

И. Н. ОСИВ, Д. В. ГРИЛИЦКИЙ

## КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ОБ УПРУГОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ПЛАСТИНКИ С ЭЛЛИПТИЧЕСКИМ ВКЛЮЧЕНИЕМ

К настоящему времени всесторонне исследована задача об упругом равновесии изотропной пластинки с впаянным круговым инородным включением.

Для эллиптического включения данная задача впервые решена Хардиманом (Hardiman) [4] в случае задания на бесконечности однородного растяжения и несколько позже Кайзером (Kaiser) [5]. Случай анизотропной пластинки с впаянным эллиптическим анизотропным ядром рассмотрен С. Г. Лехницким [2, 3] при задании однородного напряженного состояния на бесконечности.

В данной работе определяется упругое равновесие неограниченной изотропной пластинки с впаянным эллиптическим включением для случая, когда в кусочно-однородном элементе напряженно-деформированное состояние вызывается наличием сосредоточенных силовых и моментных факторов, приложенных в произвольных точках пластинки и включения.

1. Пусть срединная плоскость кусочно-однородной пластинки совпадает с плоскостью комплексного переменного  $z = x + iy$  и  $z_{j,0}$ ,  $z_{j,1}$  — аффиксы точек, в которых приложены соответственно сосредоточенные силы и моменты ( $j = 1, 2$ , индекс „1“ относим к включению, индекс „2“ — к пластинке). Поместим начало прямоугольной декартовой системы координат в центре эллиптического включения и направим координатные оси  $ox$ ,  $oy$  соответственно по его большой и малой полуосям.

Мысленно разрежем плоскость  $z$  между фокусами эллиптического включения и отобразим внешность окружности  $\gamma_0$  радиуса  $\rho_0 = \sqrt{m}$  в плоскости  $\zeta = \xi + i\eta$  на внешность разреза при помощи функции

$$z = w(\zeta) = R \left( \zeta + \frac{m}{\zeta} \right) \quad (1.1)$$

Граница раздела материалов  $L$  в плоскости  $z$  будет соответствовать единичной окружности  $\gamma$  в плоскости  $\zeta$ , если параметры  $R$  и  $m$  выберем в виде

$$R = \frac{a(1+\varepsilon)}{2}, \quad m = \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}, \quad \varepsilon = \frac{b}{a}$$

где  $a$ ,  $b$  — соответственно большая и малая полуоси эллипса.

Напряженно-деформированное состояние кусочно-однородной пластинки определяется соотношениями [1]

$$\widehat{\rho\rho}_j + \widehat{\theta\theta}_j = 2[\Phi_j(\zeta) + \overline{\Phi_j(\zeta)}] \quad (1.2)$$

$$\widehat{\rho\rho}_j + i\widehat{\rho\theta}_j = \Phi_j(\zeta) + \overline{\Phi_j(\zeta)} - \frac{\bar{\zeta}^2}{\rho^2\omega'(\zeta)} [\omega(\zeta)\overline{\Phi_j(\zeta)} + \overline{\omega'(\zeta)}\overline{\Psi_j(\zeta)}] \quad (1.3)$$

$$2\rho_j(u_j + iv_j) = x_j \int \Phi_j(\zeta)\omega'(\zeta)d\zeta - \omega(\zeta)\overline{\Phi_j(\zeta)} - \int \overline{\Psi_j(\zeta)}\overline{\omega'(\zeta)}d\bar{\zeta} \quad (1.4)$$

$$j = 1; 2$$

Здесь  $\widehat{\rho\rho}_j$ ,  $\widehat{\theta\theta}_j$ ,  $\widehat{\rho\theta}_j$  и  $u_j$ ,  $v_j$  — соответственно компоненты напряжений и вектора смещений в плоскости  $\zeta$ ,

$$x_j = \frac{3 - \nu_j}{1 + \nu_j} \quad j = 1; 2$$

$\rho_j$ ,  $\nu_j$  — соответственно модуль сдвига и коэффициент Пуассона ( $j = 1; 2$ ).

Функции  $\Phi_j(\zeta)$  и  $\Psi_j(\zeta)$ , учитывая равенство механических характеристик на противоположных берегах разреза в плоскости  $z$  и наличие сосредоточенных сил и моментов внутри кусочно-однородной пластинки, а также ограниченность напряжений на бесконечности, можно представить в виде

$$\Phi_1(\zeta) = \Phi_{1,0}(\zeta) + \Phi_{1,0}\left(\frac{m}{\zeta}\right) + f_{1,0}(\zeta) \quad (1.5)$$

$$|\zeta| < 1$$

$$\Psi_1(\zeta) = \Psi_{1,0}(\zeta) + \Psi_{1,0}\left(\frac{m}{\zeta}\right) + f_{1,1}(\zeta) \quad (1.6)$$

$$\Phi_2(\zeta) = \Phi_{2,0}(\zeta) + f_{2,0}(\zeta) \quad (1.7)$$

$$\Psi_2(\zeta) = \Psi_{2,0}(\zeta) + f_{2,1}(\zeta) \quad (1.8)$$

$$|\zeta| > 1$$

Здесь

$$\Phi_{1,0}(\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{1,k}\zeta^k, \quad \Psi_{1,0}(\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} b_{1,k}\zeta^k$$

$$\Phi_{2,0}(\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2,k}\zeta^{-k}, \quad \Psi_{2,0}(\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} b_{2,k}\zeta^{-k}$$

$$f_{1,0}(\zeta) = -\frac{P_1}{R(\zeta_{1,0} - \beta_{1,0})} \left[ \frac{\zeta_{1,0}}{\zeta - \zeta_{1,0}} - \frac{\beta_{1,0}}{\zeta - \beta_{1,0}} \right]$$

$$f_{1,1}(\zeta) = \frac{x_1 \bar{P}_1}{R(\zeta_{1,0} - \beta_{1,0})} \left[ \frac{\zeta_{1,0}}{\zeta - \zeta_{1,0}} - \frac{\beta_{1,0}}{\zeta - \beta_{1,0}} \right] -$$



$$\begin{aligned}
& - \frac{P_1 \overline{\omega(\zeta_{1,0})}}{R(\zeta_{1,0} - \beta_{1,0}) \omega'(\zeta)} \left[ \frac{\zeta_{1,0}}{(\zeta - \zeta_{1,0})^2} - \frac{\beta_{1,0}}{(\zeta - \beta_{1,0})^2} \right] - \\
& - \frac{iM_1}{2\pi} \frac{1}{R(\zeta_{1,1} - \beta_{1,1}) \omega'(\zeta)} \left[ \frac{\zeta_{1,1}}{(\zeta - \zeta_{1,1})^2} - \frac{\beta_{1,1}}{(\zeta - \beta_{1,1})^2} \right] \\
f_{2,0}(\zeta) & = - \frac{P_2 \zeta_{2,0}}{R(\zeta_{2,0} - \beta_{2,0})(\zeta - \zeta_{2,0})} \\
f_{2,1}(\zeta) & = \frac{x_2 \overline{P_2 \zeta_{2,0}}}{R(\zeta_{2,0} - \beta_{2,0})(\zeta - \zeta_{2,0})} - \frac{P_2 \zeta_{2,0} \overline{\omega(\zeta_{2,0})}}{R(\zeta_{2,0} - \beta_{2,0}) \omega'(\zeta) (\zeta - \zeta_{2,0})^2} - \\
& - \frac{iM_2}{2\pi} \frac{1}{R(\zeta_{2,1} - \beta_{2,1}) \omega'(\zeta)} \frac{\zeta_{2,1}}{(\zeta - \zeta_{2,1})^2} \\
P_j & = P_{j,0} e^{i\gamma_j} = \frac{X_j + iY_j}{2\pi(1 + x_j)}
\end{aligned}$$

$X_j, Y_j, M_j$  — соответственно составляющие компоненты сосредоточенной силы и величина момента ( $j = 1; 2$ ),  $\zeta_{j,k}$  — прообразы точек  $z_{j,k}$  ( $j = 1; 2, k = 0; 1$ ),

$$\begin{aligned}
\beta_{j,k} & = \frac{m}{\zeta_{j,k}} \\
\operatorname{Re} a_{2,0} & = \frac{N_1 + N_2}{4}, \quad b_{2,0} = - \frac{e^{-2i\alpha} (N_1 - N_2)}{2} \quad (1.9)
\end{aligned}$$

$N_1, N_2$  — главные напряжения на бесконечности пластинки,  $\alpha$  — угол между  $N_1$  и осью  $ox$ .

Величины, задаваемые соотношениями (1.9), по условию задачи считаем известными.

2. На линии раздела материалов имеют место условия идеального механического контакта, то есть

$$(\sigma_n + i\tau_{ns})_1 = (\sigma_n + i\tau_{ns})_2 \quad \text{на } L \quad (2.1)$$

$$(u + iv)_1 = (u + iv)_2 \quad (2.2)$$

где  $\sigma_n, \tau_{ns}, u, v$  — соответственно компоненты напряжения и перемещения на площадке с нормалью  $n$  к границе  $L$ .

Удовлетворив условиям (2.1), (2.2) при помощи соотношений (1.3) и (1.4), получим

$$\begin{aligned}
\Phi_{1,1}(\sigma) + \overline{\Phi_{1,1}(\sigma)} - \Phi_{2,0}(\sigma) - \overline{\Phi_{2,0}(\sigma)} - \frac{\bar{\sigma}^2}{\omega'(\sigma)} \left[ \omega(\sigma) (\overline{\Phi_{1,1}(\sigma)} - \right. \\
\left. - \overline{\Phi_{2,0}(\sigma)}) + \omega'(\sigma) (\overline{\Psi_{1,1}(\sigma)} - \overline{\Psi_{2,0}(\sigma)}) \right] = g_1(\sigma), \quad \sigma \in \Gamma \quad (2.3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_1 \Phi_{1,1}(\sigma) - \overline{\Phi_{1,1}(\sigma)} - kx_2 \Phi_{2,0}(\sigma) + k \overline{\Phi_{2,0}(\sigma)} + \frac{\bar{\sigma}^2}{\omega'(\sigma)} [\omega(\sigma) (\overline{\Phi_{1,1}(\sigma)} - \\
- k \overline{\Phi_{2,0}(\sigma)}) + \omega'(\sigma) (\overline{\Psi_{1,1}(\sigma)} - k \overline{\Psi_{2,0}(\sigma)})] = g_2(\sigma), \quad \sigma \in \Gamma \quad (2.4)
\end{aligned}$$

Здесь

$$\Phi_{1,1}(\zeta) = \Phi_{1,0}(\zeta) + \Phi_{1,0}\left(\frac{m}{\zeta}\right), \quad \Psi_{1,1}(\zeta) = \Psi_{1,0}(\zeta) + \Psi_{1,0}\left(\frac{m}{\zeta}\right)$$

$$g_1(\sigma) = -f_{1,0}(\sigma) - \overline{f_{1,0}(\sigma)} + f_{2,0}(\sigma) + \overline{f_{2,0}(\sigma)} + \\ + \frac{\bar{\sigma}^2}{\omega'(\sigma)} [\omega(\sigma)(\overline{f_{1,0}(\sigma)} - \overline{f_{2,0}(\sigma)}) + \overline{\omega'(\sigma)}(\overline{f_{1,1}(\sigma)} - \overline{f_{2,1}(\sigma)})] \\ g_2(\sigma) = -\alpha_1 f_{1,0}(\sigma) + \overline{f_{1,0}(\sigma)} + k\alpha_2 f_{2,0}(\sigma) - k\overline{f_{2,0}(\sigma)} - \\ - \frac{\bar{\sigma}^2}{\omega'(\sigma)} [\omega(\sigma)(\overline{f_{1,0}(\sigma)} - k\overline{f_{2,0}(\sigma)}) + \overline{\omega'(\sigma)}(\overline{f_{1,1}(\sigma)} - k\overline{f_{2,1}(\sigma)})]$$

$$k = \frac{\mu_1}{\mu_2}$$

Из условий (2.3) и (2.4) находим

$$(k + \alpha_1) \frac{\zeta^2 - m}{\zeta^2} \Phi_{1,0}(\zeta) + \frac{(k-1)(1-m^2)}{m\zeta^2} \left[ (1+m\zeta^2) \overline{\Phi_{1,0}(\zeta)} - \right. \\ \left. - m\zeta(1-m\zeta^2) \overline{\Phi'_{1,0}(m\zeta)} + \frac{\delta_1(1-m^2\zeta^2)}{1-m^2} \Phi_{1,0}(m^2\zeta) \right] = \quad (2.5) \\ = \frac{kQ_1(\zeta) + Q_2(\zeta)}{R} - \frac{k-1}{Rm\zeta^2} \left[ \delta_2 Q_1\left(\frac{1}{m\zeta}\right) - \delta_3 Q_2\left(\frac{1}{m\zeta}\right) \right]$$

$$\Psi_{1,0}(\zeta) = \frac{1}{R(\zeta^2 - m)} \left[ \delta_2 \overline{Q_1}\left(\frac{1}{\zeta}\right) - \delta_3 \overline{Q_2}\left(\frac{1}{\zeta}\right) \right] + \frac{1-m\zeta^2}{\zeta^2 - m} \left[ \delta_1 \overline{\Phi_{1,0}(m\zeta)} + \right. \\ \left. + \Phi_{1,0}(\zeta) \right] - \frac{\zeta(1+m\zeta^2)}{\zeta^2 - m} \Phi'_{1,0}(\zeta), \quad |\zeta| < 1 \quad (2.6)$$

$$\Phi_{2,0}(\zeta) = \frac{\delta_3 \zeta^2}{R(\zeta^2 - m)} [Q_1(\zeta) + Q_2(\zeta)] + \delta_3(1 + \alpha_1) \Phi_{1,0}\left(\frac{m}{\zeta}\right) \quad (2.7)$$

$$\Psi_{2,0}(\zeta) = \frac{1-m\zeta^2}{\zeta^2 - m} \left[ \frac{1+\alpha_1}{k-1} \overline{\Phi_{1,0}}\left(\frac{1}{\zeta}\right) + \Phi_{2,0}(\zeta) \right] - \\ - \frac{\zeta(1+m\zeta^2)}{\zeta^2 - m} \Phi'_{2,0}(\zeta) - \frac{\overline{Q_1}\left(\frac{1}{\zeta}\right) + \overline{Q_2}\left(\frac{1}{\zeta}\right)}{R(k-1)(\zeta^2 - m)}, \quad |\zeta| > 1 \quad (2.8)$$

Здесь

$$Q_j(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\omega'(\sigma) g_j(\sigma)}{\sigma - \zeta} d\sigma + P_j(\zeta), \quad j = 1, 2 \quad (2.9)$$

$$P_1(\zeta) = R[a_{2,0} - m\overline{b_{1,0}} - a_{1,0} - \overline{a_{1,0}} + \frac{\overline{b_{2,1}} - m(a_{1,1} + \overline{b_{1,1}})}{\zeta} + \\ + \frac{\overline{b_{2,0}} - \overline{b_{1,0}} + m(\overline{a_{2,0}} - a_{1,0}\overline{a_{1,0}})}{\zeta^2}]$$



$$P_2(\zeta) = R \left[ kx_2 a_{2,0} + m \bar{b}_{1,0} - x_1 a_{1,0} + \bar{a}_{1,0} + \frac{m(\bar{b}_{1,1} - x_1 a_{1,1}) - k \bar{b}_{2,1}}{\zeta} + \frac{\bar{b}_{1,0} - k \bar{b}_{2,0} + m(\bar{a}_{1,0} - x_1 a_{1,0} - k \bar{a}_{2,0})}{\zeta^2} \right]$$

$$\delta_1 = (kx_2 - x_1) \delta_3, \quad \delta_2 = kx_2 \delta_3, \quad \delta_3 = \frac{1}{1 + kx_2}$$

Приравнивая в соотношении (2.5) коэффициенты при одинаковых степенях  $\zeta$ , можем получить

$$\tilde{a}_{1,k} = - \sum_{n=1}^{\infty} m^{n-1} \times$$

$$\times \frac{\alpha_{2n-k} A_{2n+k-2} + \beta_{2n+k} \bar{A}_{2n+k-2} - (k-1)m^{2n+k-1} (x_{2n+k} B_{2n+k} + \beta_{2n+k} \bar{B}_{2n+k})}{R(\alpha_{2n+k}^2 - \beta_{2n+k}^2)}$$

$$(k = 0, 1, 2, \dots) \quad (2.10)$$

где

$$\bar{a}_{1,0} = 2a_{1,0}, \quad \bar{a}_{1,k} = a_{1,k} \quad (k = 1, 2, 3, \dots)$$

$$\left. \begin{aligned} x_n &= \delta_1 m^{2(n-1)} (k-1) - k - x_1 \\ \beta_n &= (k-1)(n-1)(1-m^2)m^{n-2} \end{aligned} \right\} \quad (n = 2, 3, 4, \dots)$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\omega'(\tau) [k g_1(\tau) + g_2(\tau)]}{\tau - \zeta} d\tau = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \zeta^k \quad (|\zeta| < 1) \quad (2.11)$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\omega'(\tau) [\delta_2 g_1(\tau) - \delta_3 g_2(\tau)]}{\tau - \zeta} d\tau = \sum_{k=1}^{\infty} B_k \zeta^{-k} \quad (|\zeta| > 1) \quad (2.12)$$

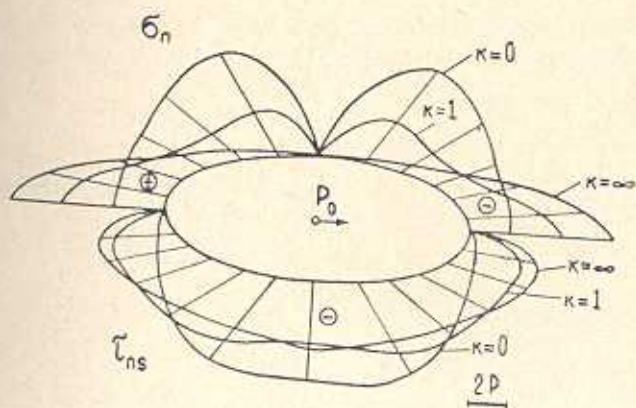
Таким образом, имеем следующую последовательность операций для определения упругого равновесия пластинки с эллиптическим включением:

а) из соотношений (2.11), (2.12) определяем коэффициенты  $A_k$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ),  $B_k$  ( $k = 1, 2, 3, \dots$ ) и, используя (2.10), находим  $\tilde{a}_{1,k}$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ).

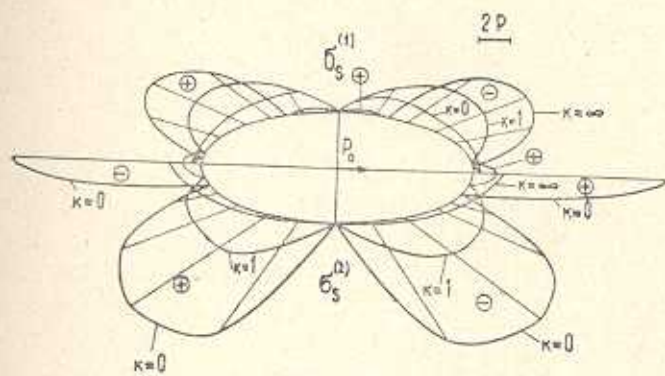
б) из соотношений (2.5)–(2.8) определяем функции  $\Phi_{j,0}(\zeta)$ ,  $\Psi_{j,0}(\zeta)$  ( $j = 1; 2$ ), подставляя которые в формулы (1.2), (1.3), находим напряженное состояние отдельно для пластинки и включения.

На фиг. 1, 2, 3, 4, приведены графики распределения напряжений на границе раздела материалов пластинки и включения ( $\varepsilon = 0.4$ ;  $\nu_1 = \nu_2 = 0.25$ ;  $x_1 = x_2 = 2.2$ ;  $k = 0, 1, \infty$ ) в долях

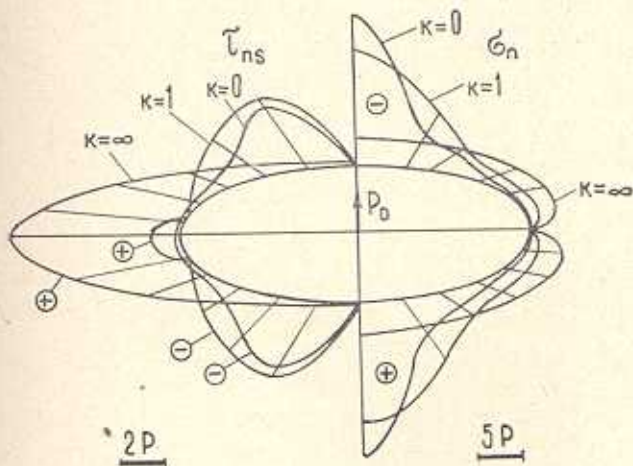
$$P = \frac{P_{1,0}}{a}$$



Фиг. 1

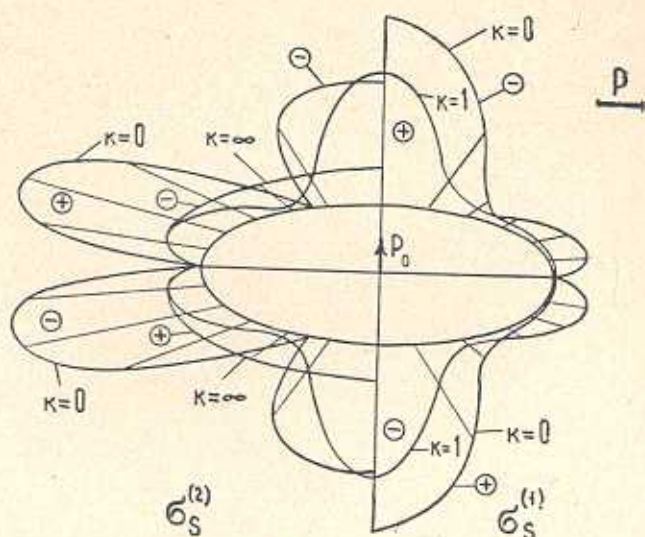


Фиг. 2



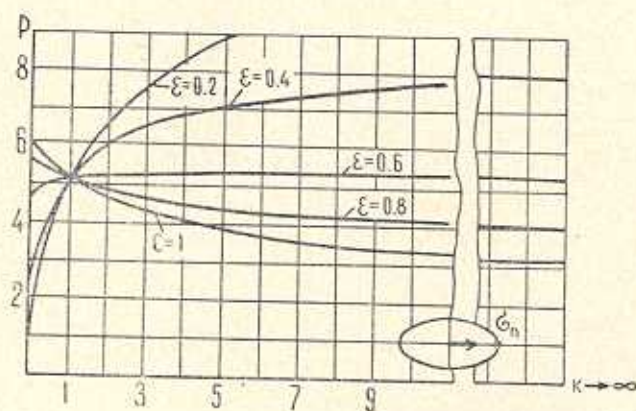
Фиг. 3

для частного случая, когда напряженное состояние вызывается лишь одной сосредоточенной силой, приложенной к центру эллиптического включения и направленной по его большой или малой полуосям.



Фиг. 4

Влияние размеров диска и его жесткости на напряженное состояние можно проследить на графиках фиг. 5, 6. Здесь приведена для различных значений эксцентриситета  $\varepsilon$  ( $\varepsilon = 0.2; 0.4; 0.6; 0.8; 1$ ) зависи-



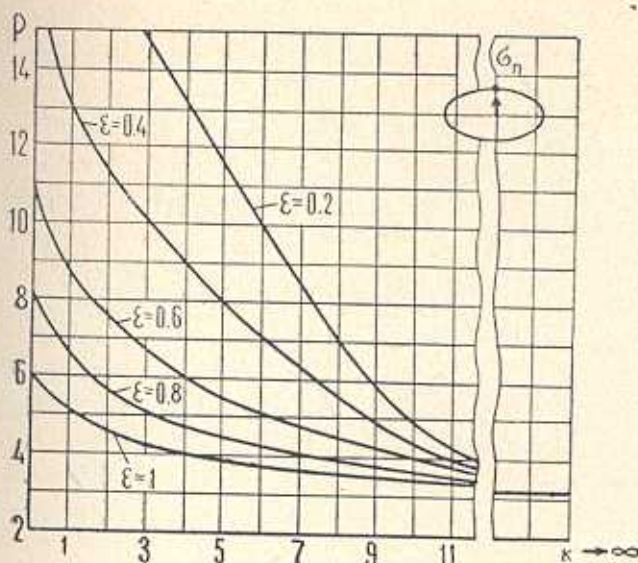
Фиг. 5

мость нормальных напряжений  $\sigma_n$  от  $k$  ( $k = \frac{E_1}{E_2}$ ), возникающих в вершинах эллиптического включения, когда сила направлена соответственно по его большой или малой полуосям.

На основании графиков можно заключить:



1. Наибольшие контактные напряжения  $\sigma_n$  возникают в окрестности конца малой полуоси при  $k < 1$  и в окрестности конца большой полуоси при  $k > 1$ , если  $\varepsilon \leq 0.4$ , независимо от направления сосредоточенной силы.



Фиг. 6

2. Если сосредоточенная сила направлена по большой полуоси включения, то в окрестности ее конца нормальные напряжения с увеличением  $k$  уменьшаются при  $\varepsilon > 0.6$ , почти не изменяются при  $\varepsilon = 0.6$  и увеличиваются, когда  $\varepsilon < 0.6$  (фиг. 5).

3. Если же сосредоточенная сила направлена по малой полуоси, то в окрестности ее конца с увеличением  $k$  контактные напряжения  $\sigma_n$  уменьшаются независимо от параметра  $\varepsilon$  и при  $k \rightarrow \infty$  они стремятся к одному и тому же пределу (фиг. 6).

Львовский ордена Ленина  
государственный университет  
им. Ив. Франко

Поступила 28 VI 1971

Ի. Ն. ՍՈՒՎ, Գ. Վ. ԳՐԻԳՅԱՆ

ՍԱԼԻ ԵՎ ԷԼԻՊՏԱԿԱՆ ՆԵՐԳՐՈՎԻ ԱՌԱՋԳՍԱԿԱՆ ՓՈՆԱԶԴԵՅՈՒԹՅԱՆ  
ՎԵՐԱՐԵՐՅԱԿ ԿՈՆՏԱԿՏԱՅԻՆ ԽՆԴԻՐ

Ա մ փ ո փ ո լ մ

Աշխատանքում լուծվել է առաձգականության տեսության հարի խնդիրը  
էլիպտական ներդրակով սալի համար առաձգական նյութերի բաժանման դժի



վրա իդեալական մեխանիկական կոնտակտի դեպքում: Առաձգական վիճակը առաջանում է կենտրոնացած ուժային և մոմենտային զորժոնների առկայության դեպքում ինչպես նաև սայի անվերջ հեռու մասերում համասեռ լարված վիճակով:

Գիտարկված է առաձգական հալասարակչառության մասնավոր դեպք, երբ կենտրոնացած ուժը անզավորված է ներգրակի կենտրոնում: Թվային արդյունքները ցույց են տրված նյութերի բաժանման զծի վրա լարումների բաշխման գծագրերի տեսքով:

## A CONTACT PROBLEM OF ELASTIC INTERACTION FOR A PLATE WITH ELLIPTIC INCLUSION

I. N. OSIV, D. V. GRILITSKY

### S u m m a r y

A plane problem of elasticity for a plate with elliptic inclusion under perfect mechanical contact along the interface between elastic materials is solved. The elastic state is due to the effect of concentrated forces and moments as well as to uniform stresses on the plate infinity.

A particular case where a concentrated force acts in the centre of inclusion is considered. The numerical results are illustrated by diagrams of stress distribution along the interface.

### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. Изд. АН СССР, 1954.
2. Лехницкий С. Г. Анизотропные пластинки. Гостехиздат, 1957.
3. Лехницкий С. Г. Распределение напряжений в анизотропной пластинке с эллиптическим упругим ядром (плоская задача). Инж. сб., 19, Изд-во АН СССР, 1954.
4. Hardiman N. J. Elliptic elastic inclusion in an infinite elastic plate. Quart. J. Mech. Appl. Math., v. 7, part. 2, 1954.
5. Kaiser G. Die Scheibe mit elliptischen Kern. Ingr.—Arch., т. 30, № 4, 1961.