

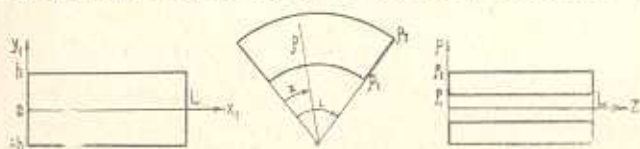
А. В. КОСТАРЕВ

ПРИМЕНЕНИЕ СООТНОШЕНИЙ РАСШИРЕННОЙ
 ОРТОГОНАЛЬНОСТИ К РЕШЕНИЮ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ
 ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Возможность точного решения краевых задач теории упругости методом однородных решений связана со свойствами ортогональности собственных функций соответствующих однородных задач. Установленные впервые П. А. Шиффом [1], а затем П. Ф. Папковичем [2] для различных частных задач, подобные свойства могут быть найдены методами исследования краевых задач для систем дифференциальных уравнений первого порядка. Переход к таким системам в задачах теории упругости предложен в работах Литтла, Флюгге и их последователей. Метод Литтла [3, 4, 5] позволяет строить собственные векторы сопряженной краевой задачи, биортогональные с собственными векторами исходной задачи. Идея Флюгге состоит в переходе к самосопряженной краевой задаче для соответствующим образом построенного расширенного вектора [6].

В настоящей работе рассматривается общий подход к решению двумерных однородных краевых задач, приводящихся методом Флюгге к самосопряженной проблеме.

1. Рассмотрим области плоско деформируемых прямоугольника и кругового прямоугольника, а также область продольного сечения осесимметрично деформируемого полого кругового цилиндра (фиг. 1).



Фиг. 1

Для общности дальнейших рассуждений введем безразмерные координаты x, y ($0 < x < l, a < y < b$) по формулам:

прямоугольник

$$x = x_1/h, \quad y = y_1/h, \quad l = L/h, \quad b - a = 1 \quad (1.1)$$

круговой прямоугольник

$$y = \ln(\rho/\sqrt{\rho_1\rho_2}), \quad b - a = \ln(\sqrt{\rho_2/\rho_1})$$

цилиндр

$$x = z/\rho_2, \quad y = \rho/\rho_2, \quad l = L/\rho_2, \quad a = \rho_1/\rho_2, \quad b = 1.$$

Пусть на границах $y = a, b$ областей заданы некоторые однородные краевые условия, позволяющие привести задачу к самосопряженной проблеме [7], а на торцах $x = 0, l$ перемещения и напряжения принимают следующие краевые значения:

$$\begin{aligned} x = 0: \quad u &= u^0(y), \quad v = v^0(y) \\ \rho \tau_{xy}/(2\mu) &= \tau^0(y), \quad \rho \tau_{xy}/(2\mu) = \tau^0(y) \end{aligned} \quad (1.2)$$

$$\begin{aligned} x = l: \quad u &= u^*(y), \quad v = v^*(y) \\ \rho \tau_x/(2\mu) &= \tau^*(y), \quad \rho \tau_{xy}/(2\mu) = \tau^*(y) \end{aligned} \quad (1.3)$$

Здесь u, v — проекции вектора перемещений на оси x, y соответственно; для прямоугольника ρ не читать. Заметим, что по два из краевых значений (1.2), (1.3) заданы.

Как известно, основная проблема метода однородных решений заключается в том, чтобы по заданным на торцах краевым значениям найти коэффициенты C_k решения

$$u(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k \xi_k(y) e^{-\lambda_k x}, \quad u = \begin{vmatrix} u \\ v \end{vmatrix}, \quad \xi_k = \begin{vmatrix} u_k \\ v_k \end{vmatrix} \quad (1.4)$$

Здесь ξ_k — собственные векторы, а λ_k — собственные числа задачи*.

Таким образом, возникает проблема одновременного разложения четырех краевых значений в ряды по однородным решениям. Для решения этой проблемы в задачах с указанными выше однородными краевыми условиями воспользуемся соотношениями расширенной ортогональности однородных решений. Вывод таких соотношений для рассматриваемых задач с однородными краевыми условиями

$$y = a, b: \quad u = v = 0 \quad (1.5)$$

приведен в работе [7].

Запишем эти соотношения в виде

$$\int_a^b \chi_k^T R \chi_s dy = \begin{cases} 2G_k, & k = s \\ 0, & k \neq s \end{cases} \quad (1.6)$$

$$R = \begin{vmatrix} 0 & T \\ T & 0 \end{vmatrix}, \quad T = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$$

Здесь

$$\chi_k = \|u_k(y), v_k(y), \tau_k(y), \tau_k(y)\|^T \quad (1.7)$$

— фундаментальные собственные векторы, имеющие компонентами однородные перемещения u_k, v_k и однородные напряжения τ_k, τ_k . В соответствии с законом Гука имеем: для прямоугольника

$$\tau_k(y) = (m-1)^{-1} (v_k' - m \lambda_k u_k), \quad \tau_k(y) = (u_k' - \lambda_k v_k)/2 \quad (1.8)$$

* Вид собственных векторов и характеристические уравнения рассматриваемых задач можно найти в работах [3, 4, 6, 8].

$$\frac{1}{2^{\nu}} \left\| \begin{matrix} \sigma_x(y) \\ \tau_{xy}(y) \end{matrix} \right\| = \sum_{k=0}^{\infty} C_k \left\| \begin{matrix} \sigma_k(y) \\ \tau_k(y) \end{matrix} \right\| e^{-\lambda_k x}$$

для кругового прямоугольника

$$\sigma_k(y) = (m-1)^{-1} [v_k + m(v_k - \lambda_k u_k)], \quad \tau_k(y) = (u_k - u_k - \lambda_k v_k)/2$$

$$\frac{\nu}{2^{\nu}} \left\| \begin{matrix} \sigma_x(y) \\ \tau_{xy}(y) \end{matrix} \right\| = \sum_{k=0}^{\infty} C_k \left\| \begin{matrix} \sigma_k(y) \\ \tau_k(y) \end{matrix} \right\| e^{-\lambda_k x}$$

для цилиндра

$$\sigma_k(y) = (m-2)^{-1} [(yv_k)' - (m-1)\lambda_k yv_k]$$

$$\tau_k(y) = y(u_k - \lambda_k v_k)/2$$

$$\frac{\nu}{2^{\nu}} \left\| \begin{matrix} \sigma_x(y) \\ \tau_{xy}(y) \end{matrix} \right\| = \sum_{k=0}^{\infty} C_k \left\| \begin{matrix} \sigma_k(y) \\ \tau_k(y) \end{matrix} \right\| e^{-\lambda_k x}$$

Здесь m — число Пуассона и штрихом обозначено дифференцирование по y .

В задачах о прямоугольнике и цилиндре противоположные свойства четности по λ групп однородных решений u_k, τ_k и v_k, σ_k (см. выражения (1.8), (3.5)) приводят к внутренним соотношениям ортогональности. Действительно, сложив соотношения (1.6) для λ_k, λ_s и $\lambda_k, -\lambda_s$ найдем

$$\int_a^b (u_k \sigma_s - \tau_k v_s) dy = \begin{cases} G_k, & \lambda_k^2 = \lambda_s^2 \\ 0, & \lambda_k^2 \neq \lambda_s^2 \end{cases} \quad (1.9)$$

Можно показать, что выражения (1.9) эквивалентны соотношениям обобщенной ортогональности П. Ф. Палковича и П. А. Шиффа для прямоугольника и цилиндра соответственно.

Следует отметить, что для кругового прямоугольника соотношения (1.9) не выполняются, так как здесь однородные решения не обладают указанными свойствами четности.

Метод Флюгге позволяет найти соотношения расширенной ортогональности вида (1.6) в задачах о прямоугольнике и цилиндре и с другими, отличными от (1.5), однородными краевыми условиями

$$y = a, b: \sigma_y = \tau_{xy} = 0, \quad u = v_y = 0, \quad v = \tau_{xy} = 0 \quad (1.10)$$

В этих задачах также выполняются соотношения (1.9), что соответствует результатам работ В. К. Прокопова [9] и Б. М. Нуллера [10].

2. Соотношения (1.6) позволяют найти решение задачи Коши, когда на начальном многообразии $x = \text{const}$ заданы как перемещения, так и напряжения. Действительно, если, например, известны функции (1.2), то решением такой задачи будет ряд (1.4) с коэффициентами

$$C_k = (2G_k)^{-1} \int_a^b \chi_k^T R \chi^{\circ} dy \quad (2.1)$$

$$\chi^{\circ}(y) = \|u^{\circ}(y), v^{\circ}(y), \sigma^{\circ}(y), \tau^{\circ}(y)\| \quad (2.2)$$

Внутренние соотношения ортогональности (1.9) позволяют найти точное решение некоторых краевых задач о прямоугольнике и цилиндре. К ним относятся известные задачи с заданными на торцах нормальными перемещениями и касательными напряжениями или касательными перемещениями и нормальными напряжениями [10, 11]. Так, если заданы краевые значения u° , τ° , u^* , τ^* , то соотношения (1.9) позволяют найти коэффициенты решения (1.4) в виде

$$C_k = (G_k \operatorname{sh} \lambda_k l)^{-1} \int_a^b [\tau^* v_k - u^* \tau_k + e^{\lambda_k l} (u^{\circ} \tau_k - \tau^{\circ} v_k)] dy \quad (2.3)$$

Если на торцах заданы v° , σ° , v^* , σ^* , то

$$C_k = (G_k \operatorname{sh} \lambda_k l)^{-1} \int_a^b [v^* \tau_k - \sigma^* u_k + e^{\lambda_k l} (\tau^{\circ} u_k - v^{\circ} \tau_k)] dy \quad (2.4)$$

Когда на торцах прямоугольника или цилиндра заданы разные комбинации сопряженных условий, например, u° , τ° , v^* , σ^* , то

$$C_k = (G_k \operatorname{ch} \lambda_k l)^{-1} \int_a^b [\tau^* u_k - v^* \tau_k + e^{\lambda_k l} (\tau^{\circ} u_k - v^{\circ} \tau_k)] dy \quad (2.5)$$

Невыполнение соотношений внутренней ортогональности в задаче о круговом прямоугольнике свидетельствует о том, что здесь невозможно найти точные решения краевых задач методом однородных решений.

Таким образом, в общем случае коэффициенты C_k решения (1.4) рассматриваемых задач могут быть найдены лишь приближенно, например, методами коллокаций [12], полимоментов [13] или ортогонализации [10]. Однако с помощью первых двух методов все четыре краевые условия на торцах могут быть удовлетворены лишь приближенно, а метод ортогонализации, позволяющий удовлетворить двум условиям на торцах точно, требует построения специальной системы функций и разработан пока только для задач с одинаковыми комбинациями краевых условий на обоих торцах области.

Свойство расширенной ортогональности (1.6) указывает естественный путь построения другого метода приближенного решения рассматриваемых задач, который заключается в переходе к задаче Коши для приближенно доопределенного начального вектора (2.2). Две неизвестные составляющие этого вектора могут быть найдены из усло-

вий, чтобы решение (1.4) задачи Коши удовлетворяло краевым условиям на торце $x = l$.

Такие условия для полубесконечных прямоугольника или цилиндра вытекают из требования затухания решения (1.4) на бесконечности

$$\int_a^b \chi_k^T R \chi^{\circ} dy = 0, \quad \operatorname{Re} \lambda_k < 0 \quad (2.6)$$

Соотношения (2.6) эквивалентны найденным М. И. Гуссейн-Заде [14] другим методом условиям существования затухающих решений задачи о полуполосе.

Для конечных областей в соответствии с (1.6) найдем разложения векторов χ° и χ^* = $\|u^* v^* \sigma^* \tau^*\|$

$$\chi^{\circ}(y) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k^{\circ} \chi_k(y), \quad C_k^{\circ} = G_k^{-1} \int_a^b \chi_k^T R \chi^{\circ} dy$$

$$\chi^*(y) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k^* e^{-\lambda_k l} \chi_k(y), \quad C_k^* = e^{\lambda_k l} G_k^{-1} \int_a^b \chi_k^T R \chi^* dy$$

Однако любой из векторов χ° , χ^* полностью и однозначно определяет напряженно-деформированное состояние области. Поэтому с необходимостью должно быть $C_k^{\circ} = C_k^*$ или

$$\int_a^b (u^{\circ} \sigma_k - \tau^{\circ} v_k + \sigma^{\circ} u_k - v^{\circ} \tau_k) dy = e^{\lambda_k l} \int_a^b (u^* \sigma_k - \tau^* v_k + \sigma^* u_k - v^* \tau_k) dy \quad (2.7)$$

Условия (2.6), (2.7) могут служить для определения неизвестных краевых значений. Воспользуемся для этой цели методом ортогонализации [14]. Перенеся в правую часть интегралы от заданных краевых значений, запишем найденные условия в виде

$$\int_a^b \Phi_k^T(y) W(y) dy = a_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.8)$$

Здесь $W(y)$ —искомый вектор, имеющий компонентами недостающие краевые значения, $\Phi_k(y)$ —неортогональные векторы однородных решений, a_k —коэффициенты, вычисленные по известным краевым значениям.

По системе векторов $\Phi_k(y)$ построим ортогональные векторы

$$\Psi_n(y) = \Delta_{n-1}^{-1} \sum_{k=0}^n \Delta_{nk} \Phi_k(y), \quad \int_a^b \Psi_k^T \Psi_s dy = \begin{cases} \Delta_n / \Delta_{n-1}, & k = s \\ 0, & k \neq s \end{cases} \quad (2.9)$$

Здесь через Δ_{nk} обозначены алгебраические дополнения элементов

$$J_{nk} = \int_a^b \Phi_k^T \Phi_n dy \quad (2.10)$$

матрицы

$$\begin{pmatrix} J_{11} & J_{12} & \cdots & J_{1n} \\ J_{21} & J_{22} & \cdots & J_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ J_{n1} & J_{n2} & \cdots & J_{nn} \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

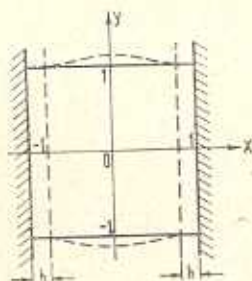
а Δ_n —определитель этой матрицы ($\Delta_{nn} \equiv \Delta_{n-1}$).
Разложение искомого вектора

$$W(y) = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k \Psi_k(y) \quad (2.12)$$

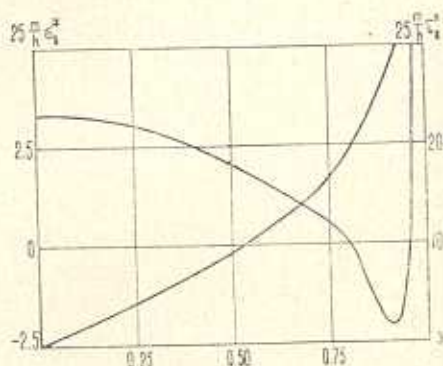
имеет коэффициенты

$$\gamma_k = \Delta_k^{-1} \sum_{s=0}^k \Delta_{ks} \alpha_s \quad (2.13)$$

Ограничившись N членами разложения (2.12), можно найти приближенные краевые значения, доопределяющие начальный вектор χ_n^0 вспомогательной задачи Коши. Решение (1.4) этой задачи с коэффициентами (2.1), вычисленными для вектора $\chi_{N'}^0$, точно удовлетворяет краевым условиям на торце $x=0$ и приближенно—условиям на втором торце.



Фиг. 2



Фиг. 3

В задачах о прямоугольнике или цилиндре внутренние соотношения ортогональности позволяют вычислить коэффициенты C_k по одной из формул (2.3), (2.4) или (2.5). Решение (1.4) с такими коэффициентами будет точно удовлетворять по одному краевому условию на

каждом торце. Остальные условия на торцах будут удовлетворены приближенно.

Таким образом, в рассматриваемых задачах можно точно удовлетворить минимум двум произвольным граничным условиям на торцах.

3. В качестве примера доопределения неизвестных краевых значений изложенным методом, найдем напряжения в корневых сечениях $x = \pm 1$ плоско деформированной области квадрата $-1 \leq x, y \leq 1$, жестко заделанного в штампы, при взаимном сближении последних на величину $2h$ (фиг. 2). Стороны $y = \pm 1$ свободны.

Исследуемое состояние получим наложением двух последовательных деформаций. Полагая сначала, что квадрат сжат между гладкими штампами, имеем [8]

$$u = -hx, \quad v = hy/m, \quad \tau_{xy} = \tau_y = 0, \quad \tau_x = -2(m+1)yh/m \quad (3.1)$$

Теперь для выполнения краевых условий исходной задачи

$$x = \pm 1: u = \mp h, \quad v = 0$$

нужно подвергнуть квадрат деформации

$$x = \pm 1: u = u^* = 0, \quad v = v^* = -hy/m \quad (3.2)$$

Найдем возникающие при этом в корневых сечениях напряжения методом, изложенным в п. 2.

Рассматривая половину $x > 0$ квадрата, и учитывая, что ввиду симметрии

$$u(0, y) = u^{\circ}(y) = 0, \quad \tau(0, y)/(2l) = \tau^{\circ}(y) = 0 \quad (3.3)$$

по формуле (2.6) ($l = 1, b = -a = 1$) находим исходные соотношения

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 (\sigma^{\circ} u_k - v^{\circ} \tau_k - c^{\lambda_k} \sigma^* u_k + e^{\lambda_k} \tau^* v_k) dy = \\ = hm^{-1} e^{\lambda_k} \int_{-1}^1 y \tau_k dy, \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (3.4)$$

Здесь

$$\begin{aligned} u_k &= \left(\sin \lambda_k + \frac{2m}{m+1} \frac{\cos \lambda_k}{\lambda_k} \right) \cos \lambda_k y - y \cos \lambda_k \sin \lambda_k y \\ v_k &= \left(\sin \lambda_k - \frac{m-1}{m+1} \frac{\cos \lambda_k}{\lambda_k} \right) \sin \lambda_k y + y \cos \lambda_k \cos \lambda_k y \\ \tau_k &= (u'_k - \lambda_k v_k)/2 \end{aligned} \quad (3.5)$$

λ_k — корни характеристического уравнения $\sin 2\lambda + 2\lambda = 0$.

Следует ожидать, что искомые напряжения

$$\sigma^*(y) = \sigma_x(1, y)/(2l), \quad \tau^*(y) = \tau_{xy}(1, y)/(2l) \quad (3.6)$$

имеют особенности в точках $(1, \pm 1)$ смены характера краевых условий. Используя результаты работы Бенсема [16], можно установить,

что при $1/m = 0.32014$ и $|y| \rightarrow 1$ напряжения в углу растут как $(1 - y^2)^{-0.25}$. Поэтому функции (3.6) представим в виде

$$\sigma^*(y) = (1 - y^2)^{-0.125} z(y), \quad \tau^*(y) = (1 - y^2)^{-0.125} \tau(y) \quad (3.7)$$

Функции $z(y)$, $\tau(y)$ имеют особенность $(1 - y^2)^{-0.125}$.

Подставив выражения (3.7) в соотношения (3.4) и сложив последние для $\pm \lambda$, после очевидных преобразований получим

$$\int_{-1}^1 \Phi_k^*(y) W(y) dy = a_k$$

$$\Phi_k^*(y) = \left\| -(1 - y^2)^{-0.125} \operatorname{cth} \lambda_k v_k, (1 - y^2)^{-0.125} u_k \right\| \quad (3.8)$$

$$W(y) = \left\| \tau(y), \sigma(y) \right\|^T, \quad a_k = 4hm^{-1} \lambda_k^{-1}$$

В соответствии с формулами (2.9), (2.10), и (2.12) найдем выражения для N -го приближения искомых функций (3.7)

$$\sigma_N^*(y) = (1 - y^2)^{-0.25} \sum_{m=1}^N \delta_N^{(m)} u_m(y)$$

$$\tau_N^*(y) = (1 - y^2)^{-0.25} \sum_{m=1}^N \delta_N^{(m)} \operatorname{cth} \lambda_m v_m(y) \quad (3.9)$$

Здесь в обозначениях (2.13)

$$\delta_N^{(m)} = \sum_{k=m}^N \gamma_k \frac{\Delta_{mk}}{\Delta_{k-1}}$$

Численное решение на ЭВМ для восьми первых квартетов корней $\lambda_k = \pm \alpha_k \pm i\beta_k$ ($k = 1, 2, 3, \dots, 8$) показало, что учет особенностей напряжений обеспечивает быструю стабилизацию их приближенных значений (фиг. 3). Так отношение

$$\left| \frac{\sigma_k^*(0) - \sigma_{k-1}^*(0)}{\sigma_2^*(0) - \sigma_1^*(0)} \right| \quad \text{при } k = 3, 4, 5, 6, 7, 8$$

принимает значения 0.53, 0.36, 0.25, 0.18, 0.07, 0.01 соответственно.

Ա. Վ. ԿՈՍՏԱՐԵՎ

ԸՆԴՀԱՆՎԱՅ ՕՐԹՈԳՈՆԱԼՈՒԹՅԱՆ ԱՌՆՁՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԿԵՐԱՌՈՒՄԸ
ԱՌԱՉԳԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ԵՂՐԱՅԻՆ ԿՆԿԻՐՆԵՐԻ
ԼՈՒԾՄԱՆ ԺԱՄԱՆԱԿ

Ա. մ. փ. ո. փ. ո. լ. մ.

Առաջարկվում է առաձգականության տեսության երկչափ համասեռ եզրային խնդիրների մոտավոր լուծման եղանակ: Եղանակի էությունը կայանում է նրանում, որ համասեռ լուծումների լայնացված օրթոգոնալության հատկությունների օգտագործումով եզրային խնդիրները բերվում են կոշու ինքնահամարյալ խնդիր:

EXTENDED ORTHOGONALITY RELATIONS TO SOLVE
BOUNDARY PROBLEMS IN THE THEORY OF ELASTICITY

A. V. KOSTAREV

S u m m a r y

The analysis concerns such two-dimensional homogeneous elastostatic boundary problems for a rectangle, a polar coordinate rectangle and an axisymmetrically loaded cylinder that can be reduced to the self-adjointed first order matrix differential problem. The extended orthogonality relations of such problems eigenvectors enable one to find the exact solution for the Cauchy problem where on one of the edges both displacements and stresses are known. An approximate method is suggested for the solution of the boundary problems under examination by defining the unprescribed end values, thus making it possible to solve the auxiliary Cauchy problem. Such solution satisfies accurately at least six of the eight boundary conditions.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Schiff P. A. Sur l'équilibre d'une cylindre d'élastique. J. Math. pures et appl. (Liouville). 1883, t. 9, serie III.
2. Папкович П. Ф. Об одной форме решения плоской задачи теории упругости для прямоугольной полосы. Докл. АН СССР, т. 27, № 4, 1940.
3. Little R. W., Childs S. B. Elastostatic boundary region problem in solid cylinders. Quart. of Appl. Math., vol. 25, № 3, 1967.
4. Little R. W. Semi-infinite strip problem with built-in edges. Trans. ASME, E 36, № 2, 1969.
5. Klemm J. L., Little R. W. The semi-infinite elastic cylinder under self-equilibrated and loading. SIAM J. Appl. Math., 19, № 4, 1970.
6. Flugge W., Keikar V. S. The problem of an elastic circular cylinder. Intern. J. Solids and Struct., vol. 4, № 4, 1968.

7. Костарев А. В., Прокопов В. К. Соотношения расширенной ортогональности для некоторых задач теории упругости. ПММ, т. 34, вып. 5, 1970.
8. Рекаш В. Г. Руководство к решению задач по теории упругости. М., изд-во „Высшая школа“, 1966.
9. Прокопов В. К. О соотношении обобщенной ортогональности П. Ф. Панковича для прямоугольной пластинки. ПММ, т. 31, вып. 5, 1967.
10. Нуллер Б. М. О соотношении обобщенной ортогональности П. А. Шиффа. ПММ, т. 33, вып. 2, 1969.
11. Прокопов В. К. Обзор работ по однородным решениям теории упругости и их приложениям. Машгиз, М., 1967 (Тр. Ленинград. политехн. ин-та № 279).
12. Прокопов В. К. Задача о стесненном изгибе прямоугольной полосы. Инж. сб., т. 2, 1952.
13. Костарев А. В., Прокопов В. К. Применение символического метода к выводу уравнений плоской задачи теории упругости в полярных координатах. ПМ, т. 2, вып. 1, 1970.
14. Гуссейн-Зиде М. И. О необходимых и достаточных условиях существования затухающих решений плоской задачи теории упругости для полуполосы. ПММ, т. 29, вып. 4, 1965.
15. Benthem I. P. A Laplace transform method for the solution of semi-infinite and finite strip problems in stress analysis. Quart. J. Mech. and Appl. Math., vol. 16, № 4, 1963.