ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXVI, № 1, 1973 Механика

В. С. САРКИСЯН, Л. О. ОВСЕПЯН

О ДВУХ КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ АНИЗОТРОПНОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ С УПРУГИМИ НАКЛАДКАМИ

Контактные задачи для изотропной полуплоскости с упругими накладками рассматривались в работах [1, 2, 3].

Решение контактной задачи для изотропной полуплоскости с двумя упругими накладками, симметрично расположенными относительно начала координат, рассматривались в работе [3]. В этой работе рассмотрено симметрическое и кососимметрическое нагружение упругих накладок. Для определения контактных напряжений под накладками получены формулы, содержащие в явном виде те особенности, которые характеризуют напряженное состояние упругих накладок в окрестностях их концов.

В настоящей работе рассматривается контактная задача для анизотропной, имеющей одну плоскость упругой симметрии, полуплоскости с двумя упругими накладками, симметрично расположенными относительно начала координат. Для определения контактных напряжений получено сингулярное интегро-дифференциальное уравнение с ядром Коши второго рода. Здесь же излагается и решение периодической контактной задачи для упругой анизотропной полуплоскости, когда в одном периоде имеются две накладки. Решение этой задачи сводится к решению сингулярного интегро-дифференциального уравнения с ядром Гильберта второго рода.

Полученные уравнения исследуются при помощи систем многочленов, ортогональных на интервалах $\sigma = [-1, -k] + [k, 1]$ $(0 \leqslant k < 1)$ с весом $w(t) = |t|(1-t^2)^{\rho}(t^2-k^2)^{q}$ [4] и приводятся к квазивполне регулярным бесконечным системам линейных уравнений.

Предварительно устанавливаются некоторые соотношения для многочленов указанного класса.

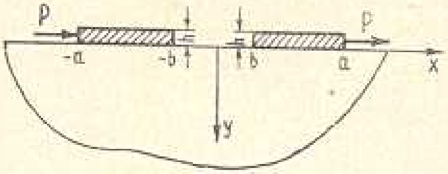
Рассматривается симметрическое и кососимметрическое нагружение упругих накладок.

Здесь вводятся те основные предположения и обозначения, что и в работах [3, 5, 6].

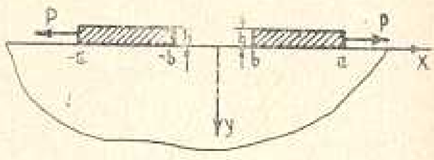
§ 1. Контактная задача для анизотропной полуплоскости с двумя упругими накладками

1. Пусть упругая анизотропная полуплоскость усилена на конечных отрезках $[-a, -b]$ и $[b, a]$ $(b < a)$ своей границы упругими креплениями в виде приваренных (или приклеенных) к ней упругих

накладок постоянной достаточно малой толщины h. Предполагается, что приложенные к одному из концов накладок сосредоточенные силы P направлены вдоль их осей в одну сторону (кососимметрическое нагружение накладок) (фиг. 1) или направленных вдоль их осей в противоположные стороны (симметрическое нагружение накладок) (фиг. 2). Определим закон распределения контактных напряжений вдоль отрезков креплений упругих накладок с упругой полуплоскостью.



Фиг. 1



Фиг. 2

Сначала рассмотрим контактную задачу для анизотропной полуплоскости при кососимметрическом нагружении упругих накладок. Для деформации точек накладок имеем

$$\varepsilon_x^{(1)} = \begin{cases} \dfrac{1}{hE_1} \displaystyle\int_x^{-b} \tau_1^{(1)}(s)\,ds & \text{при } x \in [-a, -b] \\[2ex] \dfrac{1}{hE_1} \displaystyle\int_b^{x} \tau_1^{(1)}(s)\,ds & \text{при } x \in [b, a] \end{cases} \tag{1.1}$$

С другой стороны, для деформации граничных точек анизотропной полуплоскости имеем [7]

$$\varepsilon_x^{(2)} = \frac{du^{(2)}(x)}{dx} = \frac{A^{(2)}}{\pi} \left(\int_{-a}^{-b} + \int_b^a \right) \tau_1^{(2)}(s) \frac{ds}{s-x} + B^{(2)} \tau_1^{(2)}(x) \tag{1.2}$$

Отметим, что в (1.2) интеграл понимается в смысле главного значения по Коши.

На участках $[-a, -b]$, $[b, a]$ контактов упругих накладок с полуплоскостью должны выполняться условия $u^{(1)}(x) = u^{(2)}(x)$ $\{x \in \sigma^* = [-a, -b] + [b, a],\ y = 0\}$ или же

$$\frac{du^{(1)}(x)}{dx} = \frac{du^{(2)}(x)}{dx} \quad (x \in \sigma^*,\ y = 0) \tag{1.3}$$

Подставляя выражения $\varepsilon_x^{(1)}$ и $\varepsilon_x^{(2)}$ из (1.1) и (1.2) в (1.3), для определения контактных напряжений получим сингулярное интегро-дифференциальное уравнение

$$\mu_1 \psi_1'(x) + \left(\int_{-a}^{-b} + \int_{b}^{a}\right) \psi_1'(s) \frac{ds}{s-x} = \lambda_1 \psi_1(x) \tag{1.4}$$

где $\mu_1 = \pi B^{(2)}/A^{(2)}$, $\lambda_1 = \pi/hE_1A^{(2)}$, $\tau_1^{(2)}(x) = \tau_1^{(1)}(x) = \tau_1(x)$. Неизвестная функция $\psi_1(x)$ определяется формулами

$$\psi_1(x) = \begin{cases} \int_{x}^{-b} \tau_1(s)\,ds & \text{при } x \in [-a, -b] \\ \int_{b}^{x} \tau_1(s)\,ds & \text{при } x \in [b, a] \end{cases} \tag{1.5}$$

и удовлетворяет граничным условиям

$$\psi_1(-a) = P, \quad \psi_1(-b) = 0, \quad \psi_1(b) = 0, \quad \psi_1(a) = P \tag{1.6}$$

В случае симметрически нагруженных накладок для определения контактных напряжений получается интегро-дифференциальное уравнение (1.4), а $\psi_1(x)$ определяется формулами

$$\psi_1(x) = \begin{cases} \int_{-b}^{x} \tau_1(s)\,ds & \text{при } x \in [-a, -b] \\ \int_{b}^{x} \tau_1(s)\,ds & \text{при } x \in [b, a] \end{cases} \tag{1.7}$$

и удовлетворяет граничным условиям (1.6).

Положив $x = at$, $s = a\tau$, представим интегро-дифференциальное уравнение (1.4) в виде

$$\mu_1 \varphi_1'(t) + \left(\int_{-1}^{-k} + \int_{k}^{1}\right) \varphi_1'(\tau) \frac{d\tau}{\tau - t} = \lambda_1 a \varphi_1(t) \tag{1.8}$$

где $k = b/a$, функция $\varphi_1(t)$ в случае кососимметрически нагруженных накладок согласно (1.5) задается формулами

$$\varphi_1(t) = \begin{cases} \int_{t}^{-k} \tau_1^*(\tau)\,d\tau & \text{при } t \in [-1, -k] \\ \int_{k}^{t} \tau_1^*(\tau)\,d\tau & \text{при } t \in [k, 1] \end{cases} \tag{1.9}$$

а в случае симметрически нагруженных накладок согласно (1.7)—формулами

$$\varphi_1(t) = \begin{cases} \int\limits_{-k}^{t} \varphi_1^*(\tau)\,d\tau & \text{при } t\in[-1, -k] \\ \int\limits_{k}^{t} \varphi_1^*(\tau)\,d\tau & \text{при } t\in[k, 1] \end{cases} \tag{1.10}$$

Здесь $\varphi_1^*(t) = a\,\varphi_1(at)$.

Граничные условия (1.6), как видно из (1.9) и (1.10), преобразуются к виду

$$\varphi_1(-1) = P, \quad \varphi_1(-k) = 0, \quad \varphi_1(k) = 0, \quad \varphi_1(1) = P \tag{1.11}$$

Теперь контактное напряжение будет определяться формулой

$$\tau_1(x) = \varphi_1'(x/a)/a.$$

2. Выясним тип особенностей для рассматриваемой задачи. Как и в работе [3], $\varphi_1'(t)$ представим в виде

$$\varphi_1'(t) = (1-t^2)^p(t^2-k^2)^q\,\chi(t)\left\{\begin{array}{r} t\in[(-1, -k)+(k, 1)] \\ -1<\operatorname{Re}(p, q)<0 \end{array}\right\} \tag{1.12}$$

где $\chi(t)$ — непрерывная функция на отрезках $[-1, -k]$, $[k, 1]$, удовлетворяющая условию Гельдера.

Отправляясь от этого представления, на основании результатов [8], которые относятся к поведению интеграла типа Коши вблизи концов линии интегрирования, легко показать, что

$$p = \gamma - \frac{1}{2}, \quad q = -\gamma - \frac{1}{2}, \quad \gamma = \frac{1}{\pi}\operatorname{arc\,tg}\frac{\mu_1}{\pi} = \frac{1}{\pi}\operatorname{arc\,tg}\frac{B^{(2)}}{A^{(2)}} \tag{1.13}$$

3. В этом параграфе указывается способ вывода необходимых для дальнейшего соотношений

$$\mu_1 w(t) P_m^{(p, q)}\left(\frac{2t^2-k^2-1}{1-k^2}\right) + \int\limits_{\gamma} w(\tau) P_m^{(p, q)}\left(\frac{2\tau^2-k^2-1}{1-k^2}\right)\frac{d\tau}{\tau - t} =$$

$$= \frac{\pi}{(1-k^2)\cos\pi\gamma}\, t P_{m-1}^{(q+1, p+1)}\left(\frac{2t^2-k^2-1}{1-k^2}\right) \quad (m = 0, 1, 2\cdots) \tag{1.14}$$

$$\mu_1 \frac{w(t)}{t} P_m^{(p, q)}\left(\frac{2t^2-k^2-1}{1-k^2}\right) + \int\limits_{\gamma} \frac{w(\tau)}{\tau} P_m^{(p, q)}\left(\frac{2\tau^2-k^2-1}{1-k^2}\right)\frac{d\tau}{\tau - t} =$$

$$= \frac{\pi}{(1-k^2)\cos\pi\gamma} P_{m-1}^{(q+1, p+1)}\left(\frac{2t^2-k^2-1}{1-k^2}\right) \quad (m = 0, 1, 2, \cdots) \tag{1.15}$$

где $t\in[(-1, -k)+(k, 1)]$, $p+q=-1$, $\operatorname{Re}(p, q) > -1$, $P_m^{(p, q)}[(2t^2 - k^2-1)/(1-k^2)]$ $(m = 0, 1, 2, \cdots)$ — многочлены Якоби, ортогональные на интервалах $\gamma = [-1, -k] + [k, 1]$ $(0 < k < 1)$ относительно веса $w(t)$ [4].

Выводим соотношения (1.14) и (1.15) при значениях $t\in(k, 1)$.

Учитывая последнее, после несложных преобразований (1.14) и (1.15) приводятся к виду

$$\mu_1 w(t)\, P_m^{(p,q)}\left(\frac{2t^2-k^2-1}{1-k^2}\right)+\int_0 w(\tau)\, P_m^{(p,q)}\left(\frac{2\tau^2-k^2-1}{1-k^2}\right)\frac{d\tau}{\tau-t}=$$

$$=\mu_1 w_1(t)\, P_m^{(p,q)}\left(\frac{2t^2-k^2-1}{1-k^2}\right)+2t\int_k^1 w_1(\tau)\, P_m^{(p,q)}\left(\frac{2\tau^2-k^2-1}{1-k^2}\right)\frac{d\tau}{\tau^2-t^2}\tag{1.16}$$

$$\mu_1\frac{w(t)}{t}\, P_m^{(p,q)}\left(\frac{2t^2-k^2-1}{1-k^2}\right)+\int_0 \frac{w(\tau)}{\tau}\, P_m^{(p,q)}\left(\frac{2\tau^2-k^2-1}{1-k^2}\right)\frac{d\tau}{\tau-t}=$$

$$=\mu_1\frac{w_1(t)}{t}\, P_m^{(p,q)}\left(\frac{2t^2-k^2-1}{1-k^2}\right)+2\int_k^1 w_1(\tau)\, P_m^{(p,q)}\left(\frac{2\tau^2-k^2-1}{1-k^2}\right)\frac{d\tau}{\tau^2-t^2}\tag{1.17}$$

где

$$w_1(t)=t\,(1-t^2)^p\,(t^2-k^2)^q$$

Заменяя в (1.16) и (1.17) $x\to(2t^2-k^2-1)/(1-k^2)$, $s\to(2\tau^2-k^2-1)/(1-k^2)$ и используя соотношение [5]

$$\mu_1(1-x)^p(1+x)^q P_m^{(p,q)}(x)+\int_{-1}^{1}\frac{(1-s)^p(1+s)^q P_m^{(p,q)}(s)\,ds}{s-x}=$$

$$=\frac{\pi}{2\cos\pi\gamma}\,P_{m-1}^{(q+1,\,p+1)}(x)$$

$$p+q=-1,\quad |x|<1,\quad \mathrm{Re}\,(p,\,q)>-1,\quad m=0,\,1,\,2,\cdots,$$

после элементарных выкладок получим (1.14) и (1.15).

4. Обратимся к решению уравнения (1.8). Сперва рассмотрим уравнение (1.8) при граничных условиях (1.11) для кососимметрически нагруженных упругих накладок.

Имея в виду формулу (2.1), положим

$$\varphi_1'(t)=w(t)\,\chi_1(t)\quad t\in[(-1,\,-k)+(k,\,1)]\tag{1.18}$$

где $\chi_1(-t)=\chi_1(t)$. Тогда интегро-дифференциальное уравнение (1.8) и граничные условия (1.11) принимают вид

$$\mu_1 w_1(t)\,\chi_1(t)+2t\int_k^1 w_1(\tau)\,\chi_1(\tau)\frac{d\tau}{\tau^2-t^2}=\lambda_1 a\,\varphi_1(t)\tag{1.19}$$

$$t\in(k,\,1),\quad \varphi_1(k)=0,\quad \varphi_1(1)=P,$$

притом функция $\varphi_1(t)$ дается формулой

$$\varphi_1(t) = \int_k^t w_1(\tau)\chi_1(\tau)\,d\tau$$

Таким образом, задача с двумя накладками, расположенными симметрично относительно начала координат приводится к задаче с одной накладкой.

Представим функцию $\chi_1(t)$ в виде

$$\chi_1(t) = \sum_{m=0}^{\infty} X_m^{(1)} P_m^{(p,\,q)}\left(\frac{2t^2-k^2-1}{1-k^2}\right) \tag{1.20}$$

Подставляя (1.20) в (1.19), затем учитывая (1.14) и (1.16), после несложных выкладок для определения неизвестных коэффициентов $X_m^{(1)}$ $(m = 1, 2, 3, \cdots)$ получим бесконечную систему линейных уравнений

$$X_{n+1}^{(1)} = \sum_{m=1}^{\infty} K_{mn}^{(1)} X_m^{(1)} + b_n^{(1)} \quad (n = 0, 1, 2, \cdots) \tag{1.21}$$

где

$$K_{mn}^{(1)} = -\frac{2a\lambda_1\cos\pi\gamma}{\pi(1-k^2)^2}\,\frac{[(n+1)!]^2}{\Gamma(n+2+p)\,\Gamma(n+2+q)}\times$$

$$\times\frac{1}{m}\int_k^1 (1-t^2)(t^2-k^2)\,P_n^{(q+1,\,p+1)}\left(\frac{2t^2-k^2-1}{1-k^2}\right)P_{m-1}^{(p+1,\,q+1)}\left(\frac{2t^2-k^2-1}{1-k^2}\right)dt$$

$$b_n^{(1)} = \frac{8a\lambda_1 P\cos^2\pi\gamma}{\pi^2(1-k^2)}\,\frac{[(n+1)!]^2}{\Gamma(n+2+p)\,\Gamma(n+2+q)}\times$$

$$\times\int_k^1 (1-t^2)^{q+1}(t^2-k^2)^{p+1}\,P_n^{(q+1,\,p+1)}\left(\frac{2t^2-k^2-1}{1-k^2}\right)\times$$

$$\times\left|\int_k^t \tau(1-\tau^2)^p(\tau^2-k^2)^q d\tau\right| dt \tag{1.22}$$

Теперь рассмотрим сингулярное интегро-дифференциальное уравнение (1.8) при граничных условиях (1.11) для симметрически нагруженных упругих накладок.

Учитывая (1.12), положим

$$\varphi_1'(t) = w(t)\chi_2(t) \qquad t\in[(-1,\,-k)+(k,\,1)]$$

где $\chi_2(-t) = -\chi_2(t)$. Уравнение (1.8) и граничные условия (1.11) преобразуются к виду

$$\mu_1 w_1(t)\chi_2(t) + 2\int_k^1 \tau w_1(\tau)\chi_2(\tau)\frac{d\tau}{\tau^2-t^2} = \lambda_1 a\,\varphi_1(t)$$

$$t \in (k,\ 1), \quad \varphi_1(k) = 0, \quad \varphi_1(1) = P \tag{1.23}$$

а функция $\varphi_1(t)$ определяется формулой

$$\varphi_1(t) = \int_k^t w_1(\tau)\,\chi_2(\tau)\,d\tau$$

Представим функцию $\chi_2(t)$ в виде [4]

$$\chi_2(t) = \frac{1}{t}\sum_{m=0}^{\infty} X_m^{(2)} \left[P_{m+1}^{(p,\,q)}\left(\frac{2t^2-k^2-1}{1-k^2}\right) - A_m P_m^{(p,\,q)}\left(\frac{2t^2-k^2-1}{1-k^2}\right)\right] \tag{1.24}$$

где

$$A_m = P_{m+1}^{(p,\,q)}\left(\frac{k^2+1}{k^2-1}\right)\Big/ P_m^{(p,\,q)}\left(\frac{k^2+1}{k^2-1}\right)$$

Подставляя (1.24) в (1.23) и принимая во внимание (1.15) и (1.17), для определения неизвестных коэффициентов $X_m^{(2)}$ $(m = 1,\ 2,\ 3, \cdots)$ будем иметь следующую бесконечную систему линейных уравнений:

$$X_{n+1}^{(2)} = \sum_{m=0}^{\infty} K'_{m,\,n+1} X_m^{(2)} \quad (n = 0,\ 1,\ 2, \cdots) \tag{1.25}$$

где

$$K'_{m,\,n+1} = \begin{cases} K_{m,\,n+1} & \text{при } m \neq n+1 \\ \dfrac{1}{A_{n+1}} + K_{m,\,n+1} & \text{при } m = n+1 \end{cases}$$

$$K_{m,\,n+1} = -\frac{4a\,\gamma_1 \cos\pi\gamma}{\pi(1-k^2)}\,\frac{[(n+1)!]^2}{A_{n+1}\Gamma(n+2+p)\,\Gamma(n+2+q)} \times$$

$$\times \int_k^1 t(1-t^2)^{q+1}(t^2-k^2)^{p+1} P_n^{(q+1,\,p+1)}\left(\frac{2t^2-k^2-1}{1-k^2}\right)\int_k^t (1-\tau^2)^p(\tau^2-k^2)^q \times$$

$$\times \left[P_{m+1}^{(p,\,q)}\left(\frac{2\tau^2-k^2-1}{1-k^2}\right) - A_m P_m^{(p,\,q)}\left(\frac{2\tau^2-k^2-1}{1-k^2}\right)\right] d\tau\, dt \tag{1.26}$$

Из (1.23) и (1.24) имеем

$$X_0 = \sum_{m=0}^{\infty} K_m X_m^{(2)} - P \tag{1.27}$$

где

$$K_m = \begin{cases} 1 + \displaystyle\int_k^1 (1-t^2)^p(t^2-k^2)^q \left[\left(P_1^{(p,\,q)}\left(\frac{2t^2-k^2-1}{1-k^2}\right) - A_0\right]dt & \text{при } m = 0 \\ \displaystyle\int_k^1 (1-t^2)^p(t^2-k^2)^q \left[P_{m+1}^{(p,\,q)}\left(\frac{2t^2-k^2-1}{1-k^2}\right) - \right. & \\ \left. - A_m P_m^{(p,\,q)}\left(\frac{2t^2-k^2-1}{1-k^2}\right)\right] dt & \text{при } m \geqslant 1 \end{cases} \tag{1.28}$$

Объединяя (1.25) и (1.27), получим

$$X_n^{(2)} = \sum_{m=0}^{\infty} K_{mn}^{(2)} X_m^{(2)} + b_n^{(2)} \quad (n = 0,\ 1,\ 2, \cdots) \tag{1.29}$$

Здесь

$$K_{mn}^{(2)} = \begin{cases} K_m & \text{при } n = 0 \\ K_{mn} & \text{при } n \geqslant 1, \end{cases} \qquad b_n^{(2)} = \begin{cases} -P & \text{при } n = 0 \\ 0 & \text{при } n \geqslant 1 \end{cases}$$

5. Исследуем бесконечные системы линейных уравнений (1.21) и (1.25). Для этого используем асимптотическое представление Дарбу для многочленов Якоби [9]

$$P_n^{(p,\,q)}(\cos\theta) = n^{-1/2} K(\theta) \cos(N\theta + \delta) + O(n^{-3/2})$$

$$K(\theta) = \pi^{-1/2} \left(\sin\frac{1}{2}\theta \right)^{-p-\frac{1}{2}} \left(\cos\frac{1}{2}\theta \right)^{-q-\frac{1}{2}} \tag{1.30}$$

$$N = n + \frac{1}{2}(p + q + 1), \quad \delta = -\frac{\pi}{2}\left(p + \frac{1}{2} \right), \quad 0 < \theta < \pi, \quad n \to \infty$$

Из (1.22), (1.26), (1.28) и (1.30) видно, что

$$\sum_{m=1}^{\infty} |K_{mn}^{(1)}| = O(n^{-3/2}), \qquad \sum_{m=0}^{\infty} |K_{mn}^{(2)}| = O(n^{-3/2}),$$

$$b_n^{(1)} = O(n^{-3/2}) \quad \text{при } n \to \infty,$$

а общие члены этих рядов при $m \to \infty$ стремятся к нулю, как $m^{-5/2}$.

Эти оценки утверждают, что бесконечные системы (1.21) и (1.25) квазивполне регулярны [10] при любом λ_1 $(0 \leqslant \lambda_1 < \infty)$, а свободный член бесконечной системы (1.21) остается ограниченным и при $n \to \infty$ стремится к нулю.

Таким образом, неизвестные коэффициенты $X_{m+1}^{(1)}$ и $X_m^{(2)}$ $(m = 0,\ 1,\ 2, \cdots)$ можно определить посредством урезания бесконечных систем с необходимой точностью. По формуле $\tau_1(x) = \varphi_1'(t)/a$ $x \in [(-a,\ -b) + (b,\ a)]$ $t \in [(-1,\ -k) + (k,\ 1)]$ можно определить контактное напряжение с любой точностью.

Здесь не приводятся численные результаты, которые проводятся для кососимметрического нагружения.

§ 2. Периодическая контактная задача для анизотропной полуплоскости, когда в одном периоде имеются две накладки

1. Предположим, что анизотропная полуплоскость усилена на конечных отрезках $[-a + 2nl,\ -b + 2nl]$ и $[b + 2nl,\ a + 2nl]$ $(l > a,$ $n = 0,\ \pm 1, \cdots)$ периодически повторяющимися с периодом $2l$ упругими креплениями в виде приваренных к ней упругих накладок, имеющих постоянную достаточно малую толщину h. Определим закон распределения контактных напряжений под упругими накладками, когда на од-

ном из концов накладок действует сосредоточенная сила P, направленная вдоль их осей в одну сторону (кососимметрическое нагружение накладок).

Из постановки задачи вытекает, что можно ограничиться рассмотрением двух накладок, так например, тех, для которых $n=0$.

Для деформации граничных точек отрезков $[-a, -b]$ и $[b, a]$ упругой анизотропной полуплоскости можно получить [7, 11]

$$\varepsilon_x^{(2)} = \frac{du^{(2)}(x)}{dx} = \frac{A^{(2)}}{2l}\left(\int\limits_{-a}^{-b} + \int\limits_{b}^{a}\right)\tau_2^{(2)}(s)\operatorname{ctg}\frac{\pi(s-x)}{2l}\,ds + B^{(2)}\tau_2^{(2)}(x) \quad (2.1)$$

Из (1.1), (1.3) и (2.1) для определения контактных напряжений получим следующее сингулярное интегро-дифференциальное уравнение:

$$\frac{2lB^{(2)}}{A^{(2)}}\psi_2'(x) + \left(\int\limits_{-a}^{-b} + \int\limits_{b}^{a}\right)\psi_2'(s)\operatorname{ctg}\frac{\pi(s-x)}{2l}\,ds = \lambda_2\psi_2(x) \qquad (2.2)$$

где $\lambda_2 = 2l/hE_1A^{(2)}$, $\psi_2'(x) = \tau_2(x) = \tau_2^{(1)}(x) = \tau_2^{(2)}(x)$, функция $\psi_2(x)$ определяется соответственно формулами, аналогичными (1.5), и удовлетворяет граничным условиям (1.6).

Положив $\pi x/l = \xi$, $\pi s/l = \eta$, $\pi a/l = \alpha$, $\pi b/l = \beta$, $\psi_2(l\xi/\pi) = \varphi_2(\xi)$, представим уравнение (2.2) в виде

$$\mu_2\varphi_2'(\xi) + \int\limits_{\sigma_2}\varphi_2'(\eta)\operatorname{ctg}\frac{\eta-\xi}{2}\,d\eta = \lambda_2\varphi_2(\xi) \qquad (2.3)$$

где $\mu_2 = 2\pi B^{(2)}/A^{(2)}$, $\sigma_2 = [-\alpha, -\beta] + [\beta, \alpha]$, а $\varphi_2(\xi)$ определяется формулами

$$\varphi_2(\xi) = \begin{cases} \displaystyle\int\limits_{\xi}^{-\beta}\varphi_2'(\eta)\,d\eta & \text{при } \xi \in [-\alpha, -\beta] \\ \displaystyle\int\limits_{\beta}^{\xi}\varphi_2'(\eta)\,d\eta & \text{при } \xi \in [\beta, \alpha] \end{cases}$$

и удовлетворяет граничным условиям

$$\varphi_2(-\alpha) = P, \quad \varphi_2(-\beta) = 0, \quad \varphi_2(\beta) = 0, \quad \varphi_2(\alpha) = P$$

Теперь контактное напряжение будет определяться формулой

$$\tau_2(x) = \frac{\pi}{l}\varphi_2'(\xi) \quad \left(\xi = \frac{\pi x}{l}\right)$$

2. Определим вид и порядок особенностей для этой задачи. Как в работе [6], можно показать, что $\varphi_2'(\xi)$ имеет вид

$$\varphi_2'(\xi) = \left(\sin\frac{\alpha-\xi}{2}\sin\frac{\alpha+\xi}{2}\right)^p\left(\sin\frac{\beta-\xi}{2}\sin\frac{\beta+\xi}{2}\right)^q\Phi(\xi) \qquad (2.4)$$

$$\xi \in [(-\alpha, -\beta) + (\beta, \alpha)]$$

где $\Phi(\xi)$ — непрерывная функция на отрезках $[-\alpha, -\beta]$, $[\beta, \alpha]$ вещественной оси, удовлетворяющая условию Гёльдера.

2. Перейдем к решению уравнений (2.3). Представим неизвестную функцию $\Phi(\xi)$ в виде

$$\Phi(\xi) = \left|\operatorname{tg}\frac{\xi}{2}\right| \sum_{m=0}^{\infty} Y_m P_m^{(p,q)}(\xi) \qquad (2.5)$$

Здесь

$$k = \operatorname{tg}\frac{\beta}{2} \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2},$$

$$P_n^{(p,q)}(\xi) = P_n^{(p,q)}\left\{\left[2\left(\operatorname{tg}\frac{\xi}{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\right)^2 - k^2 - 1\right](1-k^2)\right\} \quad (n=0, 1, 2, \cdots)$$

— многочлены Якоби, ортогональные на интервалах σ_2 относительно веса

$$\rho(\xi) = \left|\operatorname{tg}\frac{\xi}{2}\right| \left(\sin\frac{\alpha-\xi}{2}\sin\frac{\alpha+\xi}{2}\right)^p \left(\sin\frac{\beta-\xi}{2}\sin\frac{\beta+\xi}{2}\right)^q$$

Предположим, что $\xi \in (\beta, \alpha)$. Подставляя (2.4) в (2.3), для определения неизвестных коэффициентов Y_m $(m = 1, 2, 3, \cdots)$ получим следующую бесконечную систему линейных уравнений:

$$Y_n = \sum_{m=1}^{\infty} R_{mn} Y_m + M_n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots) \qquad (2.6)$$

Здесь

$$R_{mn} = -\frac{\lambda_2 \cos\pi\gamma}{\pi(1-k^2)^2\left(\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2\left(\cos\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)^{4q+4}} \times$$

$$\times \frac{(n!)^2}{\Gamma(n+1+p)\,\Gamma(n+1+q)} \times$$

$$\times \frac{1}{m}\int_{\beta}^{\alpha} \sec^4\frac{\xi}{2}\sin\frac{\alpha-\xi}{2}\sin\frac{\alpha+\xi}{2}\sin\frac{\beta-\xi}{2}\sin\frac{\beta+\xi}{2}\,P_{m-1}^{(p+1,\,q+1)}(\xi) \times$$

$$\times P_{n-1}^{(q+1,\,p+1)}(\xi)\,d\xi$$

$$M_n = -\frac{\lambda_2 P\cos^2\pi\gamma}{\pi^2(1-k^2)}\left(\cos\frac{\beta}{2}\sin\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)^{2p}$$

$$\times \frac{(n!)^2}{\Gamma(n+1+p)\,\Gamma(n+1+q)} \times$$

$$\times \int_{\beta}^{\alpha} \sec^2\frac{\xi}{2}\left(\sin\frac{\alpha-\xi}{2}\sin\frac{\alpha+\xi}{2}\right)^{q+1}\left(\sin\frac{\beta-\xi}{2}\sin\frac{\beta+\xi}{2}\right)^{p+1} \times$$

$$\times P_{n-1}^{(q+1,\, p+1)}(\xi) \int\limits_{\beta}^{\xi} \operatorname{tg}\frac{\eta}{2}\left(\sin\frac{\alpha-\eta}{2}\sin\frac{\alpha+\eta}{2}\right)^{p}\left(\sin\frac{\beta-\eta}{2}\sin\frac{\beta+\eta}{2}\right)^{q} d\eta\, d\xi$$

При выводе бесконечной системы (2.6) было использовано соотношение

$$\mu_2 \rho(\xi)\, P_m^{(p,\, q)}(\xi) + \int\limits_{\beta}^{\alpha} \rho(\eta)\, P_m^{(p,\, q)}(\eta) \operatorname{ctg}\frac{\eta-\xi}{2}\, d\eta =$$

$$= \frac{2\pi}{(1-k^2)\cos\pi\gamma}\left(\sin\frac{\alpha}{2}\right)^{2p}\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}\right)^{2q}\sec^2\frac{\xi}{2}\operatorname{tg}\frac{\xi}{2}\, P_{m-1}^{(q+1,\, p+1)}(\xi)$$

$$\beta < \xi < \alpha, \quad m = 0, 1, 2, \cdots,$$

которое получается из (1.14) заменой переменных

$$t = \operatorname{tg}\frac{\xi}{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}, \qquad \tau = \operatorname{tg}\frac{\eta}{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$$

Как в первом параграфе, таким же путем можно показать, что бесконечная система (2.6) квазивполне регулярна, а ее свободные члены стремятся к нулю при возрастании индекса.

Все полученные бесконечные системы на самом деле вполне регулярны при определенных значениях параметра $\lambda_i\,(0 \leqslant \lambda_i < \infty)$ $(i = 1, 2)$, доказательство этого основывается на установлении некоторых неравенств для многочленов Якоби.

Ереванский государственный
университет

Поступила 27 IV 1972

Վ. Ս. ՍԱՐԳՍՅԱՆ, Լ. Հ. ՀՈՎՍԵՓՅԱՆ

ԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ՎԵՐԱԴԻՐՆԵՐՈՎ ԱՆԻԶՈՏՐՈՊ ԿԻՍԱՀԱՐԹՈՒԹՅԱՆ ԵՐԿՈՒ ԿՈՆՏԱԿՏԱՅԻՆ ԽՆԴԻՐՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Հոդվածում դիտարկվում է կոորդինատների սկզբնակետի նկատմամբ սիմետրիկ դասավորված երկու առաձգական վերադիրներով ուժեղացված անիզոտրոպ կիսահարթության կոնտակտային խնդիրը։ Կոնտակտային լարումների որոշման համար ստացվում է Կոշու կորիզով երկրորդ սեռի սինգուլյար ինտեգրո-դիֆերենցիալ հավասարում։ Դիտարկվում է վերադիրների սիմետրիկ և անտիսիմետրիկ բեռնավորության դեպքերը։

Հոդվածում ուսումնասիրվում է նաև երկու առաձգական վերադիրներով ուժեղացված անիզոտրոպ կիսահարթության պարբերական կոնտակտային խնդիրը, որի լուծման համար ստացվում է Հիլբերտի կորիզով երկրորդ սեռի

ինտեգրո-դիֆերենցիալ հավասարում։ Դիտարկվում է վերադիրների անտիսիմետրիկ բեռնավորության դեպքը։

Կոնտակտային լարումները ներկայացված են բանաձևերով, որոնք բացահայտ տեսքով պարունակում են վերադիրների ծայրակետերում կոնտակտային լարումների եզակիությունները։

Ստացված հավասարումները հետազոտվում են $s = [-1, -k] + [k, 1]$ $(0 \leqslant k < 1)$ միջակայքերում $w(t) = |t|(1-t^2)^p(t^2-k^2)^q$ կշռով օրթոգոնալ բազմանդամների սիստեմի օգնությամբ և նրանց լուծումները բերվում են քվազիլիովին ռեգուլյար գծային հավասարումների անվերջ սիստեմների։

TWO CONTACT PROBLEMS FOR AN ANISOTROPIC SEMI-PLANE WITH ELASTIC STIFFENERS

V. S. SARKISSIAN, L. O. OVSEPIAN

Summary

In the work the contact problem for an anisotropic semi-plane with two elastic stiffeners symmetrically arranged with reference to the origin is considered. A singular integral-differential equation with a Cauchy core of the second order is obtained to determine contact stresses.

The solution of the periodic contact problem for an elastic anisotropic semi-plane reinforced with two elastic stiffeners is also presented. The solution of this problem is reduced to that of the singular integral-differential equation with a Gilbert core on the second order.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Арутюнян Н. Х.* Контактная задача для полуплоскости с упругим креплением. ПММ, т. 32, вып. 4, 1968.
2. *Арутюнян Н. Х., Мхитарян С. М.* Периодическая контактная задача для полуплоскости с упругими накладками. ПММ, т. 33, вып. 5, 1969.
3. *Arutunyan N. Kh.* and *Mkhitaryan S. M.* Some contact problems for a semi-plane with elastic stiffeners. Trends in elasticity and thermoelasticity; Witold Nowacki Anniversary Volume. Wolters—Noordhoff Publishing, 1971, p. 3—20.
4. *Барков Г. И.* Изв. ВУЗов, математика, Казань, № 4 (17), 1960.
5. *Саркисян В. С., Овсепян Л. О.* Докл. АН АрмССР, т. LII, № 5, 1971.
6. *Саркисян В. С., Овсепян Л. О.* Докл. АН АрмССР, т. LIII, № 2, 1971.
7. *Галин Л. А.* Контактные задачи теории упругости. Гостехиздат, М., 1953.
8. *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. Изд. „Наука", М., 1968.
9. *Сегё Г.* Ортогональные многочлены. Физматгиз, М., 1962.
10. *Канторович Л. В., Крылов В. И.* Приближенные методы высшего анализа. Физматгиз, М.—Л., 1962.
11. *Штаерман И. Я.* Контактные задачи теории упругости. Гостехиздат, М.—Л., 1949.