ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXVI, № 1, 1973 Механика

Дж. Э. МКРТЧЯН, А. А. ХАЧАТРЯН

РАСЧЕТ ПОЛОЙ СФЕРЫ, ИЗГОТОВЛЕННОЙ ИЗ РАЗНОМОДУЛЬНОГО МАТЕРИАЛА

Рассматривается напряженное состояние толстостенного разномодульного сферического сосуда, находящегося под действием равномерных внутреннего и внешнего давлений.

Получены расчетные формулы нормальных напряжений для трех возможных (разных с точки зрения разномодульной теории упругости) случаев отношений внутреннего и внешнего давлений.

Аналогичная задача для сферического сосуда, находящегося под действием внутреннего давления и наружного натяжения, рассмотрена в работе [1].

Сферический сосуд с внутренним и внешним радиусами a и b находится под действием равномерных внутреннего (p_1) и внешнего (p_2) давлений. Сосуд изготовлен из разномодульного материала, характеризующегося упругими постоянными E^+, ν^+ (при растяжении) и E^-, ν^- (при сжатии).

При решении задачи будем пользоваться сферическими координатами (r, θ, φ). Очевидно, что в рассматриваемой полярно-симметричной задаче нормальные напряжения σ_r, $\sigma_\theta = \sigma_\varphi$ суть главные напряжения, не зависящие от координат θ, φ, и являются функциями только от координаты r.

Приведем чисто геометрические и чисто статические уравнения, которые, как известно [1], одинаковы и для обычного одномодульного и для разномодульного материалов.

Уравнение равновесия элемента сферы в полярно-симметричном случае [2]

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{2}{r}(\sigma_r - \sigma_\theta) = 0 \tag{1.1}$$

Связи между компонентами деформаций и радиальным перемещением

$$e_\theta = e_\varphi = \frac{u}{r}, \qquad e_r = \frac{du}{dr} \tag{1.2}$$

Условие совместности деформаций

$$r\frac{de_\theta}{dr} + e_\theta - e_r = 0 \tag{1.3}$$

Приведем также уравнения закона упругости для разномодульного материала [1] в главных направлениях

$$e_r = a_{11}\sigma_r + 2a_{12}\sigma_\theta$$
$$e_\theta = e_\varphi = (a_{22} + a_{12})\sigma_\theta + a_{12}\sigma_r \tag{1.4}$$

где для областей первого рода

$$a_{11} = a_{22} = \frac{1}{E^+}$$

а для областей второго рода

$$a_{11} = \frac{1}{E^+}, \quad a_{22} = \frac{1}{E^-}, \quad a_{12} = -\frac{\nu^+}{E^+} = -\frac{\nu^-}{E^-} \tag{1.5}$$

причем верхние индексы (плюс или минус) при упругих постоянных соответствуют знакам главных напряжений σ_r и σ_θ.

Здесь так же, как и в классической теории, вводится функция напряжений $\psi(r)$, через которую напряжения определяются по формулам [2]

$$\sigma_r = \frac{2\psi}{r}, \quad \sigma_\theta = \sigma_\varphi = \frac{d\psi}{dr} + \frac{\psi}{r} \tag{1.6}$$

В силу (1.6) уравнение равновесия (1.1) удовлетворяется тождественно.

Из уравнения (1.3), с учетом формул (1.4) и (1.6), получим следующее разрешающее уравнение относительно функции напряжений

$$r^2\frac{d^2\psi}{dr^2} + 2r\frac{d\psi}{dr} - 2\frac{a_{11} + a_{12}}{a_{22} + a_{12}}\psi = 0 \tag{1.7}$$

Общий интеграл уравнения (1.7) в зависимости от безразмерной координаты t будет

$$\psi = A_1 t + B_1 t^{-2} \tag{1.8}$$

при $a_{11} = a_{22}$ (для областей первого рода)

$$\psi = A_2 t^{\frac{\lambda-1}{2}} + B_2 t^{-\frac{\lambda+1}{2}} \tag{1.9}$$

при $a_{11} \neq a_{22}$ (для областей второго рода)

где

$$\lambda^2 = 1 + 8\frac{a_{11} + a_{12}}{a_{22} + a_{12}}, \quad t = \frac{r}{b} \tag{1.10}$$

Поскольку на внутренней ($t = a/b = m$) и внешней ($t = 1$) поверхностях сферы напряжение σ_r отрицательно, поэтому естественно, что во всех точках ее $\sigma_r < 0$.

В зависимости от значений давлений p_1 и p_2 для σ_θ (и σ_φ) возможны следующие случаи, требующие отдельного их рассмотрения [3]:

а) во всех точках рассматриваемой области $\sigma_\theta \leqslant 0$,

б) в области σ_θ меняет свой знак,

в) во всей области $\sigma_\theta \geqslant 0$.

В случае а) имеем область первого рода, так как во всех точках сферы $\sigma_r < 0$, $\sigma_\theta \leqslant 0$. Поэтому функция напряжения для этого случая имеет вид (1.8). Постоянные интегрирования A_1 и B_1 определяются из следующих условий на внутренней и внешней поверхностях:

$$\text{при } t = m \quad \sigma_r = -p_1, \quad \text{при } t = 1 \quad \sigma_r = -p_2 \tag{1.11}$$

Удовлетворяя этим условиям, с учетом формул (1.6), для A_1 и B_1 получим следующие выражения:

$$A_1 = \frac{p_1 m^3 - p_2}{2(1 - m^3)}, \quad B_1 = \frac{(p_2 - p_1)m^3}{2(1 - m^3)} \tag{1.12}$$

Для напряжений σ_r, σ_θ будем иметь

$$\sigma_r = -\frac{p_1 m^3 (1 - t^3) + p_2 (t^3 - m^3)}{t^3 (1 - m^3)}$$

$$\sigma_\varphi = \sigma_\theta = -\frac{p_2 (2t^3 + m^3) - p_1 m^3 (1 + 2t^3)}{2t^3 (1 - m^3)} \tag{1.13}$$

Чтобы во всей области σ_θ было неположительным, необходимо и достаточно выполнение следующего неравенства:

$$\frac{p_1}{p_2} \leqslant \frac{3}{1 + 2m^3} \tag{1.14}$$

В случае б) напряжение σ_θ (и σ_φ) меняет свой знак, обращаясь в нуль на некоторой, пока неизвестной сферической поверхности $t = x_1$. Вся область этой поверхностью разделится на две части. Первая часть ($m \leqslant t < x_1$) является областью второго рода, так как для этой части $\sigma_r < 0$, $\sigma_\theta = \sigma_\varphi > 0$. Для нее имеем функцию напряжений (1.9) и следующие условия на поверхностях:

$$\text{при } t = m = \frac{a}{b} \quad \sigma_r = -p_1, \quad \text{при } t = x_1 \quad \sigma_\theta = 0 \tag{1.15}$$

Вторая часть ($x_1 \leqslant t \leqslant 1$) является областью первого рода, так как для нее $\sigma_r < 0$, $\sigma_\theta = \sigma_\varphi \leqslant 0$. Для этой части имеем функцию напряжений (1.8) и следующие условия на поверхностях

$$\text{при } t = x_1 \quad \sigma_\theta = 0, \quad \text{при } t = 1 \quad \sigma_r = -p_2 \tag{1.16}$$

Удовлетворяя условиям (1.15) и (1.16), для постоянных интегрирования A_i и B_i получим

$$A_1 = -\frac{p_2}{2(1+2x_1^3)}, \qquad B_1 = -\frac{p_2 x_1^3}{1+2x_1^3}$$

$$A_2 = -\frac{p_1(\lambda-1)}{N_1} m^{\frac{3+\lambda}{2}}, \qquad B_2 = -\frac{p_1(\lambda+1)}{N_1} x_1^{\lambda} m^{\frac{3+\lambda}{2}} \tag{1.17}$$

где

$$N_1 = (1+\lambda) x_1^{\lambda} + (\lambda - 1) m^{\lambda} \tag{1.18}$$

При этом для напряжений σ_r, σ_θ получим следующие выражения: для первой части $(m \leqslant t < x_1)$

$$\sigma_r = -\frac{p_1}{N_1}[(\lambda+1) x_1^{\lambda} + (\lambda-1) t^{\lambda}]\left(\frac{m}{t}\right)^{\frac{\lambda+3}{2}} \tag{1.19}$$

$$\sigma_\theta = \sigma_\varphi = \frac{p_1}{4N_1}(\lambda^2-1)(x_1^{\lambda} - t^{\lambda})\left(\frac{m}{t}\right)^{\frac{3+\lambda}{2}}$$

для второй части $(x_1 \leqslant t \leqslant 1)$

$$\sigma_r = -\frac{p_2(t^3+2x_1^3)}{t^3(1+2x_1^3)}, \qquad \sigma_\theta = \sigma_\varphi = -\frac{p_2(t^3 - x_1^3)}{t^3(1+2x_1^3)}$$

В эти формулы входит неизвестная величина x_1, которая определяется из условия непрерывности радиального перемещения (или напряжения σ_r) на границе раздела двух частей сферы

$$\sigma_r\Big|_{t=x_1-0} = \sigma_r\Big|_{t=x_1+0} \tag{1.20}$$

Удовлетворяя этому условию, с учетом формул (1.19), получим следующее трансцендентное уравнение относительно величины x_1:

$$3p_2[(\lambda+1) x_1^{\lambda} + (\lambda-1) m^{\lambda}] - 2\lambda\, p_1 m^{\frac{\lambda+3}{2}}(1+2x_1^3) x_1^{\frac{\lambda-3}{2}} = 0 \tag{1.21}$$

Чтобы уравнение (1.21) в промежутке $(m, 1)$ имело решение, отношение давлений p_1/p_2 должно удовлетворять следующим неравенствам:

$$\frac{3}{1+2m^3} < \frac{p_1}{p_2} < \frac{\lambda+1+(\lambda-1)m^{\lambda}}{2\lambda\, m^{\frac{\lambda+3}{2}}} \tag{1.22}$$

Покажем теперь, что если p_1/p_2 удовлетворяет неравенствам (1.22), то уравнение (1.21) в промежутке $m < x_1 < 1$ имеет один действительный корень. Для этого рассмотрим левую часть уравнения (1.21) как функцию от x

$$f(x) = 3[(\lambda+1) x^{\lambda} + (\lambda-1) m^{\lambda}] - 2\lambda \frac{p_1}{p_2}(1+2x^3) m^{\frac{\lambda+3}{2}} x^{\frac{\lambda-3}{2}} \tag{1.23}$$

Нетрудно заметить, что на концах промежутка $(m, 1)$ эта функция имеет разные знаки. Действительно,

$$f(m) = 2\lambda m^{\lambda}(1+2m^3)\left(\frac{3}{1+2m^3} - \frac{p_1}{p_2}\right) < 0$$

$$f(1) = 6\lambda m^{\frac{\lambda+3}{2}}\left[\frac{\lambda+1+(\lambda-1)m^{\lambda}}{2\lambda m^{\frac{\lambda+3}{2}}} - \frac{p_1}{p_2}\right] > 0$$

Поэтому непрерывная функция $f(x)$ в некоторой точке $(x = x_1)$ обращается в нуль. Покажем, что это значение (x_1) единственное. Для этого продифференцируем функцию $f(x)$ (1.23) и вычислим выражение

$$\frac{2}{3}\left\{x(1+2x^3)f'(x) - \left[\frac{\lambda-3}{2} + (\lambda+3)x^3\right]f(x)\right\} =$$

$$= (x^{\lambda} - m^{\lambda})[\lambda^2 - x^3 + 3(1-x^3) + 2x^3(\lambda^2-1)] + 4\lambda(1-x^3)(x^{\lambda}+m^{\lambda}) > 0$$

Отсюда следует, что в окрестностях точки $x = x_1$, где $f(x_1) = 0$, $f'(x_1) > 0$ и поэтому эта точка единственная.

Покажем теперь, что всегда, независимо от значений параметров m и λ, имеем действительный интервал, в пределах которого, если меняется отношение давлений p_1/p_2, реализуется случай б). Это равносильно доказательству справедливости следующего неравенства:

$$\frac{\lambda+1+(\lambda-1)m^{\lambda}}{2\lambda m^{\frac{\lambda+3}{2}}} - \frac{3}{1+2m^3} > 0$$

После некоторых преобразований эту разность представим в виде

$$\frac{\lambda\left[\left(1-m^{\frac{\lambda+3}{2}}\right)^2 + m^3\left(1-m^{\frac{\lambda}{2}}\right)^2 + \left(m^{\frac{\lambda}{2}} - m^{\frac{3}{2}}\right)^2\right] + (1-m^{\lambda})(1+2m^3)}{2\lambda(1+2m^3)m^{\frac{\lambda+3}{2}}}$$

откуда, очевидно, что рассматриваемая разность положительна.

Рассмотрим теперь случай в). В этом случае вся сфера является областью второго рода, так как $\sigma_r < 0$, $\sigma_\theta = \sigma_\varphi \geqslant 0$. Для всей области имеем функцию напряжений (1.9) и условия на поверхности (1.11). Удовлетворяя этим условиям, определим постоянные интегрирования A_2 и B_2

$$A_2 = -\frac{p_2 - p_1 m^{\frac{\lambda+3}{2}}}{4(1-m^{\lambda})}, \quad B_2 = \frac{p_2 m^{\lambda} - p_1 m^{\frac{\lambda+3}{2}}}{4(1-m^{\lambda})} \qquad (1.24)$$

Для напряжений σ_r и σ_θ будем иметь

$$\sigma_r = -\frac{p_2(t^{\lambda} - m^{\lambda}) + p_1(1-t^{\lambda})m^{\frac{\lambda+3}{2}}}{(1-m^{\lambda})\,t^{\frac{\lambda+3}{2}}}$$

$$\sigma_\theta = \sigma_\varphi = \frac{p_1[(1+\lambda)t^\lambda + (\lambda - 1)]m^{\frac{3-\lambda}{2}} - p_2[(1+\lambda)t^\lambda + (\lambda - 1)m^\lambda]}{4(1-m^\lambda)t^{\frac{\lambda+3}{2}}} \tag{1.25}$$

Исходя из выражения для напряжения σ_θ, нетрудно показать: чтобы в рассматриваемой области $(m \leqslant t \leqslant 1)$ σ_θ было неотрицательным, необходимо выполнение следующего неравенства:

$$\frac{p_1}{p_2} \geqslant \frac{1+\lambda+(\lambda-1)m^\lambda}{2\lambda m^{\frac{\lambda+3}{2}}} \tag{1.26}$$

Сравнивая неравенства (1.14), (1.22) и (1.26), замечаем, что при заданных значениях параметров m, λ и отношения давлений p_1/p_2 может быть выполнено одно из этих неравенств и, соответственно с этим, будем иметь один из рассмотренных выше случаев а), б) или в).

Институт механики
АН Армянской ССР

Поступила 11 II 1972

Ջ. Զ. ՄԿՐՏՉՅԱՆ, Ա. Ա. ԽԱՉԱՏՐՅԱՆ

ՏԱՐԱՄՈԴՈՒԼ ՆՅՈՒԹԻՑ ՊԱՏՐԱՍՏՎԱԾ ՍՆԱՄԵՋ ԳՆԴԻ ՀԱՇՎԱՐԿԸ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Դիտարկված է ներքին ու արտաքին հավասարաչափ ճնշումների տակ գտնվող տարամոդուլ նյութից պատրաստված սնամեջ հաստապատ գնդի լարվածային վիճակը։

Լարումների համար ստացված են հաշվարկային բանաձևեր ճնշումների հարաբերության, տարամոդուլության տեսանկյունից տարբեր, երեք հնարավոր միջակայքերի համար։

CALCULATION OF A HOLLOW BALL MADE OF HETEROMODULUS MATERIAL

J. Z. MKRTCHIAN, A. A. KHACHATRIAN

S u m m a r y

The stressed state of a hollow ball made of heteromodulus material is considered. The ball is under the action of uniformly distributed internal and external pressure. Formulas to calculate normal stresses are derived.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Амбарцумян С. А., Хачатрян А. А.* Основные уравнения теории упругости для материалов, разносопротивляющихся растяжению и сжатию. Инж. ж., МТТ, № 2, 1966.
2. *Лейбензон Л. С.* Курс теории упругости. Гостехиздат, М.—Л., 1947.
3. *Мкртчян Дж. З.* Расчет составных полых цилиндров, изготовленных из разномодульных материалов. Известия АН Арм.ССР, Механика, т. XXIII, 4, 1970.