

А. С. ВОЛЬМИР. А. Т. ПОНОМАРЕВ

НЕЛИНЕЙНЫЕ ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ ЗАМКНУТЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК

В последнее время в литературе все большее внимание уделяется нелинейным задачам, относящимся к параметрическим колебаниям тонкостенных конструкций, так как процесс колебаний может сопровождаться их прощелкиванием.

Проблеме поведения упругих систем при параметрических колебаниях посвящены монография В. В. Болотина [2], работы С. А. Амбарцумяна и сотрудников его школы [1] и ряда других авторов. Основная часть исследований касалась колебаний стержней и пластинок. Параметрическим же колебаниям оболочек посвящены лишь отдельные статьи [4]—[8].

В данной работе рассмотрены нелинейные параметрические колебания замкнутых круговых шарнирно опертых оболочек, возбуждаемые пульсирующей нагрузкой, действующей в осевом направлении; волновые процессы в срединной поверхности оболочки не учитывались.

Выпишем динамическую систему дифференциальных уравнений, описывающую большие прогибы оболочек с учетом конструкционного демпфирования [3]:

$$\frac{D}{h} \nabla^2 \nabla^2 w = L(w, \Phi) + \frac{1}{R} \Phi_{,xx} - \varepsilon w_{,t} - \frac{\gamma}{g} w_{,tt} \quad (1)$$

$$\frac{1}{E} \nabla^2 \nabla^2 \Phi = -\frac{1}{2} L(w, w) - \frac{1}{R} w_{,xx} \quad (2)$$

Здесь x и y — координаты, отсчитываемые вдоль образующей и по дуге оболочки; w — полный прогиб; Φ — функция напряжений в срединной поверхности; h — толщина оболочки; D — цилиндрическая жесткость; γ — удельный вес; ε — коэффициент конструкционного демпфирования; t — время. Индексы после запятой обозначают дифференцирование по соответствующей переменной; ∇^2 — двумерный оператор Лапласа; L — известный билинейный оператор.

Полный прогиб аппроксимируем с помощью выражения типа

$$w = f(t) [\sin \alpha x \sin \beta y + \psi(t) \sin^2 \alpha x + \varphi(t)] \quad (3)$$

где $\alpha = m\pi/l$, $\beta = n/R$; m — число полуволи вдоль образующей оболочки; n — число волн по окружности; l — длина оболочки; $f(t)$ — стрела прогиба; $\psi(t)$ и $\varphi(t)$ — параметры прогиба; параметр $\varphi(t)$ определяется из условия замкнутости оболочки.

Подставим выражение (3) в правую часть уравнения (2) и после интегрирования найдем функцию Φ .

$$\Phi = k_1 \cos 2\alpha x + k_2 \cos 2\beta y + k_3 \sin \alpha x \sin \beta y + \\ + k_4 \sin \alpha x \sin \beta y - \frac{p y^2}{2} \quad (4)$$

Здесь под p будем понимать функцию времени

$$p = p_0 + p_1 \cos \theta t \quad (5)$$

где θ — частота возбуждающей нагрузки.

Коэффициенты k_i ($i = 1, 2, 3, 4$) равны:

$$k_1 = \frac{1}{32} \frac{\beta^2}{\alpha^2} f^2 - \frac{1}{8R\alpha^2} \psi f, \quad k_2 = \frac{1}{32} \frac{\alpha^2}{\beta^2} f^2 \quad (6) \\ k_3 = \frac{\alpha^2 f}{R(\alpha^2 + \beta^2)^2} - \frac{\alpha^2 \beta^2 f^2}{(\alpha^2 + \beta^2)^2} \psi, \quad k_4 = \frac{\alpha^2 \beta^2 f^2}{(9\alpha^2 + \beta^2)^2} \psi$$

Подставляя найденное значение Φ в правую часть уравнения (1) и применяя процедуру Бубнова-Галеркина, приходим к системе двух нелинейных дифференциальных уравнений относительно функций $\zeta = f(\zeta, \psi, t)$ и $\psi = f(\zeta, \psi, t)$. Но, как показано в работе [7], влияние параметра $\psi(t)$ на характер изменения максимального прогиба во времени невелико. Поэтому можно ограничиться лишь уравнением для $\zeta = f(\zeta, \psi, t)$ и параметр $\psi(t)$ находить для случая статического процесса выпучивания оболочки. Тогда нелинейное дифференциальное уравнение, включающее параметр прогиба, величину и частоту возбуждающей силы, в безразмерной форме запишется в следующем виде:

$$\ddot{\zeta} + \Delta \dot{\zeta} + \Omega^2 (1 - 2\mu \cos 2\tau) \zeta - C_0 C_1 \psi \zeta^2 + C_0 (C_2 + \psi^2 C_3) \zeta^3 = 0 \quad (7)$$

$$\psi = - \frac{L_1 \zeta^2}{L_2 \zeta^2 + L_3} \quad (8)$$

Здесь введены обозначения

$$p^* = \frac{pR}{Eh}, \quad \zeta = \frac{f}{h}, \quad \gamma = \frac{n^2 h}{R}, \quad \rho = \frac{\alpha}{\beta}$$

$$\tau = \frac{t\theta}{2}, \quad C_0 = \frac{4\omega_0^2 \gamma \rho^2}{\theta^2}, \quad \omega_0^2 = \frac{gE}{\gamma R^2}, \quad \Delta = \frac{h}{R} \frac{2\omega_0}{\theta} \bar{\varepsilon}$$

$$\bar{\varepsilon} = \varepsilon \frac{R^2}{h} \sqrt{\frac{g}{E\gamma}}, \quad \mu = \frac{\frac{P_1^*}{P_0^*}}{2 \left(1 - \frac{P_0^*}{P_n^*} \right)}, \quad \Omega^2 = \frac{4\omega_0^2}{\theta^2} \gamma \rho^2 \left(1 - \frac{P_0^*}{P_n^*} \right)$$

$$C_1 = \frac{1}{4\rho^2} \left[1 + \frac{8\rho^4}{(1 + \rho^2)^2} \right] + \frac{\rho^2}{(1 + \rho^2)^2}, \quad C_2 = \frac{1}{16} \frac{(1 + \rho^4)}{\rho^2} \gamma$$

$$\begin{aligned}
 C_3 &= \gamma \rho^2 \left[\frac{1}{(1 + \rho^2)^2} + \frac{1}{(1 + 9\rho^2)^2} \right] \\
 L_1 &= \frac{1}{16\rho^2} \left[1 + \frac{8\rho^4}{(1 + \rho^2)^2} \right] \\
 L_2 &= \frac{1}{16} \gamma \frac{(1 + \rho^4)}{\rho^2} - \frac{1}{2} \gamma \rho^2 \left[\frac{1}{(1 + \rho^2)^2} + \frac{1}{(1 + 9\rho^2)^2} \right] \\
 L_3 &= \frac{1}{12(1 - \kappa^2)} \gamma \frac{(1 + \rho^2)^2}{\rho^2} + \frac{\rho^2}{\gamma(1 + \rho^2)^2} - \frac{1}{3(1 - \kappa^2)} \gamma \rho^2 - \frac{1}{4\gamma\rho^2}
 \end{aligned} \quad (9)$$

здесь κ — коэффициент Пуассона.

Параметр верхней критической нагрузки p_n^* для „идеальной“ оболочки равен при $\zeta \rightarrow 0$

$$p_n^* = \frac{1}{12(1 - \kappa^2)} \frac{(1 + \rho^2)^2}{\rho^2} \gamma + \frac{\rho^2}{(1 + \rho^2)^2} \frac{1}{\gamma} \quad (10)$$

Далее, минимизируя соотношение (10) по числу волн вдоль окружности n , получим известную формулу для p_n^*

$$(p_n^*)_{\min} = \frac{1}{\sqrt{3(1 - \kappa^2)}} \approx 0.605 \quad (11)$$

Затем, полагая приближенно $\psi = -L_2\zeta/L_3$, уравнение (7) перепишем в виде

$$\zeta_{, \tau\tau} + \Delta \zeta_{, \tau} + \Omega^2(1 - 2\mu \cos 2\tau) + N_1 \zeta^3 + N_2 \zeta^5 = 0 \quad (12)$$

где

$$N_1 = C_0 \left(C_1 \frac{L_1}{L_3} + C_2 \right), \quad N_2 = C_0 C_3 \left(\frac{L_1}{L_3} \right)^2$$

В дальнейшем будем рассматривать поведение системы вблизи главной области неустойчивости $\left(\nu = \frac{\theta}{2\omega_0} \approx 1 \right)$ и исследовать периодическое движение с периодом 2π . Решение уравнения (12), описывающее поведение оболочки при параметрических колебаниях, ищем в виде

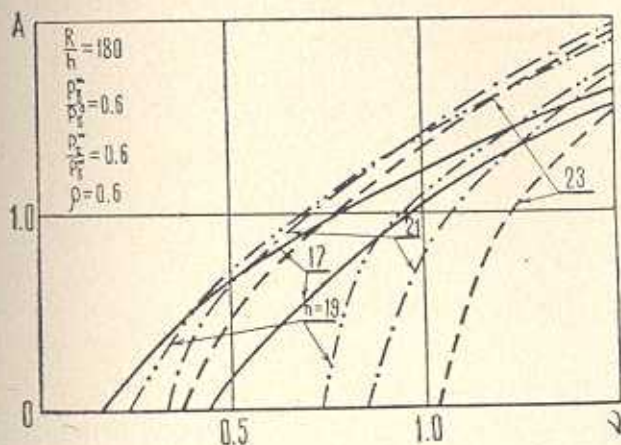
$$\zeta(\tau) = a \sin \tau + b \sin 3\tau \quad (13)$$

Здесь a и b — некоторые коэффициенты. Система разрешающих алгебраических уравнений была получена подстановкой зависимости (13) в (12) и сравнением коэффициентов при одинаковых гармониках; влияние высших гармоник не учитывалось.

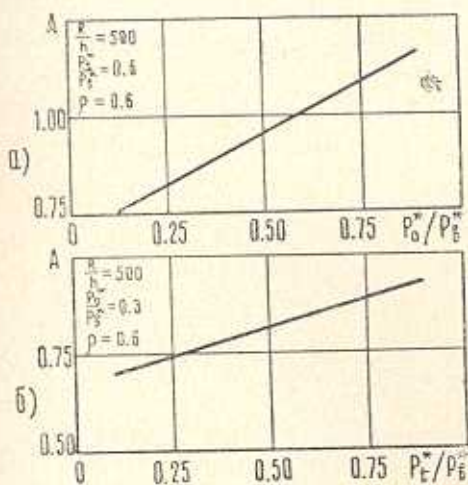
Исходя из полученной системы разрешающих уравнений, с помощью ЭЦВМ были проведены вычисления для оболочек с отношением $R/h = 180, 500, 800$ (считалось $\Delta = 0$). При этом варьировались коэффициент формы волнообразования оболочки в пределах $0.2 \leq \rho \leq 1.2$, число волн вдоль окружности n , а также соотношение между параметрами

трами возбуждающей нагрузки p_0^*/p_a^* и p_i^*/p_a^* . Результаты вычислений представлены в виде графиков.

На фиг. 1 показано влияние числа n на амплитудно-частотные кривые $A = f(\nu)$ для оболочки заданной геометрии, коэффициентов пульсирующей нагрузки и формы вмятины; полагаем $A^2 = a^2 + b^2$. Соответствующие различным кривым числа n указаны на графике.



Фиг. 1

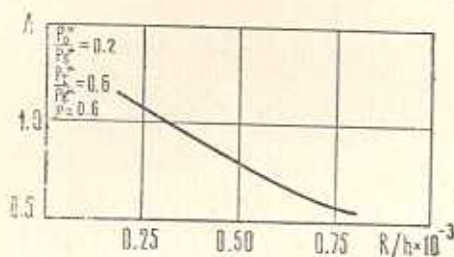


Фиг. 2

На фиг. 2а и 2б нанесены кривые изменения амплитуды колебаний A в функции p_0^*/p_a^* и p_i^*/p_a^* . Как видно из графиков фиг. 2а и 2б, величина A повышается с увеличением параметров p_0^*/p_a^* и p_i^*/p_a^* , причем в большей степени при изменении соотношения p_0^*/p_i^* .

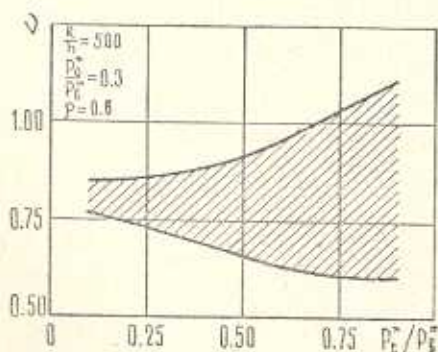
Далее остановимся на фиг. 3, иллюстрирующей зависимость амплитуды колебаний A от соотношения R/h . Интересной особенностью кривой фиг. 3 является ослабление влияния нелинейности системы на характеристики прогиба при параметрических колебаниях с уменьшением относительной толщины оболочки.

Оказывается, что параметрические колебания происходят с числом волн по дуге n , в значительной степени отличающемся от случая статического сжатия, а также от процесса динамического нагружения сжимающими усилиями.

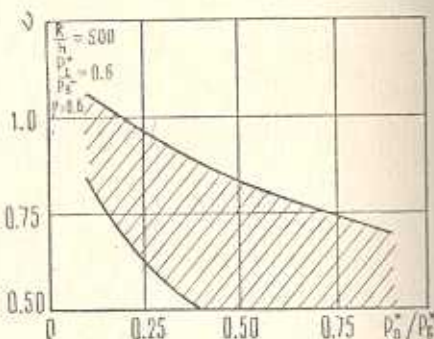


Фиг. 3

Так, например, если для оболочки с $R/h = 180$ при средней скорости нагружения ($2 \cdot 10^9$ кг/см²сек) процесс выпучивания происходит с образованием числа волн по окружности порядка $n = 10$, то параметрические колебания такой же оболочки происходят при $n = 20$. Это соотношение сохраняется и для более тонких оболочек. Из этого следует, что процесс нелинейных параметрических колебаний происходит с проявлением форм потери устойчивости, существенно более высоких, чем при динамическом нагружении. Отсюда вытекает возможность повышения несущей способности конструкции.



Фиг. 4



Фиг. 5

Графики фиг. 4 и 5 иллюстрируют расположение зон неустойчивых колебаний оболочки (заштрихованные области) в зависимости от изменения параметров p_1^*/p_n^* и p_0^*/p_n^* . Анализ этих данных показывает,

что, если зона неустойчивости при увеличении коэффициента p_0^*/p_n^* расширяется, то при возрастании отношения p_0^*/p_n^* вероятность наступления параметрических колебаний уменьшается в связи с возможностью более ранней статической потери устойчивости оболочки.

Воспитно-воздушная инженерная академия
им. проф. Н. Е. Жуковского

Поступила 28 I 1972

Ա. Ս. ՎՈԼՄԻՐ, Ա. Տ. ՊՈՆՈՄԱՐԵՎ

ՓԱԿ ԳՂԱՆԱՅԻՆ ԹԱԳԱՆԹՆԵՐԻ ՈՉ ԳԾԱՅԻՆ ՊԱՐԱՄԵՏՐԱԿԱՆ ՏԱՏԱՆՈՒԹՅՆԵՐԸ

Ս մ փ ո փ ո ս մ

Ուսումնասիրվում է առանցքային բարխող բևռի ազդեցության տակ զտեղծող զլանային թաղանթի դինամիկական վարքը:

Թաղանթների տեսության հիմնական ոչ զծային հավասարումները լուծվում են Բուրնոլի-Գալլորկինի արարողության և Կոխլովի-Բոգոլյուբովի եզրնակի օղնություններով:

Դիտարկվում է տատանումների ամպլիտուդայի և հաճախականության պարամետրի միջև կապակցությունը: Որոշվում են ամպլիտուդաների նշանակալից մեծացման գոտիները:

NONLINEAR PARAMETRIC VIBRATION OF CLOSED CYLINDRICAL SHELLS

A. S. VOL'MIR, A. T. PONOMAREV

S u m m a r y

Dynamic behaviour of cylindrical shells under the effect of axial pulse load is investigated. The fundamental nonlinear equations of the theory of shells are solved by the Boobnov—Galerkin procedure and the Krylov—Bogolyubov method. The dependence between vibration amplitude and frequency parameter is considered. The zones of significant growing in amplitudes are defined.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Амбарцумян С. А., Гнуни В. Ц. Об устойчивости и колебаниях анизотропных пластин. Изв. АН СССР, ОТН, Мех. и маш., № 1, 1960.
2. Болотин В. В. Динамическая устойчивость упругих систем. М., 1956.
3. Вольмир А. С. Устойчивость деформируемых систем. М., 1967.
4. Гнуни В. Ц. К теории динамической устойчивости оболочек. Изв. АН СССР, ОТН, Мех. и маш., № 1, 1961.
- 4 Известия АН Армянской ССР, Механика, № 2.

5. Гнуни В. Ц. О границах динамической неустойчивости оболочек. Тр. по теории оболочек, Казань, 1960.
6. Гнуни В. Ц. О параметрически возбуждаемых колебаниях слоистых анизотропных оболочек. Изв. АН Арм. ССР, серия физ.-мат. наук, т. 15, № 3, 1962.
7. Ильямов М. А., Сахабутдинов Ж. М. Параметрически возбуждаемые колебания цилиндрической оболочки, заполненной сжимаемой жидкостью или газом. Теория пластин и оболочек. Изд. „Наука“, М., 1971.
8. Yao J. C. Dynamic stability of cylindrical shells under static and periodic axial and radial loads. AIAA journal, 1, № 6, 1963.