  $p$  (больших  $t$ ) имеем

$$\operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{\sigma_0}} z \approx \sqrt{\frac{p}{\sigma_0}} z$$

$$\operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{\sigma_0}} l \approx \sqrt{\frac{p}{\sigma_0}} l$$

Тогда  $H = \frac{h_0}{p} \frac{z}{l}$  и  $\bar{h} = h_0 \frac{z}{l}$ . При достаточно малых  $t$  (больших  $p$ ) имеют место приближенные равенства

$$\operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{\sigma_0}} z \approx \frac{1}{2} e^{\sqrt{\frac{p}{\sigma_0}} z}$$

$$\operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{\sigma_0}} l \approx \frac{1}{2} e^{\sqrt{\frac{p}{\sigma_0}} l}$$

с помощью которых из (22) получим

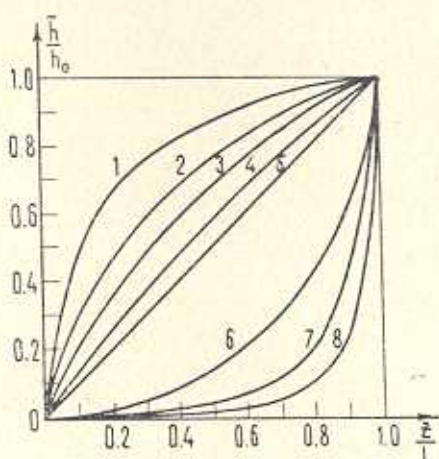
$$H = \frac{h_0}{p} e^{\sqrt{\frac{p}{\sigma_0}}(z-l)}$$

Переходя к оригиналу в последнем выражении, получим

$$\bar{h} = h_0 \operatorname{erfc} \frac{l-z}{2 \sqrt{\sigma_0 t}} \quad (24)$$

Рассмотрим численный пример для следующих значений параметров:  $h_0 = 20$  м,  $L = 5000$  м,  $a = 0.002 \frac{1}{\text{м}}$ ,  $b = 10$  м/сут,  $l = 1200$  м,  $\sigma = 10^5$  м<sup>2</sup>/сут.

На фиг. 3 приведены графики функции  $\frac{\bar{h}}{h_0} = f\left(\frac{z}{l}\right)$ . Графики 1—4 построены по формуле (15) для разных



Фиг. 3.

значений  $t$ , 5-ый график построен по формуле  $\frac{\bar{h}}{h_0} = \frac{z}{l}$  (стационарное движение), 6-ой—по формуле (19) (при  $t = 0.1$  сут), 7-ой—по формуле (23) (при  $t = 0.1$  сут) и 8-ой—по формуле (24) (при  $t = 0.1$  сут). Как видно из фиг. 3, расхождение между решениями (15), (19) и (23) велико, то есть осреднение переменного коэффициента фильтрации или мощности (или одновременное осреднение первого и второго) водоносного горизонта может привести к значительным ошибкам.

Ереванский политехнический институт  
им. К. Маркса

Поступил 6 V 1972

Ր. Մ. ԲԱՐՍԵԳՅԱՆ

ԱՆՀԱՄԱՄԵՆԻ ՀՈՂԱՇԵՐՏՈՒՄ ԶԿԱՅՈՒՆԱՏԱՅ ՄԻԱԶՍՓ  
ՖԻԼՏՐԱՅԻՆՅԻ ՄԱՍԻՆ

Ա մ փ ո փ ու մ

Դիտարկված է հեղուկի ոչ կայունացված շարժումը ուղղանկյունաձև հո-  
ղաշերտում, երբ ֆիլտրացիան ունի փոփոխական դրժակից, իսկ հողաշեր-

ար՝ հաստատուն հզորություն կամ հաստատուն ֆիլտրացիան ունի հաստատուն զորձակից, իսկ հողաշերտը փոփոխական հզորություն: Տրված են զորձակահանում հաճախ հանդիպող ֆիլտրացիայի խնդիրների ճշգրիտ և մոտավոր լուծումները, այն դեպքերի համար, երբ հողաշերտի հզորությունը, կամ ֆիլտրացիայի զորձակիցը փոփոխվում են դձային օրենքներով:

## ON UNSTEADY ONE-DIMENSIONAL FILTRATION IN A HETEROGENEOUS LAYER

R. M. BARSEGHIAN

### S u m m a r y

Unsteady liquid motion in a rectangular layer with a variable coefficient of filtration and a constant depth or with a constant coefficient of filtration but with a variable depth is considered. Accurate and approximate solutions of filtration problems, frequently encountered in practice, are presented, namely, for the case where the layer depth or the filtration coefficient varies according to the linear laws.

### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Янке Е., Эмде Ф., Либ Ф. Специальные функции. Изд. „Наука“, М., 1968.