ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXVI, № 2, 1973 Механика

Р. М. КИРАКОСЯН

МИНИМАЛЬНЫЕ ПРИНЦИПЫ И НЕКОТОРЫЕ ТЕОРЕМЫ ОБ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОМ РАВНОВЕСИИ ТЕЛ ПРИ НЕСТАЦИОНАРНЫХ СИЛОВЫХ И ТЕМПЕРАТУРНЫХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ

Рассматривается квазистатическое упруго-пластическое равновесие тел, находящихся под действием нестационарных силовых и температурных воздействий. Обобщаются минимальные принципы упруго-пластической краевой задачи для скоростей изменения напряжений и деформаций на случай нестационарных температурных полей. В случае произвольно упрочняющихся материалов на базе термоупругих решений получается оценка сверху работы приращений действительных напряжений на приращениях пластических деформаций. Устанавливаются некоторые теоремы и неравенства, связывающие решения краевой задачи в термоупругой и термоупруго-пластической постановках.

1. В прямоугольной декартовой системе координат x_i рассмотрим тело объема v, находящееся под действием массовых сил X_i, поверхностных нагрузок P_i, приложенных на части поверхности S_p, и перемещений u_{i0}, заданных на остальной части поверхности тела S_u. Будем считать, что эти воздействия и температурное поле тела θ зависят от времени, но они настолько медленно изменяются, что можно пренебречь инерционными эффектами. Как обычно, будем полагать, что температурное поле тела не зависит от его напряженного состояния и определяется решением соответствующей задачи теплопроводности. Все деформации считаются малыми, в силу чего при составлении уравнений равновесия и граничных условий пренебрегаются изменения геометрии тела, вызванные его деформированием.

Тензор скоростей деформаций $\dot{\varepsilon}_{ij}$ выражается через скорости перемещений $\dot{u}_i$ в прямоугольной декартовой системе координат с помощью известных соотношений

$$\dot{\varepsilon}_{ij}=\frac{1}{2}\left(\dot{u}_{i,j}+\dot{u}_{j,i}\right) \tag{1.1}$$

где запятая перед индексом i обозначает частную производную по координате x_i.

Материал тела предполагаем устойчивым в смысле постулата Друккера, идеально пластическим или произвольно упрочняющимся с регулярной или сингулярной поверхностью текучести. С целью упращения считаем также, что физико-механические свойства материала не зависят от температуры.

Связь между напряжениями и деформациями при переменных температурах можно представить с помощью следующих соотношений [1]:

а) для идеально-пластических материалов

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\varepsilon}'_{ij} + \dot{\varepsilon}''_{ij} + \dot{\varepsilon}^{\theta}_{ij} = A_{ijhk}\dot{\sigma}_{hk} + \sum_m \dot{\lambda}_m \frac{\partial f_m}{\partial \sigma_{ij}} + \alpha\dot{\theta}\delta_{ij} \tag{1.2}$$

где $\dot{\varepsilon}'_{ij}$, $\dot{\varepsilon}''_{ij}$ и $\dot{\varepsilon}^{\theta}_{ij}$—упругие, пластические и температурные составляющие скорости деформаций соответственно, A_{ijhk}—тензор упругих коэффициентов, σ_{ij}—тензор напряжений, α—коэффициент линейного температурного расширения, δ_{ij}—символ Кронеккера, f_m—функция текучести ($f_m(\sigma_{ij}) = 0$—поверхности текучести)

$$\dot{\lambda}_m = 0, \text{ если } f_m < 0, \text{ а также если } f_m = 0, \ \dot{f}_m = \frac{\partial f_m}{\partial \sigma_{ij}}\dot{\sigma}_{ij} < 0$$

и

$$\dot{\lambda}_m \geqslant 0, \text{ если } f_m = 0 \text{ и } \dot{f}_m = 0$$

б) для упрочняющейся среды общего типа

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\varepsilon}'_{ij} + \dot{\varepsilon}''_{ij} + \dot{\varepsilon}^{\theta}_{ij} = A_{ijhk}\dot{\sigma}_{hk} + \sum_m C_m h_m \frac{\partial f_m}{\partial \sigma_{ij}}\dot{f}_m + \alpha\dot{\theta}\delta_{ij} \tag{1.3}$$

где h_m—положительные функции упрочнения,

$$C_m = 0, \text{ если } f_m < 0 \text{ или } \dot{f}_m < 0$$

и

$$C_m = 1, \text{ если } f_m = 0 \text{ и } \dot{f}_m \geqslant 0$$

Дополнительно будем считать, что функции упрочнения h_m не зависят от скоростей изменения напряжений.

Известно [1], что в случае стационарного температурного поля ($\dot{\theta} = 0$) обращения соотношений (1.2), (1.3) существуют и единственны. Имея в виду это обстоятельство и независимость температурного поля от скоростей изменения напряжений, нетрудно заключить, что существуют единственные обращения соотношений (1.2), (1.3) и в случае нестационарности температурного поля. Таким образом, при заданном напряженном состоянии σ_{ij} и нестационарном температурном поле θ существует единственное решение соотношений (1.2) и (1.3) относительно скоростей изменения напряжений $\dot{\sigma}_{ij}$.

Уравнение виртуальных работ

$$\int_v \dot{\sigma}_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij}dv = \int_v \dot{X}_i\dot{u}_i\,dv + \int_s \dot{P}_i\dot{u}_i\,ds \tag{1.4}$$

справедливо для любого распределения скоростей изменения напряжений $\dot{\sigma}_{ij}$, уравновешенного скоростями изменений внешних нагрузок

$\dot{X}_i$, $\dot{P}_i$ и для любого поля скоростей деформаций $\dot{\varepsilon}_{ij}$, выражаемого через поле скоростей $\dot{u}_i$ с помощью соотношений (1.1). Очевидно, что уравнение виртуальных работ применимо и для тел с нестационарными температурными полями.

Известно [1], что распределение скоростей изменения напряжений $\dot{\sigma}_{ij}^*$ в упрочняющемся материале называется статически возможным, если оно удовлетворяет дифференциальным уравнениям равновесия в объеме тела и краевым условиям для напряжений на S_p. Статически возможное распределение скоростей изменения напряжений в идеально-пластическом теле должно также удовлетворять дополнительному условию

$$\dot{f}_m^* = \frac{\partial f_m}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij}^* \leqslant 0, \text{ если } f_m = 0 \tag{1.5}$$

поскольку материал не может воспринимать напряжения, превышающие предел текучести. Скорости деформации (1.2) или (1.3), соответствующие статически возможным скоростям $\dot{\sigma}_{ij}^*$, как обычно, будем обозначать $\dot{\varepsilon}_{ij}^*$. Поле скоростей деформаций $\dot{\varepsilon}_{ij}^0$ называется кинематически возможным, если оно может быть выведено с помощью линейных соотношений (1.1) из поля скоростей $\dot{u}_i^0$, удовлетворяющего краевому условию для перемещений на S_u.

Скорости изменения напряжений по единственному обращению соотношений (1.2) и (1.3), соответствующие кинематически возможному распределению скоростей деформаций $\dot{\varepsilon}_{ij}^0$ и данному распределению скоростей температурных деформаций $\alpha\dot{\theta}\delta_{ij}$, будем обозначать $\dot{\sigma}_{ij}^0$.

Минимальный принцип для скоростей изменения напряжений в рассмотренном случае нестационарного температурного поля θ можно высказать в форме следующего утверждения: абсолютный минимум выражения

$$\frac{1}{2}\int_v \dot{\sigma}_{ij}^* \left(\dot{\varepsilon}_{ij}^* + \alpha\dot{\theta}\delta_{ij} \right) dv - \int_{s_u} \dot{\sigma}_{ij}^* n_j \dot{u}_{i0} ds \tag{1.6}$$

определенного для всех статически возможных распределений скоростей изменения напряжений $\dot{\sigma}_{ij}^*$, отвечает действительному распределению скоростей изменения напряжений $\dot{\sigma}_{ij}$, являющемуся единственным решением краевой задачи.

Аналогично, минимальный принцип для скоростей деформаций может быть высказан в форме утверждения. Абсолютный минимум выражения

$$\frac{1}{2}\int_v [\dot{\sigma}_{ij}^0 - A_{ijhk}^{-1} (\alpha\dot{\theta}\delta_{hk})] \dot{\varepsilon}_{ij}^0 \, dv - \int_v \dot{X}_i \dot{u}_i^0 \, dv - \int_{s_p} \dot{P}_i \dot{u}_i^0 \, ds \tag{1.7}$$

(A_{ijhk}^{-1} — тензор модулей упругости) определенного для всех кинематически возможных распределений скоростей деформаций $\dot{\varepsilon}_{ij}^{0}$, отвечает действительному распределению скоростей деформаций $\dot{\varepsilon}_{ij}$ и соответствующих им скоростей $\dot{u}_i$. В случае идеально-пластического тела действительное распределение скоростей деформаций не обязательно единственно, и минимум (1.7) достигается при всех распределениях скоростей деформаций, являющихся решениями краевой задачи.

Очевидно, что при $\dot{\theta} = 0$ сформулированные минимальные принципы совпадают с известными принципами, установленными для случая стационарных температурных полей.

Минимальный принцип для скоростей изменения напряжений эквивалентен утверждению следующего неравенства:

$$\frac{1}{2}\int_{v} \dot{\sigma}_{ij}^{*}\left(\dot{\varepsilon}_{ij}^{*} + \alpha\dot{\theta}\delta_{ij}\right) dv - \int_{S_u} \dot{\sigma}_{ij}^{*} n_j \dot{u}_{i0}\, ds -$$

$$-\frac{1}{2}\int_{v} \dot{\sigma}_{ij}\left(\dot{\varepsilon}_{ij} + \alpha\dot{\theta}\delta_{ij}\right) dv + \int_{S_u} \dot{\sigma}_{ij} n_j \dot{u}_{i0}\, ds \geqslant 0 \tag{1.8}$$

которое переходит в равенство только тогда, когда статически возможное поле скоростей изменения напряжений $\dot{\sigma}_{ij}^{*}$ совпадает с действительным полем $\dot{\sigma}_{ij}$.

Имея в виду, что разность скоростей изменения напряжений $[\dot{\sigma}_{ij}^{*} - \dot{\sigma}_{ij}]$ самоуравновешена и соответствует нулевым скоростям на S_p, а действительные скорости деформаций $\dot{\varepsilon}_{ij}$ совместны и соответствуют заданным на S_u скоростям $\dot{u}_{i0}$, из уравнения виртуальных работ (1.4) находим

$$\int_{v} [\dot{\sigma}_{ij}^{*} - \dot{\sigma}_{ij}]\, \dot{\varepsilon}_{ij}\, dv = \int_{S_u} [\dot{\sigma}_{ij}^{*} - \dot{\sigma}_{ij}] n_j \dot{u}_{i0}\, ds \tag{1.9}$$

С помощью этого равенства неравенство (1.8) можно привести к виду

$$\frac{1}{2}\int_{v} \left\{\dot{\sigma}_{ij}^{*} \dot{\varepsilon}_{ij}^{*\text{н}} - \dot{\sigma}_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}^{\text{н}} - 2[\dot{\sigma}_{ij}^{*} - \dot{\sigma}_{ij}]\dot{\varepsilon}_{ij}^{\text{н}}\right\} dv \geqslant 0 \tag{1.10}$$

где символом „н" наверху обозначены скорости деформаций без температурных составляющих, то есть

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{*\text{н}} = \dot{\varepsilon}_{ij}^{*} - \alpha\dot{\theta}\delta_{ij}, \quad \dot{\varepsilon}_{ij}^{\text{н}} = \dot{\varepsilon}_{ij} - \alpha\dot{\theta}\delta_{ij} \tag{1.11}$$

Ясно, что связь между тензорами $\dot{\sigma}_{ij}^{*}$ и $\dot{\varepsilon}_{ij}^{*\text{н}}$, а также тензорами $\dot{\sigma}_{ij}$ и $\dot{\varepsilon}_{ij}^{\text{н}}$ выражается обычными соотношениями (1.2) или (1.3), записанными для случаев стационарных температурных полей.

Доказательство положительности подынтегрального выражения (1.10), когда $\dot{\sigma}^{*}_{ij}$ не совпадает с $\dot{\sigma}_{ij}$, дается на стр. 32—33 работы [1].

Аналогично можно доказать минимальный принцип для скоростей деформаций, который равносилен следующему неравенству:

$$\frac{1}{2}\int_v [\dot{\sigma}^0_{ij} - A^{-1}_{ijhk}(\alpha\dot{\theta}\delta_{hk})]\,\dot{\varepsilon}^0_{ij}\,dv - \int_v \dot{X}_i \dot{u}^0_i\,dv - \int_{s_p} \dot{P}_i \dot{u}^0_i\,ds -$$

$$-\frac{1}{2}\int_v [\dot{\sigma}^0_{ij} - A^{-1}_{ijhk}(\alpha\dot{\theta}\delta_{hk})]\,\dot{\varepsilon}_{ij}\,dv + \int_v \dot{X}_i \dot{u}_i\,dv + \int_{s_p} \dot{P}_i \dot{u}_i\,ds \geqslant 0 \qquad (1.12)$$

С помощью уравнения виртуальных работ (1.4), записанного для кинематически возможных скоростей деформаций $[\dot{\varepsilon}^0_{ij} - \dot{\varepsilon}_{ij}]$, которым отвечают скорости, равные нулю на S_u, и действительных скоростей изменения напряжений $\dot{\sigma}_{ij}$, имеем

$$\int_v \dot{\sigma}_{ij}[\dot{\varepsilon}^0_{ij} - \dot{\varepsilon}_{ij}]\,dv = \int_v \dot{X}_i[\dot{u}^0_i - \dot{u}_i]\,dv + \int_{s_p} \dot{P}_i\,[\dot{u}^0_i - \dot{u}_i]\,ds \qquad (1.13)$$

С учетом этого равенства, неравенство (1.12) можно привести к виду

$$\frac{1}{2}\int_v \{\dot{\sigma}^{0н}_{ij}\dot{\varepsilon}^0_{ij} - \dot{\sigma}^{н}_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij} - 2\dot{\sigma}^{н}_{ij}[\dot{\varepsilon}^0_{ij} - \dot{\varepsilon}_{ij}]\}\,dv \geqslant 0 \qquad (1.14)$$

где символом „н" наверху обозначены скорости изменения напряжений без учета скоростей температурных деформаций, то есть

$$\dot{\sigma}^{0н}_{ij} = \dot{\sigma}^0_{ij} + A^{-1}_{ijhk}(\alpha\dot{\theta}\delta_{hk}), \qquad \dot{\sigma}^{н}_{ij} = \dot{\sigma}_{ij} + A^{-1}_{ijhk}(\alpha\dot{\theta}\delta_{hk}) \qquad (1.15)$$

Связь между тензорами скоростей изменения напряжений $\dot{\sigma}^{0н}_{ij}$ и деформаций $\dot{\varepsilon}^0_{ij}$, а также тензорами $\dot{\sigma}^{н}_{ij}$ и $\dot{\varepsilon}_{ij}$ выражается обращением обычных соотношений упруго-пластического тела (1.2), (1.3), записанных для случая стационарности температурного поля.

Подынтегральное выражение (1.14), когда $\dot{\varepsilon}^0_{ij}$ не совпадает с $\dot{\varepsilon}_{ij}$, всегда положительно (см. стр. 34 работы [1]).

2. Рассмотрим решение краевой задачи в скоростях напряжений в линейно-термо-упругой постановке $\dot{\sigma}^{(e)}_{ij}$ при тех же скоростях изменения внешних воздействий $\dot{X}_i$, $\dot{P}_i$, $\dot{u}_{i0}$ и $\dot{\theta}$. Очевидно, что эти скорости в случае упрочняющихся материалов всегда, а в случае идеально-пластических материалов при соблюдении дополнительного условия (1.5) являются статически возможными. Следовательно, в качестве статически возможного распределения скоростей изменения напряжений $\dot{\sigma}^{*}_{ij}$ можно принимать поле скоростей термоупругих напряжений $\dot{\sigma}^{(e)}_{ij}$, при этом не забывая, что в случае идеально пластических матери-

алов это означает ограничиться классом задач, для которых условие (1.5) удовлетворяется.

Полагая $\dot{\sigma}_{ij}^{*} = \dot{\sigma}_{ij}^{(e)}$, из минимального принципа для скоростей напряжений (1.10) получим

$$\int_{v} [\dot{\sigma}_{ij}^{(e)} \dot{\varepsilon}_{ij}^{*(e)n} + \dot{\sigma}_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}^{n} - 2\dot{\sigma}_{ij}^{(e)} \dot{\varepsilon}_{ij}^{n}]\, dv \geqslant 0 \tag{2.1}$$

где $\dot{\varepsilon}_{ij}^{*(e)n}$ —скорости деформаций упруго-пластического тела, соответствующие выбранному статически возможному полю скоростей термоупругих напряжений $\dot{\sigma}_{ij}^{(e)}$, без учета скоростей температурных деформаций $\alpha\dot{\theta}\delta_{ij}$.

Из (1.2) или (1.3) с учетом (1.11) для скоростей $\dot{\varepsilon}_{ij}^{*(e)n}$ имеем

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{*(e)n} = A_{ijhk}\, \dot{\sigma}_{hk}^{(e)} + \dot{\varepsilon}_{ij}^{''(e)} = \dot{\varepsilon}_{ij}^{(e)n} + \dot{\varepsilon}_{ij}^{''(e)} \tag{2.2}$$

Здесь $\dot{\varepsilon}_{ij}^{''(e)}$—скорости пластических деформаций, которые имели бы место, если действительные напряжения σ_{ij} изменялись бы со скоростями изменения термоупругих напряжений $\dot{\sigma}_{ij}^{(e)}$, а $\dot{\varepsilon}_{ij}^{(e)n}$—действительные скорости деформаций в упругом теле при скоростях воздействий $\dot{X}_i$, $\dot{P}_i$, $\dot{u}_{i0}$ и $\dot{\theta}$ без скоростей температурных деформаций $\alpha\dot{\theta}\delta_{ij}$.

С помощью (2.2) неравенство (2.1) можно привести к виду

$$\int_{v} \dot{\sigma}_{ij}^{(e)} \dot{\varepsilon}_{ij}^{''(e)}\, dv - J \geqslant 0 \tag{2.3}$$

где

$$J = \int_{v} [2\dot{\sigma}_{ij}^{(e)} \dot{\varepsilon}_{ij}^{n} - \dot{\sigma}_{ij}^{(e)} \dot{\varepsilon}_{ij}^{(e)n} - \dot{\sigma}_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}^{n}]\, dv \tag{2.4}$$

Минимальный принцип для скоростей изменения напряжений идеально линейно-упругого тела при переменных температурах можно сформулировать так же, как и для упруго-пластического тела, только с той разницей, что в неравенстве (1.10) скорости деформаций $\dot{\varepsilon}_{ij}^{*n}$ и $\dot{\varepsilon}_{ij}^{n}$ определяются из соотношений упругости

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{*n} = A_{ijhk}\, \dot{\sigma}_{hk}^{*}, \qquad \dot{\varepsilon}_{ij}^{n} = A_{ijhk}\, \dot{\sigma}_{hk} \tag{2.5}$$

Очевидно, что в качестве статически возможного поля скоростей изменения напряжений в воображаемом упругом теле можно принять $\dot{\sigma}_{ij}^{*} = \dot{\sigma}_{ij}$, то есть действительное поле скоростей изменения напряжений в реальном упруго-пластическом теле при тех же скоростях внешних воздействий $\dot{X}_i$, $\dot{P}_i$, $\dot{u}_{i0}$ и $\dot{\theta}$. При этом роль действительных скоростей изменения напряжений и деформаций играют $\dot{\sigma}_{ij}^{(e)}$ и $\dot{\varepsilon}_{ij}^{(e)}$—решения задачи в термоупругой постановке.

Применяя минимальный принцип для скоростей изменения напряжений при переменных температурах (1.10) в случае линейно-упругого тела, когда в качестве статически возможного поля скоростей изменения напряжений $\dot{\sigma}^{*}_{ij}$ принимается действительное поле скоростей в реальном упруго-пластическом теле $\dot{\sigma}_{ij}$, получим

$$\int\limits_v [\dot{\sigma}_{ij}\,\dot{\varepsilon}^{*п}_{ij} + \dot{\sigma}^{(e)}_{ij}\,\dot{\varepsilon}^{(e)п}_{ij} - 2\dot{\sigma}_{ij}\,\dot{\varepsilon}^{(e)п}_{ij}]\,dv \geqslant 0 \tag{2.6}$$

Так как [1]

$$\dot{\sigma}_{ij} = \dot{\sigma}^{(e)}_{ij} + \dot{\rho}_{ij} \tag{2.7}$$

где $\dot{\rho}_{ij}$—скорости остаточных напряжений, из (2.5) для $\dot{\varepsilon}^{*п}_{ij}$ имеем

$$\dot{\varepsilon}^{*п}_{ij} = A_{ijhk}[\dot{\sigma}^{(e)}_{hk} + \dot{\rho}_{hk}] = \dot{\varepsilon}^{(e)п}_{ij} + \ddot{\varepsilon}_{ij\rho} \tag{2.8}$$

Здесь через $\ddot{\varepsilon}_{ij\rho}$ обозначены скорости упругих деформаций, соответствующие скоростям остаточных напряжений $\dot{\rho}_{ij}$.

Подставляя (2.8) в (2.6), находим

$$\int\limits_v [\dot{\sigma}^{(e)}_{ij}\,\dot{\varepsilon}^{(e)п}_{ij} + \dot{\sigma}_{ij}\,\ddot{\varepsilon}_{ij\rho} - \dot{\sigma}_{ij}\,\dot{\varepsilon}^{(e)п}_{ij}]\,dv \geqslant 0 \tag{2.9}$$

Из уравнения виртуальных работ (1.4) для самоуравновешенных скоростей напряжений $[\dot{\sigma}_{ij} - \dot{\sigma}^{(e)}_{ij}]$ и совместных скоростей деформаций $[\dot{\varepsilon}^{п}_{ij} - \dot{\varepsilon}^{(e)п}_{ij}]$, которым отвечают скорости перемещений, равные нулю на S_u, имеем

$$\int\limits_v [\dot{\sigma}_{ij} - \dot{\sigma}^{(e)}_{ij}][\dot{\varepsilon}^{п}_{ij} - \dot{\varepsilon}^{(e)п}_{ij}]\,dv = 0 \tag{2.10}$$

Вычитая из (2.9) два раза (2.10) и имея в виду равенство

$$\dot{\varepsilon}^{п}_{ij} = \dot{\varepsilon}^{(e)п}_{ij} + \ddot{\varepsilon}_{ij\rho} + \ddot{\varepsilon}_{ij} \tag{2.11}$$

получим

$$J - \int\limits_v \dot{\sigma}_{ij}\,\ddot{\varepsilon}_{ij}\,dv \geqslant 0 \tag{2.12}$$

Как будет показано ниже, неравенства (2.3) и (2.12) позволяют установить некоторые теоремы и неравенства об упруго-пластическом равновесии тела при переменных силовых и температурных воздействиях.

3. Складывая неравенства (2.3), (2.12) и имея в виду постулат Друккера, приходим к результату

$$\int\limits_v \dot{\sigma}^{(e)}_{ij}\,\dot{\varepsilon}^{*(e)}_{ij}\,dv \geqslant \int\limits_v \dot{\sigma}_{ij}\,\ddot{\varepsilon}_{ij}\,dv \geqslant 0 \tag{3.1}$$

откуда следует теорема.

Работа приращений действительных напряжений на приращениях пластических деформаций не превосходит работы приращений *термоупругих напряжений на соответствующих им приращениях пластических деформаций.*

Работу приращений напряжений на приращениях пластических деформаций в случае упрочняющихся материалов, разумеется, можно рассматривать как некоторый интегральный критерий об интенсивности процесса дальнейшего пластического течения в теле при заданных скоростях изменения внешних воздействий. Установленная выше теорема позволяет оценить сверху этот критерий на базе термоупругих решений без анализа действительного упруго-пластического равновесия тела в последующем этапе его деформирования.

Из (3.1) следует, что случаю

$$\int\limits_v \dot{\sigma}_{ij}^{(e)} \ddot{\varepsilon}_{ij}^{(e)}\, dv = 0 \tag{3.2}$$

соответствует упругое поведение тела из упрочняющегося материала, в чем можно убедиться и из других соображений, имея в виду единственность краевой задачи.

4. Для устойчивых идеально-пластических материалов из единственности распределения действительных скоростей изменения напряжений вытекает, что статически возможные скорости термоупругих напряжений совпадают с действительными скоростями*.

Рассмотрим частный случай, когда на поверхности текучести идеально-пластического материала происходит нейтральное изменение напряженного состояния со скоростями термоупругих напряжений, то есть

$$\dot{\sigma}_{ij} = \dot{\sigma}_{ij}^{(e)}, \quad f_m(\sigma_{ij}) = 0, \quad \dot{f}_m^{(e)} = 0 \tag{4.1}$$

Легко доказать, что если система нагрузок не является предельной, то есть существует статически возможное безопасное распределение напряжений $\sigma_{ij}^{(s)}$, то при (4.1) происходит чисто упругий процесс. С этой целью запишем уравнение виртуальных работ в виде

$$\int\limits_v [\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^{(s)}][\dot{\varepsilon}_{ij} - \dot{\varepsilon}_{ij}^{(e)}]\, dv = 0 \tag{4.2}$$

откуда для случая (4.1) получим

$$\int\limits_v [\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^{(s)}] \ddot{\varepsilon}_{ij}\, dv = 0 \tag{4.3}$$

* Отметим, что это утверждение можно получить и из неравенств (2.3) и (2.12). На самом деле, имея в виду равенство $\dot{\sigma}_{ij} \ddot{\varepsilon}_{ij} = 0$, из этих неравенств имеем $J \leqslant 0$ и $J \geqslant 0$, откуда следует $J = 0$. В силу этого неравенство (2.3) превращается в равенство, что согласно минимальному принципу равносильно совпадению статически возможных скоростей термоупругих напряжений с действительными.

Это равенство противоречит основному неравенству постулата Друккера при отличных от нуля скоростях пластических деформаций

$$[\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^{(s)}]\dot{\varepsilon}_{ij}^{''} > 0 \qquad (4.4)$$

Таким образом справедлива теорема.

Если на поверхности текучести идеально пластического материала происходит нейтральное изменение напряженного состояния со скоростями термоупругих напряжений и если при этом система нагрузок не является предельной, то скорости пластических деформаций равны нулю и поведение тела упругое.

5. Из (2.12) в силу постулата Друккера следует неотрицательность интеграла J

$$J = \int_v [2\dot{\sigma}_{ij}^{(e)}\dot{\varepsilon}_{ij}^{''} - \dot{\sigma}_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij}^{''} - \dot{\sigma}_{ij}^{(e)}\dot{\varepsilon}_{ij}^{(e)''}]\, dv \geqslant 0 \qquad (5.1)$$

При фиксированных перемещениях на S_u ($\dot{u}_{i0} = 0$) из уравнения виртуальных работ (1.4) имеем

$$\int_v [\dot{\sigma}_{ij}^{(e)} - \dot{\sigma}_{ij}]\dot{\varepsilon}_{ij}\, dv = 0 \qquad (5.2)$$

Вычитая из (5.1) два раза (5.2) и имея в виду обозначения (1.11), получим

$$\int_v \{\dot{\sigma}_{ij}[\dot{\varepsilon}_{ij} + \alpha\dot{\theta}\delta_{ij}] - \dot{\sigma}_{ij}^{(e)}[\dot{\varepsilon}_{ij}^{(e)} + \alpha\dot{\theta}\delta_{ij}]\}\, dv \geqslant 0 \qquad (5.3)$$

Таким образом, доказана теорема.

При фиксированных перемещениях на поверхности S_u работа приращений напряжений на сумме приращений полных и температурных деформаций для упруго-пластического материала не меньше, чем для упругого.

Пользуясь неравенствами (3.1) и (5.3), можно записать

$$n = \frac{\int_v \dot{\sigma}_{ij}^{(e)}\dot{\varepsilon}_{ij}^{''(e)}\, dv}{\int_v \dot{\sigma}_{ij}^{(e)}[\dot{\varepsilon}_{ij}^{(e)} + \alpha\dot{\theta}\delta_{ij}]dv} \geqslant \frac{\int_v \dot{\sigma}_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij}^{''} dv}{\int_v \dot{\sigma}_{ij}[\dot{\varepsilon}_{ij} + \alpha\dot{\theta}\delta_{ij}]\, dv} \geqslant 0 \qquad (5.4)$$

Неравенство (5.4) означает, что при фиксированных перемещениях на S_u на приращения чисто пластических деформаций израсходуется не больше, чем n-ая часть той работы, которая совершается приращениями напряжений на сумме полных приращений деформаций и температурных расширений.

Эта оценка, очевидно, имеет смысл лишь при $n < 1$. Здесь полезно заметить, что так как в числителе выражения n интеграл фактически распространяется не на весь объем тела v, а на ту его часть, где скорости пластических деформаций отличны от нуля, то случай $n<1$ может оказаться довольно общим.

6. Рассмотрим случай, когда при постоянных массовых силах ($\dot{X}_i=0$) и поверхностных нагрузках ($\dot{P}_i=0$) на S_u заданы отличные от нуля скорости $\dot{u}_{i0}$ (например, случай штампов). Из уравнения виртуальных работ следует

$$\int_v \dot{\sigma}_{ij}^{(e)}[\dot{\varepsilon}_{ij}^{n}-\dot{\varepsilon}_{ij}^{(e)n}]\,dv=0 \tag{6.1}$$

Вычитая из выражения J два раза (6.1), получим

$$\int_v [\dot{\sigma}_{ij}^{(e)}\dot{\varepsilon}_{ij}^{(e)n}-\dot{\sigma}_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij}^{n}]\,dv\geqslant 0 \tag{6.2}$$

При стационарных температурных полях из (6.2) с учетом уравнения виртуальных работ имеем

$$\int_v [\dot{\sigma}_{ij}^{(e)}\dot{\varepsilon}_{ij}^{(e)}-\dot{\sigma}_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij}]dv=\int_{S_u}[\dot{\sigma}_{ij}^{(e)}n_j-\dot{\sigma}_{ij}n_j]\dot{u}_{i0}ds\geqslant 0 \tag{6.3}$$

то есть при одинаковых скоростях на S_u работа приращений контактных напряжений в случае упругого материала не меньше, чем в случае упруго-пластического.

7. Из (2.9) с учетом (2.11) и постулата Друккера получим

$$\int_v [\dot{\sigma}_{ij}^{(e)}\dot{\varepsilon}_{ij}^{(e)n}+\dot{\sigma}_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij}^{n}-2\dot{\sigma}_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij}^{(e)n}]\,dv\geqslant 0 \tag{7.1}$$

Складывая неравенства (5.1) и (7.1), приходим к результату

$$\int_v [\dot{\sigma}_{ij}^{(e)}\dot{\varepsilon}_{ij}^{n}-\dot{\sigma}_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij}^{(e)n}]\,dv\geqslant 0 \tag{7.2}$$

Для стационарных температурных полей это означает, что работа приращений напряжений при упругой постановке на приращениях деформаций реального упруго-пластического тела не меньше, чем работа приращений реальных напряжений на приращениях упругих деформаций.

Пользуясь случаем, автор приносит благодарность профессору В. Д. Клюшникову за обсуждение настоящей работы и за ценные советы.

Институт механики
АН Армянской ССР

Поступила 14 XII 1971

Ռ. Մ. ԿԻՐԱԿՈՍՅԱՆ

ՈՒԺԱՅԻՆ ԵՎ ՋԵՐՄԱՅԻՆ ՈՉ ՍՏԱՑԻՈՆԱՐ ԱԶԴԵՑՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԴԵՊՔՈՒՄ ՄԱՐՄԻՆՆԵՐԻ ԱՌԱՁԳԱ-ՊԼԱՍՏԻԿԱԿԱՆ ՀԱՎԱՍԱՐԱԿՇՌՈՒԹՅԱՆ ՎԵՐԱԲԵՐՅԱԼ ՄԻՆԻՄԱԼ ՍԿԶԲՈՒՆՔՆԵՐ ԵՎ ՄԻ ՔԱՆԻ ԹԵՈՐԵՄՆԵՐ

Ամփոփում

Դիտարկվում է ջերմային և ուժային ոչ ստացիոնար ազդեցությունների տակ գտնվող մարմինների առաձգա-պլաստիկական քվազիստատիկ հավասարակշռությունը։ Ընդհանրացվում են առաձգա-պլաստիկական եզրային խնդրի լարումների փոփոխման և դեֆորմացիաների արագությունների մինիմալ սկզբունքները ոչ ստացիոնար ջերմային դաշտերի համար։ Կամայական ամրապնդվող նյութի դեպքում ջերմաառաձգական լուծումների բազայի վրա ստացված է պլաստիկական դեֆորմացիաների աճերի վրա իսկական լարումների աճերի կատարած աշխատանքի համար վերին գնահատական։ Ապացուցվում են եզրային խնդրի ջերմաառաձգական և ջերմաառաձգապլաստիկական դրվածքներով լուծումները միմյանց հետ կապող մի քանի թեորեմներ և անհավասարություններ։

MINIMUM PRINCIPLES AND SOME THEOREMS ON ELASTIC—PLASTIC EQUILIBRIUM OF BODIES UNDER NONSTATIONARY POWER AND TEMPERATURE EFFECTS

R. M. KIRAKOSIAN

Summary

Quasi-static elastic-plastic equilibrium of bodies under nonstationary power and temperature effects is considered. The minimum principles of the elastic-plastic boundary problem for the rates of stress-strain variation in the case of nonstationary temperature fields are generalized. For arbitrary hardened materials the rating from above for increments of actual stresses on increments of plastic strains is obtained on the basis of thermoelastic solutions. Some theorems and inequalities combining the solutions of the boundary probem in thermoelastic and thermoelastoplastic statements are derived.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Койтер В. Т.* Общие теоремы теории упруго-пластических сред. ИЛ, 1961.