ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXVI, № 2, 1973 Механика

А. А. АГАЛОВЯН

О ПОГРАНСЛОЕ ОРТОТРОПНЫХ ПЛАСТИНОК

Теория внутреннего напряженного и деформированного состояния изотропных пластинок методом асимптотического интегрирования уравнений трехмерной задачи теории упругости построена в работах [1, 2], а для изгиба ортотропных пластинок—в [3, 4]. Внутреннее напряженное состояние пластинки описывается основным итерационным процессом. Исходное приближение этого процесса эквивалентно теории Кирхгофа. Этим процессом невозможно описать все упругие явления в пластинке, в частности, краевые эффекты. Следовательно, данными этого процесса невозможно удовлетворять всем граничным условиям на боковой поверхности пластинки. Для устранения неувязки при выполнении граничных условий и описания краевого напряженного состояния строится погранслой—такое напряженное и деформированное состояние, которое удовлетворяет однородным граничным условиям на плоскостях $z = \pm h$ и быстро затухает при удалении от некоторой фиксированной линии (края) срединной плоскости в глубь пластинки.

В данной работе погранслой строится для ортотропных прямоугольных пластинок, используя свойства функций типа погранслоя [5, 6]. Такой подход позволил получить полное решение типа погранслоя в кососимметричной и симметричной задачах прямоугольных как изотропных, так и анизотропных пластинок. Несколько иным подходом погранслой для изотропных пластинок и оболочек построен в [1, 7, 8].

1. Для построения внутреннего напряженного и деформированного состояния в уравнениях трехмерной задачи теории упругости (уравнения равновесия, соотношения упругости, деформация-перемещение) делается замена переменных по формулам

$$x = a\xi, \quad y = a\eta, \quad z = h\zeta \tag{1.1}$$

где a—характерный размер, $2h$—толщина пластинки. Затем все напряжения и перемещения представляются в виде асимптотических рядов по степеням малого параметра $\varepsilon = h/a$ и подстановкой этих разложений в указанные выше уравнения строится итерационный процесс для определения неизвестных коэффициентов, входящих в эти разложения. Этим процессом вообще определяется напряженное состояние, проникающее в глубь пластинки и удовлетворяющее неоднородным граничным условиям на плоскостях $z = \pm h$.

Целью построения погранслоя, как было отмечено выше, является найти такие решения указанных выше уравнений, которые удовлетворяют нулевым граничным условиям (для τ_{xz}, τ_{yz}, σ_z) на плоскостях $z = \pm h$, быстро затухают при удалении от некоторой фиксированной линии (края) срединной плоскости в глубь пластинки и содержат достаточно произволов для взаимодействия с внутренним напряженным состоянием. Функции, удовлетворяющие этим требованиям, являются функциями типа погранслоя [6].

Пусть край пластинки задается уравнением $\xi = 0$ и пластинка простирается вдоль $\xi > 0$. Для построения погранслоя вблизи этого края в преобразованных по формулам (1.1) уравнениях теории упругости сделаем обычную в теории погранслоя замену переменной

$$t = \frac{\xi}{\varepsilon}, \quad \eta = \eta, \quad \zeta = \zeta \qquad (\varepsilon = h/a) \tag{1.2}$$

Вышеуказанные уравнения теории упругости для прямоугольных ортотропных пластинок примут вид:
уравнения равновесия

$$\begin{gathered}
\varepsilon^{-1} \frac{\partial \sigma_x}{\partial t} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial \eta} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial \zeta} = 0 \\
\varepsilon^{-1} \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial t} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial \eta} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial \sigma_z}{\partial \zeta} = 0 \\
\varepsilon^{-1} \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial t} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial \eta} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial \zeta} = 0
\end{gathered} \tag{1.3}$$

соотношения упругости

$$\begin{gathered}
\varepsilon^{-1} \frac{\partial u}{\partial t} = a_{11}\sigma_x + a_{12}\sigma_y + a_{13}\sigma_z \\
\varepsilon^{-1} \frac{\partial w}{\partial \zeta} = a_{13}\sigma_x + a_{23}\sigma_y + a_{33}\sigma_z \\
\frac{\partial v}{\partial \eta} = a_{12}\sigma_x + a_{22}\sigma_y + a_{23}\sigma_z \\
\varepsilon^{-1} \left(\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial \zeta} \right) = a_{55} \tau_{xz} \\
\varepsilon^{-1} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial \eta} = a_{66} \tau_{xy} \\
\varepsilon^{-1} \frac{\partial v}{\partial \zeta} + \frac{\partial w}{\partial \eta} = a_{44} \tau_{yz}
\end{gathered} \tag{1.4}$$

где σ_i, τ_{ik} — напряжения, $u = \dfrac{U}{a}$, $v = \dfrac{V}{a}$, $w = \dfrac{W}{a}$ — безразмерные перемещения, a_{ik} — коэффициенты упругости.

Решение уравнений (1.3) и (1.4), удовлетворяющее однородным граничным условиям (для τ_{xz}, τ_{yz}, σ_z) при $\zeta = \pm 1$ и имеющее затухающий характер при $t \to +\infty$, будем искать в виде функций типа погранслоя

$$Q_i=\sum_{s=0}^{N}\varepsilon^{-\varkappa_i+s}\,Q_{i(1)}^{(s)}(\eta,\zeta)e^{-k(\eta,\zeta)t}+\sum_{s=0}^{N}\varepsilon^{-\mu_i+s}\,Q_{i(2)}^{(s)}(\eta,\zeta)e^{-\lambda(\eta,\zeta)t} \tag{1.5}$$

где Q_i—любое из напряжений и перемещений, $\varkappa_i$, μ_i—показатели интенсивности: вещественные числа, различные пока для различных напряжений и перемещений; $k(\eta,\zeta)$, $\lambda(\eta,\zeta)$—функции изменяемости, которые могут быть и комплексными, но всегда $\operatorname{Re} k(\eta,\zeta)>0$, $\operatorname{Re}\lambda(\eta,\zeta)>0$, $\varkappa_i$ и μ_i должны подбираться так, чтобы после подстановки (1.5) в (1.3) и (1.4) и приравнивания в каждом уравнении соответствующих коэффициентов при одинаковых степенях ε, начиная с низшей, получить непротиворечивые уравнения для определения $Q_{i(1)}^{(s)}$ и $Q_{i(2)}^{(s)}$. Указанные требования будут удовлетворены, если

$$\varkappa_{\sigma_x}=\varkappa_{\sigma_y}=\varkappa_{\tau_{xy}}=\varkappa_{\tau_{xz}}=\varkappa_{\tau_{yz}}=\varkappa_{\sigma_z}=\varkappa,\quad \varkappa_u=\varkappa_v=\varkappa_w=\varkappa+1 \tag{1.6}$$

$$\mu_{\sigma_x}=\mu_{\sigma_y}=\cdots=\mu_{\sigma_z}=\mu,\quad \mu_u=\mu_v=\mu_w=\mu+1 \tag{1.7}$$

Подставив (1.5) в уравнения (1.3) и (1.4) и учитывая (1.6) и (1.7), получим

$$-k\tau_{xy(1)}^{(s)}+\frac{\partial\tau_{yz(1)}^{(s)}}{\partial\zeta}-t\frac{\partial k}{\partial\zeta}\tau_{yz(1)}^{(s)}=-\frac{\partial\sigma_{y(1)}^{(s-1)}}{\partial\eta}+t\frac{\partial k}{\partial\eta}\sigma_{y(1)}^{(s-1)}$$

$$-kv_{(1)}^{(s)}-a_{66}\tau_{xy(1)}^{(s)}=-\frac{\partial u_{(1)}^{(s-1)}}{\partial\eta}+t\frac{\partial k}{\partial\eta}u_{(1)}^{(s-1)}\quad (1,\ 2;\ k,\ \lambda)$$

$$\frac{\partial v_{(1)}^{(s)}}{\partial\zeta}-t\frac{\partial k}{\partial\zeta}v_{1}^{(s)}-a_{44}\tau_{yz(1)}^{(s)}=-\frac{\partial w_{(1)}^{(s-1)}}{\partial\eta}+t\frac{\partial k}{\partial\eta}w_{(1)}^{(s-1)} \tag{1.8}$$

$$-k\sigma_{x(1)}^{(s)}+\frac{\partial\tau_{xz(1)}^{(s)}}{\partial\zeta}-t\frac{\partial k}{\partial\zeta}\tau_{xz(1)}^{(s)}=-\frac{\partial\tau_{xy(1)}^{(s-1)}}{\partial\eta}+t\frac{\partial k}{\partial\eta}\tau_{xy(1)}^{(s-1)}$$

$$-k\tau_{xz(1)}^{(s)}+\frac{\partial\sigma_{z(1)}^{(s)}}{\partial\zeta}-t\frac{\partial k}{\partial\zeta}\sigma_{z(1)}^{(s)}=-\frac{\partial\tau_{yz(1)}^{(s-1)}}{\partial\eta}+t\frac{\partial k}{\partial\eta}\tau_{yz(1)}^{(s-1)}$$

$$-ku_{(1)}^{(s)}=a_{11}\sigma_{x(1)}^{(s)}+a_{12}\sigma_{y(1)}^{(s)}+a_{13}\sigma_{z(1)}^{(s)}$$

$$\frac{\partial w_{(1)}^{(s)}}{\partial\zeta}-t\frac{\partial k}{\partial\zeta}w_{(1)}^{(s)}=a_{13}\sigma_{x(1)}^{(s)}+a_{23}\sigma_{y(1)}^{(s)}+a_{33}\sigma_{z(1)}^{(s)} \tag{1.9}$$

$$-kw_{(1)}^{(s)}+\frac{\partial u_{(1)}^{(s)}}{\partial\zeta}-t\frac{\partial k}{\partial\zeta}u_{(1)}^{(s)}=a_{55}\tau_{xz(1)}^{(s)}$$

$$a_{12}\sigma_{x(1)}^{(s)}+a_{22}\sigma_{y(1)}^{(s)}+a_{23}\sigma_{z(1)}^{(s)}=\frac{\partial v_{(1)}^{(s-1)}}{\partial\eta}-t\frac{\partial k}{\partial\eta}v_{(1)}^{(s-1)}$$

$$(1,\ 2;\ k,\ \lambda)$$

В (1.8) и (1.9) и в дальнейшем обозначение $(1,\ 2;\ k,\ \lambda)$ означает, что имеют место и вторые системы уравнений, которые получаются от этих заменой k на λ, нижнего индекса при напряжениях и перемещениях (1) на (2), то есть уравнения для определения величин с индексом (2) по виду формально ничем не отличаются от уравнений для определения величин с индексом (1). Величины $Q_{(i)}^{(j)} \equiv 0$ при $j<0$.

Из уравнений (1.8) и (1.9) вытекает

$$\frac{\partial k}{\partial \zeta}=0, \quad \frac{\partial k}{\partial \eta}=0 \qquad (k, \lambda) \tag{1.10}$$

то есть $k=\mathrm{const}$, $\lambda=\mathrm{const}$, но по свойству погранслоя $\operatorname{Re} k, \lambda>0$. Для определения величин k, λ в дальнейшем будут получены характеристические уравнения, следующие из граничных условий

$$\tau_{xz}=0, \quad \sigma_z=0, \quad \tau_{yz}=0 \quad \text{при } \zeta=\pm 1 \tag{1.11}$$

2. Уравнения (1.8) составляют полную систему для определения величин $\tau_{xy(i)}^{(s)}, \tau_{yz(i)}^{(s)}, v_{(i)}^{(s)}$ $(i=1, 2)$. Это решение будем называть решением типа антиплоского погранслоя. Ввиду (1.10) из (1.8) следует

$$\tau_{xy(1)}^{(s)}=-\frac{k}{a_{66}} v_{(1)}^{(s)}+\frac{1}{a_{66}} \frac{\partial u_{(1)}^{(s-1)}}{\partial \eta}$$

$$(1, 2;\ k, \lambda) \tag{2.1}$$

$$\tau_{yz(1)}^{(s)}=\frac{1}{a_{44}} \frac{\partial v_{(1)}^{(s)}}{\partial \zeta}+\frac{1}{a_{44}} \frac{\partial w_{(1)}^{(s-1)}}{\partial \eta}$$

$$\frac{\partial^2 v_{(1)}^{(s)}}{\partial \zeta^2}+b^2 k^2 v_{(1)}^{(s)}=R_{(1)}^{(s-1)} \quad (1, 2;\ k, \lambda) \tag{2.2}$$

где

$$b^2=\frac{a_{44}}{a_{66}}, \qquad R_{(1)}^{(s-1)}=b^2 k \frac{\partial u_{(1)}^{(s-1)}}{\partial \eta}-\frac{\partial^2 w_{(1)}^{(s-1)}}{\partial \eta \partial \zeta}-a_{44} \frac{\partial \sigma_{y(1)}^{(s-1)}}{\partial \eta} \tag{2.3}$$

Тот факт, что для определения $v_{(1)}^{(s)}$ получили обыкновенное дифференциальное уравнение (переменная η входит как параметр), хорошо согласуется со свойством погранслоя [6]. Общее решение уравнения (2.2) имеет вид

$$v_{(1)}^{(s)}=C_{1k}^{(s)}(\eta) \sin bk\zeta+C_{2k}^{(s)}(\eta) \cos bk\zeta+v_{(1)}^{*(s)}, \quad (1, 2;\ k, \lambda) \tag{2.4}$$

где $v_{(1)}^{*(s)}$—частное решение неоднородного уравнения (2.2). Подставив (2.4) в (2.1), получим значения напряжений. В частности, для $s=0$ будем иметь

$$v_{(1)}^{(0)}=C_{1k}^{(0)}(\eta) \sin bk\zeta+C_{2k}^{(0)}(\eta) \cos bk\zeta$$

$$\tau_{xy(1)}^{(0)}=-\frac{k}{a_{66}} v_{(1)}^{(0)} \tag{2.5}$$

$$\tau_{yz(1)}^{(0)}=\frac{bk}{a_{44}}\left[C_{1k}^{(0)}(\eta) \cos bk\zeta-C_{2k}^{(0)}(\eta) \sin bk\zeta\right]$$

$$(1, 2;\ k, \lambda)$$

Потребовав, чтобы $\tau_{yz(1)}^{(0)}\big|_{\zeta=\pm 1}=0$, получим

$$C_{1k}^{(0)} \cos bk - C_{2k}^{(0)} \sin bk = 0 \tag{2.6}$$
$$C_{1k}^{(0)} \cos bk + C_{2k}^{(0)} \sin bk = 0$$

Одновременно $C_{1k}^{(0)}$ и $C_{2k}^{(0)}$ не могут равняться нулю, следовательно, должен равняться нулю определитель системы (2.6). Полученное уравнение и будет являться указанным выше характеристическим уравнением, откуда определится k. Возможны два случая:

а) $\cos bk = 0$, тогда $k = \sqrt{\frac{a_{66}}{a_{44}}}(2n+1)\frac{\pi}{2} \quad (n = 0, 1, 2, \cdots)$ (2.7)

б) $\sin bk = 0$, тогда $k = \sqrt{\frac{a_{66}}{a_{44}}}\pi n \quad (n = 1, 2, \cdots)$ (2.8)

Каждый из этих случаев имеет определенный физический смысл. Случай а) соответствует кососимметричной задаче (изгиб), случай б)—симметричной задаче (растяжение). Для кососимметричной задачи будем иметь

$$v_{(1)}^{(0)} = C_{1n}^{(0)}(\eta) \sin (2n+1)\frac{\pi}{2}\zeta$$

$$\tau_{xy(1)}^{(0)} = -\frac{1}{\sqrt{a_{44}a_{66}}}(2n+1)\frac{\pi}{2}C_{1n}^{(0)}(\eta)\sin (2n+1)\frac{\pi}{2}\zeta \tag{2.9}$$

$$\tau_{yz(1)}^{(0)} = \frac{1}{a_{44}}(2n+1)\frac{\pi}{2}C_{1n}^{(0)}(\eta)\cos (2n+1)\frac{\pi}{2}\zeta \quad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

а для симметричной задачи

$$v_{(1)}^{(0)} = C_{2n}^{(0)}(\eta) \cos \pi n\zeta$$

$$\tau_{xy(1)}^{(0)} = -\frac{\pi n}{\sqrt{a_{44}a_{66}}}C_{2n}^{(0)}(\eta) \cos \pi n\zeta \tag{2.10}$$

$$(n = 1, 2, \cdots)$$

$$\tau_{yz(1)}^{(0)} = -\frac{\pi n}{a_{44}}C_{2n}^{(0)}(\eta)\sin \pi n\zeta$$

3. Уравнения (1.9) составляют полную систему для последовательного определения величин $\sigma_{x(i)}^{(s)}$, $\sigma_{y(i)}^{(s)}$, $\sigma_{z(i)}^{(s)}$, $\tau_{xz(i)}^{(s)}$, $u_{(i)}^{(s)}$, $w_{(i)}^{(s)}$, $(i=1, 2)$. Решение этих уравнений назовем решением типа плоского погранслоя. В (1.9) все величины можно выразить через $w_{(i)}^{(s)}$. Проделав эти выкладки, получим

$$\sigma_{x(1)}^{(s)} = \frac{1}{\Omega_1}\left[\frac{A_1}{k^2}\frac{\partial^3 w_{(1)}^{(s)}}{\partial\zeta^3} + A_2\frac{\partial w_{(1)}^{(s)}}{\partial\zeta}\right] + R_{x(1)}^{(s-1)}$$

$$\sigma_{z(1)}^{(s)} = \frac{1}{A_3\Omega_1}\left[-\frac{A_1A_2}{k^2}\frac{\partial^3 w_1^{(s)}}{\partial\zeta^3} + (\Omega_1 - A_2^2)\frac{\partial w_{(1)}^{(s)}}{\partial\zeta}\right] + R_{z(1)}^{(s-1)}$$

$$\tau_{xz(1)}^{(s)} = \frac{1}{\Omega_1}\left[\frac{A_1}{k}\frac{\partial^2 w_{(1)}^{(s)}}{\partial\zeta^2} + A_2 k w_{(1)}^{(s)}\right] + R_{xz(1)}^{(s-1)} \tag{3.1}$$

$$\sigma_{y(1)}^{(s)} = -\frac{1}{a_{22}}\left[a_{12}\,\sigma_{x(1)}^{(s)} + a_{23}\,\sigma_{z(1)}^{(s)}\right] + \frac{1}{a_{22}}\frac{\partial v_{(1)}^{(s-1)}}{\partial\eta}$$

$$u_{(1)}^{(s)} = -\frac{1}{A_3\Omega_1}\left[\frac{\Omega A_1}{k^3}\frac{\partial^3 w_{(1)}^{(s)}}{\partial\zeta^3} + A_2(\Omega+\Omega_1)\frac{1}{k}\frac{\partial w_{(1)}^{(s)}}{\partial\zeta}\right] + R_{u(1)}^{(s-1)}$$

$$(1,\ 2;\ k,\ \lambda)$$

где

$$R_{x(1)}^{(s-1)} = -\frac{1}{k}\left[-\frac{\partial\tau_{xy(1)}^{(s-1)}}{\partial\eta} - \frac{\Omega}{\Omega_1}\frac{1}{k}\frac{\partial^2\tau_{yz(1)}^{(s-1)}}{\partial\eta\partial\zeta} + \frac{A_{12}}{\Omega_1}\frac{1}{k}\frac{\partial^3 v_{(1)}^{(s-1)}}{\partial\eta\partial\zeta^2}\right]$$

$$R_{z(1)}^{(s-1)} = -\frac{A_2}{A_3}R_{x(1)}^{(s-1)} - \frac{a_{23}}{a_{22}A_3}\frac{\partial v_{(1)}^{(s-1)}}{\partial\eta} \tag{3.2}$$

$$R_{xz(1)}^{(s-1)} = -\frac{\Omega}{k\Omega_1}\left[-\frac{\partial\tau_{yz(1)}^{(s-1)}}{\partial\eta} + \frac{A_{12}}{\Omega}\frac{\partial^2 v_{(1)}^{(s-1)}}{\partial\eta\partial\zeta}\right]$$

$$R_{u(1)}^{(s-1)} = -\frac{\Omega}{A_3 k}R_{x(1)}^{(s-1)} - \frac{A_{11}}{A_3 k}\frac{\partial v_{(1)}^{(s-1)}}{\partial\eta}$$

$$(1,\ 2;\ k,\ \lambda)$$

$$A_1 = \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}{a_{22}},\qquad A_2 = \frac{a_{13}a_{22} - a_{12}a_{23}}{a_{22}},\qquad A_3 = \frac{a_{33}a_{22} - a_{23}^2}{a_{22}}$$

$$\Omega = A_1A_3 - A_2^2,\quad \Omega_1 = \Omega - A_2a_{55} \tag{3.3}$$

$$A_{11} = \frac{A_3a_{12} - A_2a_{23}}{a_{22}},\qquad A_{12} = \frac{A_1a_{23} - A_2a_{12}}{a_{22}}$$

Для определения $w_{(1)}^{(s)}$ получается следующее обыкновенное дифференциальное уравнение (переменная η опять входит как параметр):

$$\frac{\partial^4 w_{(1)}^{(s)}}{\partial\zeta^4} + 2b_1^2k^2\frac{\partial^2 w_{(1)}^{(s)}}{\partial\zeta^2} + k^4b_2^4 w_{(1)}^{(s)} = R_{w(1)}^{(s-1)} \tag{3.4}$$

где

$$(1,\ 2;\ k,\ \lambda)$$

$$R_{w(1)}^{(s-1)} = \frac{1}{A_1}\frac{\partial}{\partial\eta}\left[-k\,\Omega_1\frac{\partial\tau_{xy(1)}^{(s-1)}}{\partial\zeta} - k^2a_{55}A_3\,\tau_{yz(1)}^{(s-1)} - \Omega\frac{\partial^2\tau_{yz(1)}^{(s-1)}}{\partial\zeta^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{k^2}{\Omega}(a_{55}A_3A_{12} - A_{11}\Omega_1)\frac{\partial v_{(1)}^{(s-1)}}{\partial\zeta} + A_{12}\frac{\partial^3 v_{(1)}^{(s-1)}}{\partial\zeta^3}\right] \tag{3.5}$$

$$(1,\ 2;\ k,\ \lambda)$$

$$b_1^2 = \frac{a_{55} + 2A_2}{2A_1},\qquad b_2^4 = \frac{A_3}{A_1} \tag{3.6}$$

Для вывода (3.4) необходимо из последнего уравнения (1.9) определить $\sigma_{y(1)}^{(s)}$, подставить его в третье и четвертое уравнения (1.9), затем из этих и следующего уравнений выразить $\tau^{(s)}_{x(1)}$, $\sigma^{(s)}_{z(1)}$, $\tau^{(s)}_{xz(1)}$ через $u^{(s)}_{(1)}$, $w^{(s)}_{(1)}$ и после подстановки их значений в первые два уравнения исключить $u^{(s)}_{(1)}$.

Общее решение уравнения (3.4) можно легко найти

$$w^{(s)}_{(i)} = \overline{w}^{(s)}_{(i)} + w^{*(s)}_{i} \tag{3.7}$$

где $\overline{w}^{(s)}_{(i)}$—общее решение однородного уравнения, $w^{*(s)}_{(i)}$—частное решение неоднородного уравнения. Подставив (3.7) в (3.1), найдем значения всех напряжений и перемещений типа плоского погранслоя.

Остановимся несколько подробнее на случае $s=0$. Тогда уравнение (3.4) становится однородным. Соответствующее ему характеристическое уравнение имеет корни

$$m_{1,2} = \pm \alpha_1 ki, \quad m_{3,4} = \pm \alpha_2 ki \quad (k, \lambda) \tag{3.8}$$

где

$$\alpha_1 = b_1 \sqrt{1 - \sqrt{1 - \left(\frac{b_2}{b_1}\right)^4}}, \quad \alpha_2 = b_1 \sqrt{1 + \sqrt{1 - \left(\frac{b_2}{b_1}\right)^4}} \tag{3.9}$$

В смысле написания общего решения однородного уравнения (3.4) возможны случаи:

а) $1 - \left(\frac{b_2}{b_1}\right)^4 = 0$, то есть $\alpha_1 = \alpha_2$ (изотропное тело)

б) $1 - \left(\frac{b_2}{b_1}\right)^4 \neq 0$, то есть $\alpha_1 \neq \alpha_2$ (анизотропное тело)

Поэтому функции типа плоского погранслоя для изотропной пластинки будут принципиально отличаться от анизотропной.

4. Изотропная пластинка ($\alpha_1 = \alpha_2 = b_1 = 1$). Общим решением уравнения (3.4) для изотропной пластинки будет ($s=0$)

$$w^{(0)}_{(1)} = D^{(0)}_{1k}(\eta)\cos k\zeta + D^{(0)}_{2k}(\eta)\zeta\sin k\zeta + D^{(0)}_{3k}(\eta)\sin k\zeta + D^{(0)}_{4k}(\eta)\zeta\cos k\zeta$$

$$(1,\ 2;\ k,\ \lambda) \tag{4.1}$$

Подставив (4.1) в (3.1), получим

$$\tau^{(0)}_{xz(1)} = \frac{E}{1+\nu}\{[-kD^{(0)}_{1k} + 2(1-\nu)D^{(0)}_{2k}]\cos k\zeta - kD^{(0)}_{2k}\zeta\sin k\zeta -$$

$$-[kD^{(0)}_{3k} + 2(1-\nu)D^{(0)}_{4k}]\sin k\zeta - kD^{(0)}_{4k}\zeta\cos k\zeta\}$$

$$\sigma^{(0)}_{z(1)} = \frac{E}{1+\nu}\{[kD^{(0)}_{3k} + (1-2\nu)D^{(0)}_{4k}]\cos k\zeta - D^{(0)}_{4k}k\zeta\sin k\zeta + \tag{4.2}$$

$$+[-kD^{(0)}_{1k} + (1-2\nu)D^{(0)}_{2k}]\sin k\zeta + D^{(0)}_{2k}k\zeta\cos k\zeta\}$$

$$(1,\ 2;\ k,\ \lambda)$$

здесь E—модуль упругости, ν—коэффициент Пуассона. Потребуем, чтобы

$$\tau^{(0)}_{xz(1)} = 0, \quad \sigma^{(0)}_{z(1)} = 0 \quad \text{при } \zeta = \pm 1 \quad (1,\ 2) \tag{4.3}$$

получим следующие системы для определения $D_{1k}^{(0)}$, $D_{2k}^{(0)}$, $D_{3k}^{(0)}$, $D_{4k}^{(0)}$:

$$D_{1k}^{(0)} k \cos k - D_{2k}^{(0)} [2(1-\nu)\cos k - k \sin k] = 0$$
$$D_{1k}^{(0)} k \sin k - D_{2k}^{(0)} [(1-2\nu)\sin k + k \cos k] = 0 \tag{4.4}$$
$$D_{3k}^{(0)} k \sin k + D_{4k}^{(0)} [2(1-\nu)\sin k + k \cos k] = 0$$
$$D_{3k}^{(0)} k \cos k + D_{4k}^{(0)} [(1-2\nu)\cos k - k \sin k] = 0 \tag{4.5}$$
$$(k,\ \lambda)$$

Для существования ненулевого решения необходимо, чтобы определители систем (4.4) и (4.5) равнялись нулю. Тогда получим новые характеристические уравнения для „k“. Так как мы уже определили „k“ из системы (2.6), то эти „k“ уже не будут удовлетворять вновь полученным характеристическим уравнениям. Следовательно, из систем (4.4) и (4.5), записанных для „k“, будет вытекать

$$D_{1k}^{(0)} = D_{2k}^{(0)} = D_{3k}^{(0)} = D_{4k}^{(0)} = 0$$

Поэтому

$$\sigma_{x(1)}^{(0)} = \sigma_{y(1)}^{(0)} = \sigma_{z(1)}^{(0)} = \tau_{xz(1)}^{(0)} = u_{(1)}^{(0)} = w_{(1)}^{(0)} \equiv 0 \tag{4.6}$$

Таким образом, отличными от нуля функциями типа плоского погранслоя для исходного приближения будут $\sigma_{x(2)}^{(0)}$, $\sigma_{y(2)}^{(2)}$, $\sigma_{z(2)}^{(0)}$, $\tau_{xy(2)}^{(0)}$, $u_{(2)}^{(0)}$, $w_{(2)}^{(0)}$. Из системы (4.4) ввиду того, что $D_{1k}^{(0)}$ и $D_{2k}^{(0)}$ одновременно не равны нулю, получим

$$\begin{vmatrix} \lambda\cos\lambda & -2(1-\nu)\cos\lambda + \lambda\sin\lambda \\ \lambda\sin\lambda & -(1-2\nu)\sin\lambda - \lambda\cos\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \text{или} \quad \sin 2\lambda - 2\lambda = 0 \tag{4.7}$$

а из системы (4.5) вытекает

$$\begin{vmatrix} \lambda\sin\lambda & 2(1-\nu)\sin\lambda + \lambda\cos\lambda \\ \lambda\cos\lambda & (1-2\nu)\cos\lambda - \lambda\sin\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \text{или} \quad \sin 2\lambda + 2\lambda = 0 \tag{4.8}$$

Нас будут интересовать те корни уравнений (4.7) и (4.8), у которых $\operatorname{Re}\lambda > 0$. Уравнение (4.7) соответствует кососимметричной задаче (изгиб), а уравнение (4.8)—симметричной задаче (растяжение). Таким образом, как и в антиплоском погранслое, функции изменяемости в кососимметричной и симметричной задачах различны.

Трансцендентные уравнения (4.7) и (4.8) хорошо исследованы [9, 10, 11]. Они имеют счетное множество комплексных корней, расположенных симметрично в четырех квадрантах. В табл. 1 приведены значения первых десяти корней уравнений (4.7) и (4.8). В работе [10] приведены значения первых пятидесяти корней для уравнения (4.8).

Имея корни уравнений (4.7) и (4.8), из уравнений (4.4) и (4.5) можно выразить неизвестные $D_1^{(0)}(\eta)$ и $D_3^{(0)}(\eta)$ соответственно через $D_2^{(0)}(\eta)$ и $D_4^{(0)}(\eta)$, следовательно, $w_{(2)}^{(0)}$ будет содержать две произвольные функции от η. Подставив значение $w_{(2)}^{(0)}$ в (3.1) найдем все искомые напряжения и перемещения плоского погранслоя.

Таблица 1

$2\lambda_n = x_n \pm i y_n$

$\sin 2\lambda + 2\lambda = 0$			$\sin 2\lambda - 2\lambda = 0$	
n	x_n	y_n	x_n	y_n
1	4.212392	2.250728	7.497676	2.768678
2	10.712537	3.103148	13.899960	3.352210
3	17.073365	3.551087	20.238518	3.716768
4	23.398355	3.858808	26.554547	3.983142
5	29.748120	4.093704	32.859741	4.193251
6	36.009866	4.283780	39.158817	4.366795
7	42.306827	4.443445	45.454071	4.514640
8	48.600684	4.581103	51.746768	4.643428
9	54.892406	4.702095	58.037662	4.757515
10	61.182590	4.810024	64.327234	4.859917

Величины $\tau_{xy(2)}^{(0)}$, $\tau_{yz(2)}^{(0)}$, $v_{(2)}^{(0)}$ вычисляются по формулам (2.5). Потребовав $\tau_{yz(2)}^{(0)}\big|_{\zeta=\pm 1} = 0$, получим опять уравнения (2.6), где вместо „k“ будет фигурировать „λ“. Так как λ—корень уравнения (4.7) или (4.8), то из (2.6) будет вытекать $C_{1\lambda}^{(0)} = C_{2\lambda}^{(0)} = 0$. Следовательно,

$$\tau_{xy(2)}^{(0)} = \tau_{yz(2)}^{(0)} = v_{(2)}^{(0)} \equiv 0 \tag{4.9}$$

Тот факт, что величину „k“ определили из характеристического уравнения, вытекающего из (2.6), а λ—из характеристического уравнения (4.7) или (4.8), не является ограничением, так как очевидно, что оба эти случая охватывают все возможные случаи. Это обстоятельство в сущности и учтено в представлении (1.5).

Выпишем все функции типа погранслоя исходного приближения для изотропной пластинки. Используя формулы (1.5), (2.1), (2.9), (2.10), (3.1), (4.6) и (4.9), для них получим:
кососимметричная задача (изгиб)

$$\sigma_x = \varepsilon^{\lambda} \frac{E}{1+\nu} \{[\lambda D_{1\lambda} + (2\nu - 3) D_{2\lambda}] \sin \lambda\zeta - \lambda D_{2\lambda} \zeta \cos \lambda\zeta\} e^{-\lambda t}$$

$$\sigma_y = -\varepsilon^{\lambda} \frac{2\nu E}{1+\nu} D_{2\lambda} \sin \lambda\zeta \, e^{-\lambda t}$$

$$\sigma_z = \varepsilon^{\lambda} \frac{E}{1+\nu} \{[-\lambda D_{1\lambda} + (1 - 2\nu) D_{2\lambda}] \sin \lambda\zeta + D_{2\lambda} \lambda\zeta \cos \lambda\zeta\} e^{-\lambda t} \tag{4.10}$$

$$\tau_{xz} = \varepsilon^{\lambda} \frac{E}{1+\nu} \{[-\lambda D_{1\lambda} + 2(1 - \nu) D_{2\lambda}] \cos \lambda\zeta - D_{2\lambda} \lambda\zeta \sin \lambda\zeta\} e^{-\lambda t}$$

$$u = -\varepsilon^{\lambda+1} \frac{1}{\lambda} \{[\lambda D_{1\lambda} + (4\nu - 3) D_{2\lambda}] \sin \lambda\zeta - D_{2\lambda} \lambda\zeta \cos \lambda\zeta\} e^{-\lambda t}$$

$$w = \varepsilon^{\lambda+1} [D_{1\lambda}(\eta) \cos \lambda\zeta + D_{2\lambda}(\eta) \zeta \sin \lambda\zeta] e^{-\lambda t}$$

$$\tau_{xy} = -\varepsilon^{\varkappa}\frac{E}{2(1+\nu)}(2n+1)\frac{\pi}{2}C_n(\eta)\sin(2n+1)\frac{\pi}{2}\zeta e^{-(2n+1)\frac{\pi}{2}t}$$

$$\tau_{yz} = \varepsilon^{\varkappa}\frac{E}{2(1+\nu)}(2n+1)\frac{\pi}{2}C_n(\eta)\cos(2n+1)\frac{\pi}{2}\zeta e^{-(2n+1)\frac{\pi}{2}t} \tag{4.11}$$

$$v = \varepsilon^{\varkappa+1}C_n(\eta)\sin(2n+1)\frac{\pi}{2}\zeta e^{-(2n+1)\frac{\pi}{2}t}$$

$$(n=0,\ 1,\ 2,\cdots)$$

В (4.10) λ — корень характеристического уравнения (4.7). $D_{1\lambda}(\eta)$, $D_{2\lambda}(\eta)$ связаны уравнениями (4.4), из которых независимым является лишь одно уравнение;
симметричная задача (растяжение)

$$\sigma_x = \varepsilon^{\mu}\frac{E}{1+\nu}\{[-\lambda D_{3\lambda}+(2\nu-3)D_{4\lambda}]\cos\lambda\zeta + D_{4\lambda}\lambda\zeta\sin\lambda\zeta\}e^{-\lambda t}$$

$$\sigma_y = -\varepsilon^{\mu}\frac{2\nu E}{1+\nu}D_{4\lambda}\cos\lambda\zeta e^{-\lambda t}$$

$$\sigma_z = \varepsilon^{\mu}\frac{E}{1+\nu}\{[\lambda D_{3\lambda}+(1-2\nu)D_{4\lambda}]\cos\lambda\zeta - D_{4\lambda}\lambda\zeta\sin\zeta\lambda\}e^{-\lambda t} \tag{4.12}$$

$$\tau_{xz} = -\varepsilon^{\mu}\frac{E}{1+\nu}[\lambda D_{3\lambda}+2(1-\nu)D_{4\lambda}]\sin\lambda\zeta + D_{4\lambda}\lambda\zeta\cos\lambda\zeta\}e^{-\lambda t}$$

$$u = -\varepsilon^{\mu+1}\frac{1}{\lambda}\{[-\lambda D_{3\lambda}+(4\nu-3)D_{4\lambda}]\cos\lambda\zeta + D_{4\lambda}\lambda\zeta\sin\lambda\zeta\}e^{-\lambda t}$$

$$w = \varepsilon^{\mu+1}[D_{3\lambda}\sin\lambda\zeta + D_{4\lambda}\zeta\cos\lambda\zeta]e^{-\lambda t}$$

здесь λ — корень характеристического уравнения (4.8). $D_{3\lambda}(\eta)$ и $D_{4\lambda}(\eta)$ связаны уравнениями (4.5), из которых одно есть следствие другого

$$\tau_{xy} = -\varepsilon^{\varkappa}\frac{E}{2(1+\nu)}\pi n C_n(\eta)\cos\pi n\zeta e^{-\pi n t}$$

$$\tau_{yz} = -\varepsilon^{\varkappa}\frac{E}{2(1+\nu)}\pi n C_n(\eta)\sin\pi n\zeta e^{-\pi n t} \tag{4.13}$$

$$v = \varepsilon^{\varkappa+1}C_n(\eta)\cos\pi n\zeta e^{-\pi n t}$$

$$(n=1,\ 2,\ 3,\cdots)$$

5. Анизотропная пластинка ($\alpha_1 \neq \alpha_2$). Случай $1-\left(\frac{b_2}{b_1}\right)^4 > 0$.

Решением уравнения (3.4) при $s=0$ будет

$$w_{(1)}^{(0)} = D_{1k}\cos\alpha_1 k\zeta + D_{2k}\cos\alpha_2 k\zeta + D_{3k}\sin\alpha_1 k\zeta + D_{4k}\sin\alpha_2 k\zeta \tag{5.1}$$

$$(1,\ 2;\ k,\ \lambda)$$

Как и в изотропном случае, аналогичным образом можно доказать справедливость (4.6) для анизотропной пластинки. Тогда, подставив (5.1) в (3.1), получим

$$\tau^{(0)}_{xz(2)} = \frac{\lambda}{\Omega_1}[(A_2 - A_1\alpha_1^2)(D_{1\lambda}\cos\alpha_1\lambda\zeta + D_{3\lambda}\sin\alpha_1\lambda\zeta) + $$
$$+ (A_2 - A_1\alpha_2^2)(D_{2\lambda}\cos\alpha_2\lambda\zeta + D_{4\lambda}\sin\alpha_2\lambda\zeta)] \tag{5.2}$$

$$\tau^{(0)}_{z(2)} = -\frac{\lambda}{A_2\Omega_1}[\alpha_1(A_1A_2\alpha_1^2 + \Omega_1 - A_2^2)(D_{1\lambda}\sin\alpha_1\lambda\zeta - D_{3\lambda}\cos\alpha_1\lambda\zeta) +$$
$$+ \alpha_2(A_1A_2\alpha_2^2 + \Omega_1 - A_2^2)(D_{2\lambda}\sin\alpha_2\lambda\zeta - D_{4\lambda}\cos\alpha_2\lambda\zeta)]$$

Удовлетворив условиям (4.3), будем иметь

$$D_{1\lambda}(A_2 - A_1\alpha_1^2)\cos\alpha_1\lambda + D_{2\lambda}(A_2 - A_1\alpha_2^2)\cos\alpha_2\lambda = 0$$
$$D_{1\lambda}(A_1A_2\alpha_1^2 + \Omega_1 - A_2^2)\alpha_1\sin\alpha_1\lambda + D_{2\lambda}(A_1A_2\alpha_2^2 + \Omega_1 - A_2^2)\alpha_2\sin\alpha_2\lambda = 0 \tag{5.3}$$
$$D_{3\lambda}(A_2 - A_1\alpha_1^2)\sin\alpha_1\lambda + D_{4\lambda}(A_2 - A_1\alpha_2^2)\sin\alpha_2\lambda = 0$$
$$D_{3\lambda}(A_1A_2\alpha_1^2 + \Omega_1 - A_2^2)\alpha_1\cos\alpha_1\lambda + D_{4\lambda}(A_1A_2\alpha_2^2 + \Omega_1 - A_2^2)\alpha_2\cos\alpha_2\lambda = 0 \tag{5.4}$$

Система (5.3) соответствует кососимметричной, а (5.4)—симметричной задаче.

Потребовав, чтобы обращался в нуль определитель системы (5.3), получим характеристическое уравнение

$$(A_2 - A_1\alpha_1^2)(A_1A_2\alpha_2^2 + \Omega_1 - A_2^2)\alpha_2\cos\alpha_1\lambda\sin\alpha_2\lambda -$$
$$-(A_2 - A_1\alpha_2^2)(A_1A_2\alpha_1^2 + \Omega_1 - A_2^2)\alpha_1\sin\alpha_1\lambda\cos\alpha_2\lambda = 0 \tag{5.5}$$

откуда определится соответствующее кососимметричной задаче λ. Уравнение (5.5) можно привести к виду

$$\operatorname{ctg} Z = m\operatorname{ctg} mZ, \quad \text{где} \quad Z = \alpha_1\lambda, \quad m = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \neq 1 \tag{5.6}$$

Уравнение (5.5) удовлетворяется также, если одновременно

$$\sin\alpha_1\lambda = 0, \quad \sin\alpha_2\lambda = 0 \tag{5.7}$$

последнее может иметь место лишь, когда отношение α_2/α_1 есть рациональная величина. Как это вытекает из (3.9), если подобное возможно, то при весьма частных случаях. Поэтому будем считать, что (5.6) есть основное характеристическое уравнение для определения λ.

Точно так же, приравнивая нулю определитель системы (5.4), получим характеристическое уравнение

$$\operatorname{ctg} mZ = m\operatorname{ctg} Z \tag{5.8}$$

для определения λ, соответствующего симметричной задаче. В дальнейшем нужно брать те корни уравнений (5.6) и (5.8), у которых $\operatorname{Re}\lambda > 0$. Ввиду (5.6) произвольной будет одна из неизвестных $D_{1\lambda}$ и $D_{2\lambda}$. То же можно сказать относительно $D_{3\lambda}$ и $D_{4\lambda}$.

Из формул (1.5), (2.5), (3.1) и (5.1) следует при $s=0$ следующее решение типа погранслоя:
кососимметричная задача (изгиб)

$$\sigma_x=\varepsilon^{\chi}\frac{\lambda}{\Omega_1}\left[\alpha_1\left(A_1\alpha_1^2-A_2\right)D_{1\lambda}\sin\alpha_1\lambda\zeta+\alpha_2\left(A_1\alpha_2^2-A_2\right)D_{2\lambda}\sin\alpha_2\lambda\zeta\right]e^{-\lambda t}$$

$$\sigma_y=-\varepsilon^{\chi}\frac{1}{a_{22}a_{33}\Omega_1}\{\alpha_1[A_{13}(\alpha_1^2A_1-A_2)-a_{23}\Omega_1]D_{1\lambda}\sin\alpha_1\lambda\zeta+$$
$$+\alpha_2[A_{13}(\alpha_2^2A_1-A_2)-a_{23}\Omega_1]D_{2\lambda}\sin\alpha_2\lambda\zeta\}e^{-\lambda t}$$

$$\sigma_z=-\varepsilon^{\chi}\frac{\lambda}{A_3\Omega_1}\{\alpha_1[A_1A_2\alpha_1^2+\Omega_1-A_2^2]D_{1\lambda}\sin\alpha_1\lambda\zeta+$$
$$+\alpha_2[A_1A_2\alpha_2^2+\Omega_1-A_2^2]D_{2\lambda}\sin\alpha_2\lambda\zeta\}e^{-\lambda t} \tag{5.9}$$

$$\tau_{xz}=\varepsilon^{\chi}\frac{\lambda}{\Omega_1}\left[(A_2-A_1\alpha_1^2)D_{1\lambda}\cos\alpha_1\lambda\zeta+(A_2-A_1\alpha_2^2)D_{2\lambda}\cos\alpha_2\lambda\zeta\right]e^{-\lambda t}$$

$$u=-\varepsilon^{\chi+1}\frac{1}{A_3\Omega_1}\{\alpha_1[\Omega A_1\alpha_1^2-A_2(\Omega+\Omega_1)]D_{1\lambda}\sin\alpha_1\lambda\zeta+$$
$$+\alpha_2[\Omega A_1\alpha_2^2-A_2(\Omega+\Omega_1)]D_{2\lambda}\sin\alpha_2\lambda\zeta\}e^{-\lambda t}$$

$$w=\varepsilon^{\chi+1}(D_{1\lambda}\cos\alpha_1\lambda\zeta+D_{2\lambda}\cos\alpha_2\lambda\zeta)e^{-\lambda t}$$

Здесь $A_{13}=a_{12}a_{33}-a_{23}a_{13}$, λ определяется из характеристического уравнения (5.6), $D_{1\lambda}(\eta)$ и $D_{2\lambda}(\eta)$ связаны уравнениями (5.3), одно из которых есть следствие другого

$$\tau_{xy}=-\varepsilon^{\varkappa}\frac{1}{\sqrt{a_{44}a_{66}}}(2n+1)\frac{\pi}{2}C_n(\eta)\sin(2n+1)\frac{\pi}{2}\zeta\, e^{-\sqrt{\frac{a_{66}}{a_{44}}}(2n+1)\frac{\pi}{2}t}$$

$$\tau_{yz}=\varepsilon^{\varkappa}\frac{1}{a_{44}}(2n+1)\frac{\pi}{2}C_n(\eta)\cos(2n+1)\frac{\pi}{2}\zeta\, e^{-\sqrt{\frac{a_{66}}{a_{44}}}(2n+1)\frac{\pi}{2}t} \tag{5.10}$$

$$v=\varepsilon^{\varkappa+1}C_n(\eta)\sin(2n+1)\frac{\pi}{2}\zeta\, e^{-\sqrt{\frac{a_{66}}{a_{44}}}(2n+1)\frac{\pi}{2}t}$$

$$(n=0,\ 1,\ 2,\cdots)$$

симметричная задача

$$\sigma_x=-\varepsilon^{\chi}\frac{\lambda}{\Omega_1}\left[\alpha_1\left(A_1\alpha_1^2-A_2\right)D_{3\lambda}\cos\alpha_1\lambda\zeta+\alpha_2\left(A_1\alpha_2^2-A_2\right)D_{4\lambda}\cos\alpha_2\lambda\zeta\right]e^{-\lambda t}$$

$$\sigma_y=\varepsilon^{\chi}\frac{1}{a_{22}a_{33}\Omega_1}\{\alpha_1(A_{13}(A_1\alpha_1^2-A_2)-a_{23}\Omega_1]D_{3\lambda}^{(1)}\cos\alpha_1\lambda\zeta+$$
$$+\alpha_2[A_{13}(A_1\alpha_2^2-A_2)-a_{23}\Omega_1]D_{4\lambda}\cos\alpha_2\lambda\zeta\}e^{-\lambda t}$$

$$\sigma_z=\varepsilon^{\chi}\frac{\lambda}{A_3\Omega_1}[\alpha_1(A_1A_2\alpha_1^2+\Omega_1-A_2^2)D_{3\lambda}\cos\alpha_1\lambda\zeta+$$

$$+\alpha_2 (A_1 A_2 \alpha_2^2 + \Omega_1 - A_2^2) D_{4\lambda} \cos \alpha_2 \lambda \zeta] e^{-\lambda t} \tag{5.11}$$

$$\tau_{xz} = \varepsilon^{\mu} \frac{\lambda}{\Omega_1} [(A_2 - A_1 \alpha_1^2) D_{3\lambda} \sin \alpha_1 \lambda \zeta + (A_2 - A_1 \alpha_2^2) D_{4\lambda} \sin \alpha_2 \lambda \zeta] e^{-\lambda t}$$

$$u = \varepsilon^{\mu+1} \frac{1}{A_3 \Omega_1} [\alpha_1 [\Omega A_1 \alpha_1^2 - A_2 (\Omega + \Omega_1)] D_{3\lambda} \cos \alpha_1 \lambda \zeta +$$

$$+\alpha_2 [\Omega A_1 \alpha_2^2 - A_2 (\Omega + \Omega_1)] D_{4\lambda} \cos \alpha_2 \lambda \zeta] e^{-\lambda t}$$

$$w = \varepsilon^{\mu+1} [D_{3\lambda} (\eta) \sin \alpha_1 \lambda \zeta + D_{4\lambda} (\eta) \sin \alpha_2 \lambda \zeta] e^{-\lambda t}$$

здесь λ уже определяется из уравнения (5.8)

$$\tau_{xy} = -\varepsilon^{\chi} \frac{\pi n}{\sqrt{a_{44} a_{66}}} C_n (\eta) \cos \pi n \zeta \, e^{-\sqrt{\frac{a_{66}}{a_{44}}} \pi n t}$$

$$\tau_{yz} = -\varepsilon^{\chi} \frac{\pi n}{a_{44}} C_n (\eta) \sin \pi n \zeta \, e^{-\sqrt{\frac{a_{66}}{a_{44}}} \pi n t} \tag{5.12}$$

$$v = \varepsilon^{\chi+1} C_n (\eta) \cos \pi n \zeta \, e^{-\sqrt{\frac{a_{66}}{a_{44}}} \pi n t} \qquad (n = 1, 2, \cdots)$$

Случай

$$1 - \left(\frac{b_2}{b_1}\right)^4 < 0.$$

Общим решением уравнения (3.4) при $s = 0$ будет

$$w_{(1)}^{(0)} = D_{1k} \varphi_1 + D_{2k} \varphi_2 + D_{3k} \varphi_3 + D_{4k} \varphi_4 \quad (1, 2;\ k, \lambda) \tag{5.13}$$

где

$$\varphi_1 = \cos \gamma_1 \zeta \operatorname{ch} \gamma_2 \zeta, \qquad \varphi_2 = \sin \gamma_1 \zeta \operatorname{sh} \gamma_2 \zeta$$
$$\varphi_3 = \sin \gamma_1 \zeta \operatorname{ch} \gamma_2 \zeta, \qquad \varphi_4 = \cos \gamma_1 \zeta \operatorname{sh} \gamma_2 \zeta \tag{5.14}$$

$$\gamma_1 = b_1 \alpha k, \quad \gamma_2 = b_1 \beta k, \quad \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{b_2^2}{b_1^2} + 1}, \quad \beta = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{b_2^2}{b_1^2} - 1} \tag{5.15}$$

Подставив (5.13) в (3.1), получим

$$\tau_{xz(2)}^{(0)} = \frac{\lambda}{\Omega_1} \{[A_1 b_1^2 (\varphi_1 (\beta^2 - \alpha^2) - 2\alpha\beta\varphi_2) + A_2 \varphi_1] D_{1\lambda} +$$

$$+ [A_1 b_1^2 (\varphi_2 (\beta^2 - \alpha^2) + 2\alpha\beta\varphi_1) + A_2 \varphi_2] D_{2\lambda} +$$

$$+ [A_1 b_1^2 (\varphi_3 (\beta^2 - \alpha^2) + 2\alpha\beta\varphi_4) + A_2 \varphi_3] D_{3\lambda} +$$

$$+ [A_1 b_1^2 (\varphi_4 (\beta^2 - \alpha^2) - 2\alpha\beta\varphi_3) + A_2 \varphi_4] D_{4\lambda} \} \tag{5.16}$$

$$\sigma_{z(2)}^{(0)} = \frac{\lambda^*}{A_3 \Omega_1} \{[- A_1 A_2 b_1^3 (\beta (\beta^2 - 3\alpha^2) \varphi_4 - \alpha (3\beta^2 - \alpha^2) \varphi_3) +$$

$$+(\Omega_1 - A_2^2)\, b_1 (\beta\varphi_4 - \alpha\varphi_3)]\, D_{1\lambda} + [-A_1A_2b_1^3(\beta(\beta^2-3\alpha^2)\varphi_3 + \alpha(3\beta^2-\alpha^2)\varphi_4)+$$

$$+ b_1(\Omega_1 - A_2^2)(\beta\varphi_3+\alpha\varphi_4)]\, D_{2\lambda} + [-A_1A_2b_1^3(\alpha(3\beta^2-\alpha^2)\varphi_1 + \beta(\beta^2-3\alpha^2)\varphi_2)+$$

$$+ b_1(\Omega_1-A_2^2)(\beta\varphi_2+\alpha\varphi_1)]\, D_{3\lambda} + [-A_1A_2b_1^3(\beta(\beta^2-3\alpha^2)\varphi_1 - \alpha(3\beta^2-\alpha^2)\varphi_2)+$$

$$+ b_1(\Omega_1-A_2^2)(\beta\varphi_1-\alpha\varphi_2)]\, D_{4\lambda}\}$$

Заметим, что (4.6) остается в силе и в этом случае. После удовлетворения условиям (4.3), получим

$$\{A_1b_1^2[\varphi_1(\beta^2-\alpha^2) - 2\alpha\beta\varphi_2] + A_2\varphi_1\}\, D_{1\lambda} +$$

$$+ \{A_1b_1^2[\varphi_2(\beta^2-\alpha^2)+2\alpha\beta\varphi_1] + A_2\varphi_2\}\, D_{2\lambda} = 0$$

$$\{-A_1A_2b_1^3[\beta(\beta^2-3\alpha^2)\varphi_4 - \alpha(3\beta^2-\alpha^2)\varphi_3] +$$

$$+ b_1(\Omega_1-A_2^2)(\beta\varphi_4-\alpha\varphi_3)\}\, D_{1\lambda} + \{-A_1A_2b_1^3[\beta(\beta^2-3\alpha^2)\varphi_3+\alpha(3\beta^2-\alpha^2)\varphi_4] +$$

$$+ b_1(\Omega_1-A_2^2)(\beta\varphi_3+\alpha\varphi_4)\}\, D_{2\lambda}=0 \tag{5.17}$$

$$(\zeta = 1)$$

$$\{A_1b_1^2[\varphi_3(\beta^2-\alpha^2)+2\alpha\beta\varphi_4]+A_2\varphi_3\}\, D_{3\lambda} +$$

$$+ \{A_1b_1^2[\varphi_4(\beta^2-\alpha^2)-2\alpha\beta\varphi_3]+A_2\varphi_4\}\, D_{4\lambda}=0$$

$$\{-A_1A_2b_1^3[\alpha(3\beta^2-\alpha^2)\varphi_1+\beta(\beta^2-3\alpha^2)\varphi_2] +$$

$$+ b_1(\Omega_1-A_2^2)(\beta\varphi_2+\alpha\varphi_1)\}\, D_{3\lambda} + \{-A_1A_2b_1^3[\beta(\beta^2-3\alpha^2)\varphi_1-\alpha(3\beta^2-\alpha^2)\varphi_2] +$$

$$+ b_1(\Omega_1-A_2^2)(\beta\varphi_1-\alpha\varphi_2)\}\, D_{4\lambda}=0 \tag{5.18}$$

$$(\zeta = 1)$$

Здесь обозначение $(\zeta = 1)$ означает, что в этих уравнениях под φ_1, φ_2, φ_3 и φ_4 нужно понимать значения этих функций при $\zeta = 1$.

Приравняв нулю определитель системы (5.17), получим характеристическое уравнение

$$\operatorname{sh} 2mZ - m \sin 2Z = 0 \tag{5.19}$$

где $Z = b_1\alpha\lambda$, $\quad m = \dfrac{\beta}{\alpha}$. Из этого уравнения определится соответствующее кососимметричной задаче λ. Приравняв нулю определитель системы (5.18), получим соответствующее симметричной задаче характеристическое уравнение

$$\operatorname{sh} 2mZ + m \sin 2Z = 0 \tag{5.20}$$

Как и в предыдущих случаях, нужно найти те корни уравнений (5.19) и (5.20), которые удовлетворяют условию $\operatorname{Re}\lambda > 0$.

Используя формулы (1.5), (3.1) и (5.13), получим следующее решение типа погранслоя $(s = 0)$:

кососимметричная задача

$$\sigma_x = \varepsilon^{\mu} \frac{\lambda}{\Omega_1} \{ b_1\beta [A_1 b_1^2 (\beta^2 - 3\alpha^2) + A_2] (\varphi_4 D_{1\lambda} + \varphi_3 D_{2\lambda}) +$$

$$+ b_1\alpha [A_1 b_1^2 (3\beta^2 - \alpha^2) + A_2] (-\varphi_3 D_{1\lambda} + \varphi_4 D_{2\lambda}) \} e^{-\lambda t}$$

$$\tau_{xz} = \varepsilon^{\mu} \frac{\lambda}{\Omega_1} \{ [A_1 b_1^2 (\beta^2 - \alpha^2) + A_2] (\varphi_1 D_{1\lambda} + \varphi_2 D_{2\lambda}) +$$

$$+ 2\alpha\beta A_1 b_1^2 (-\varphi_2 D_{1\lambda} + \varphi_1 D_{2\lambda}) \} e^{-\lambda t}$$

$$\sigma_z = \varepsilon^{\mu} \frac{\lambda}{A_3 \Omega_1} \{ b_1\beta [-A_1 A_2 b_1^2 (\beta^2 - 3\alpha^2) + \Omega_1 - A_2^2] (\varphi_4 D_{1\lambda} + \varphi_3 D_{2\lambda}) +$$

$$+ \alpha b_1 [-A_1 A_2 b_1^2 (3\beta^2 - \alpha^2) + \Omega_1 - A_2^2] (-\varphi_3 D_{1\lambda} + \varphi_4 D_{2\lambda}) \} e^{-\lambda t} \tag{5.21}$$

$$\sigma_y = -\frac{1}{a_{22}} (a_{12} \sigma_x + a_{23} \sigma_z)$$

$$u = -\varepsilon^{\mu+1} \frac{1}{A_3 \Omega_1} \{ b_1\beta [\Omega A_1 b_1^2 (\beta^2 - 3\alpha^2) + A_2 (\Omega + \Omega_1)] (\varphi_4 D_{1\lambda} + \varphi_3 D_{2\lambda}) +$$

$$+ b_1\alpha [\Omega A_1 b_1^2 (3\beta^2 - \alpha^2) + A_2 (\Omega + \Omega_1)] (-\varphi_3 D_{1\lambda} + \varphi_4 D_{2\lambda}) \} e^{-\lambda t}$$

$$w = \varepsilon^{\mu+1} [\varphi_1 D_{1\lambda} + \varphi_2 D_{2\lambda}] e^{-\lambda t}$$

здесь λ определяется из уравнения (5.19), из $D_{1\lambda}(\eta)$ и $D_{2\lambda}(\eta)$ независимым является лишь одно из них, они связаны уравнениями (5.17). Величины τ_{xy}, τ_{yz}, v определяются по формулам (5.10).

Решение типа погранслоя для симметричной задачи можно получить из (5.21) заменой $(\varphi_4 D_{1\lambda} + \varphi_3 D_{2\lambda})$, $(-\varphi_3 D_{1\lambda} + \varphi_4 D_{2\lambda})$, $(\varphi_1 D_{1\lambda} + \varphi_2 D_{2\lambda})$ и $(-\varphi_2 D_{1\lambda} + \varphi_1 D_{2\lambda})$ соответственно через $(\varphi_2 D_{3\lambda} + \varphi_1 D_{4\lambda})$, $(\varphi_1 D_{3\lambda} - \varphi_2 D_{4\lambda})$, $(\varphi_3 D_{3\lambda} + \varphi_4 D_{4\lambda})$ и $(\varphi_4 D_{3\lambda} - \varphi_3 D_{4\lambda})$. Во вновь полученных соотношениях λ должно определяться из (5.20), а $D_{3\lambda}$ и $D_{4\lambda}$ связаны уравнениями (5.18). Величины τ_{xy}, τ_{yz}, v определяются по формулам (5.12).

6. Если погранслой построить по Гольденвейзеру А. Л. [1,7] или по Грину [8], то необходимо найти затухающие решения в антиплоской (кручение) и плоской задачах для полуполосы. При этом напряжения на продольных кромках прямоугольника должны отсутствовать. В случае изотропной полуполосы такое решение для антиплоской задачи (кручение) найдено Колос А. В. [12]. Это решение представлено в функциях (4.11). Для анизотропной полуполосы решение антиплоской задачи найдено нами [13]. Оно представлено по функциям (5.10). В связи с этим заметим, что затухающее решение плоской задачи можно искать в виде (1.5), но без множителей $\varepsilon^{\chi_l + s}$ и $\varepsilon^{\mu_l + s}$.

Для нахождения решения типа погранслоя при $s>0$ необходимо решать неоднородные уравнения (2.2) и (3.4), затем использовать формулы (2.1) и (3.1). При этом эти неоднородные уравнения будут иметь смысл как для индекса (1), так и для (2). В этих уравнениях k и λ нужно считать известными (они определялись из исходного приближения). Общие решения этих уравнений можно найти по формулам (2.4) и (3.7). Частные решения этих уравнений можно находить элементарным путем, так как в (2.3) и (3.5) будут входить те же фундаментальные функции, что в (2.5), (4.1), (5.1) или (5.13). Потребовав, чтобы

$$\tau^{(s)}_{yz(1)}+\tau^{(s)}_{yz(2)}=0$$

$$(s>0) \quad \text{при} \quad \zeta=\pm 1 \tag{6.1}$$

$$\tau^{(s)}_{xz(1)}+\tau^{(s)}_{yz(2)}=0, \quad \sigma^{(s)}_{z(1)}+\sigma^{(s)}_{z(2)}=0$$

найдем часть произволов в общих решениях (2.4) и (3.7). Остальная часть произволов должна определяться при взаимодействии погранслоя с основным напряженным и деформированным состоянием. Таким образом, можно построить погранслой в любом приближении.

В данной работе автор ограничился построением погранслоя. Вопрос о взаимодействии погранслоя с основным напряженным и деформированным состоянием пластинки, откуда должны определяться интенсивности антиплоского и плоского погранслоев $\varkappa$ и μ, а также оставшиеся произволы в общих решениях типа погранслоя, требует отдельного детального рассмотрения, ибо эти произволы существенным образом будут зависеть от характера загружения края пластинки, в частности от того, является ли край свободным, защемленным или шарнирно опертым [7].

Автор весьма признателен С. А. Амбарцумяну за обсуждение данной работы.

Институт механики
АН Армянской ССР

Поступила 3 II 1972

Լ. Ա. ԱՂԱԼՈՎՅԱՆ

ՕՐԹՈՏՐՈՊ ՍԱԼԵՐԻ ՍԱՀՄԱՆԱՅԻՆ ՇԵՐՏԻ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Օրթոտրոպ սալերի ներքին լարվածային ու դեֆորմացիոն վիճակի տեսությունը լրացվում է սահմանային շերտի կառուցմամբ։ Կառուցվում է այնպիսի լարվածային և դեֆորմացիոն վիճակ, որը սալի վերին և ստորին հիմքերում բավարարում է զրոյական պայմանների լարումների համար, արագ մարում է եզրերից դեպի սալի ներսը խորանալիս և պարունակում է անհրաժեշտ քանա-

նությամբ անորոշ գործակիցներ ներքին լարվածային վիճակի հետ փոխներգործության մեջ մտնելու համար։ Համապատասխան եռաչափ խնդրի լուծումը ներկայացված է սահմանային շերտի տիպի ֆունկցիաներով։ Որոշված են սահմանային շերտի հետ կապված մեծությունները։

ON A BOUNDARY LAYER OF ORTHOTROPIC PLATES

L. A. AGALOVIAN

Summary

The theory of an interior stress-strain state of an orthotropic plate is supplemented by the construction of a boundary layer. The solution for a corresponding three-dimensional problem is presented by the functions of a boundary layer type.

All the values related to the boundary layer are determined.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гольденвейзер А. Л.* Построение приближенной теории изгиба пластинки методом асимптотического интегрирования уравнений теории упругости. ПММ, т. 26, вып. 4, 1962.
2. *Гольденвейзер А. Л., Колос А. В.* К построению двумерных уравнений теории упругих тонких пластинок. ПММ, т. 29, вып. 1, 1965.
3. *Агаловян Л. А.* Об уточнении классической теории изгиба анизотропных пластин. Изв. АН АрмССР, сер. физ.-мат. наук., т. XVIII, № 5, 1965.
4. *Агаловян Л. А.* К теории изгиба ортотропных пластин. МТТ, 1966, № 6.
5. *Вишик М. И.* и *Люстерник Л. А.* Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром. УМН, т. XII, вып. 5, 1957.
6. *Вишик М. И.* и *Люстерник Л. А.* Решение некоторых задач о возмущении в случае матриц и самосопряженных и несамосопряженных дифференциальных уравнений. УМН, т. XV, вып. 3(93), 1960.
7. *Гольденвейзер А. Л.* Погранслой и его взаимодействие с внутренним напряженным состоянием упругой тонкой оболочки. ПММ, т. 33, вып. 6, 1969.
8. *Green A. E.* Boundary-layer equations in the linear theory of thin elastic shells. Proc. Roy. Soc. A, vol. 269, № 1339, 1962.
9. *Уфлянд Я. С.* Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Изд. АН СССР, М., 1963.
10. *Ворович И. И., Малкина О. С.* Асимптотический метод решения задачи теории упругости о толстой плите. Тр. VI Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластинок. „Наука", М., 1966.
11. *Mittelman B. S., Hillman A. P.* Zeros of $z+\sin z$. Math. Tables and other Qids to Comput., vol. 2, № 11, 1946, p. 60.
12. *Колос А. В.* Методы уточнения классической теории изгиба и растяжения пластинок. ПММ, т. 29, вып. 4, 1965.
13. *Агаловян Л. А.* О граничных условиях для изгиба анизотропных пластин. Изв. АН АрмССР, Механика, т. XIX, № 4, 1966.