ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXV, № 6, 1972 Механика

А. Г. ПЕТРОСЯН

УРАВНЕНИЯ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ АСИММЕТРИЧЕСКОЙ МАГНИТНОЙ ГИДРОДИНАМИКИ

Асимметрическая магнитная гидродинамика представляет собой обобщение обычной магнитной гидродинамики на случай, когда тензор напряжений становится асимметрическим.

Как известно [1—2], несимметричность диады напряжений обусловлена моментными напряжениями $\vec{\mu}$ и массовыми моментами $\vec{c}$

$$\vec{\sigma}^a = \frac{1}{2}\vec{I}\times(\nabla\cdot\vec{\mu}+\rho\vec{c}),$$

где $\vec{\sigma}^a$—антисимметричная часть $\vec{\sigma}$,

$\vec{I}$—единичная пространственная диада,

ρ—плотность среды.

Отсюда и происходит название теории—теория асимметрической магнитной гидродинамики. В классической магнитной гидродинамике $\vec{\mu}=0$, $\vec{c}=0$, поэтому диада напряжений $\vec{\sigma}$ симметрична.

Таким образом, асимметрическая магнитная гидродинамика отличается от обычной—классической магнитной гидродинамики уточнением напряженного состояния, которое характеризуется асимметрической диадой напряжения $\vec{\sigma}$ и моментных напряжений $\vec{\mu}$.

Общие вопросы теории жидкости с моментными напряжениями (асимметрической гидромеханики) рассмотрены в работах [3—4].

В работе изучаются основные уравнения асимметрической магнитной гидродинамики: строятся уравнения движения несжимаемой электропроводящей жидкости с большой или бесконечной электропроводностью. Изучаются уравнения плоского пограничного слоя магнитной гидродинамики вязкой несжимаемой жидкости с моментными напряжениями, несимметричным тензором напряжений и внутренней инерцией частиц. Рассмотрены различные типы уравнений плоского пограничного слоя в случае жидкости с большой или бесконечной электропроводностью, а также в случае жидкости с очень малой электрической проводимостью.

Приводится решение задачи обтекания плоской полубесконечной пластинки вязкой несжимаемой жидкостью с моментными напряжениями.

§1. Пограничный слой в случае жидкости с большой или бесконечной электропроводностью

Система уравнений асимметрической магнитной гидродинамики, описывающих изотермическое движение электропроводящей среды в присутствии магнитного поля, состоит из уравнений движения вязкой несжимаемой жидкости с моментными напряжениями [5], содержащих члены электромагнитного происхождения, уравнений Максвелла и закона Ома для движущихся сред [6—8].

Общая система уравнений асимметрической магнитной гидродинамики имеет вид

$$\nabla\cdot\vec{v}=0$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt}-\frac{\mu_e}{\rho}(\vec{H}\cdot\nabla)\vec{H}=-\frac{1}{\rho}\nabla\left(p+\frac{\mu_e H^2}{2}\right)+2\nu\nabla\cdot(\nabla\vec{v})^d+$$

$$+\nu_r\nabla\times[2\vec{\omega}-\nabla\times\vec{v}]$$

$$I\frac{d\vec{\omega}}{dt}=2\nu_r(\nabla\times\vec{v}-2\vec{\omega})+c_0\nabla(\nabla\cdot\vec{\omega})+2c_d\nabla\cdot(\nabla\vec{\omega})^d+$$

$$+2c_a\nabla\cdot(\nabla\vec{\omega})^a \tag{1.1*}$$

$$\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}+(\vec{v}\cdot\nabla)\vec{H}-(\vec{H}\cdot\nabla)\vec{v}=\nu_H\nabla^2\vec{H}$$

$$\nabla\cdot\vec{H}=0$$

Здесь ρ—массовая плотность, p—давление, I—скалярная константа с размерностью момента инерции единицы массы, $\vec{v}$—вектор скорости точки, $\vec{\omega}$—вектор, характеризующий среднюю угловую скорость вращения частиц, из которых состоит точка континуума, ν—кинематическая ньютоновская вязкость, ν_r—кинематическая вращательная вязкость, c_0, c_d и c_a—коэффициенты моментной вязкости, $\vec{H}$—вектор напряженности магнитного поля, $\mu_e=4\pi\cdot10^{-7}$ $кгм/к^2$—магнитная проницаемость для пустоты, ν_H—коэффициент магнитной вязкости (магнитной диффузии), $d(\cdots)/dt$—полная производная по времени, ∇—пространственный градиент, $(\nabla\vec{v})^d$ и $(\nabla\vec{\omega})^d$—симметричные части со-

---

* В магнитной гидродинамике равенство $\nabla\cdot\vec{H}=0$ выполняется в силу уравнения индукции, а также удовлетворения начальных условий. Тем не менее во многих задачах является удобным использование этого уравнения вместо одной из проекций уравнения индукции [7].

ответствующих диад, $(\nabla\vec{v})^a$ и $(\nabla\vec{\omega})^a$—антисимметричные диады. Заметим, что в этих уравнениях учтены моментные напряжения, несимметричность тензора напряжения и внутренняя инерция частиц.

Система уравнений (1.1) для двумерного (плоского) движения имеет следующий вид:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}=0$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_x}{\partial y}-\frac{\mu_e}{\rho}\left(H_x\frac{\partial H_x}{\partial x}+H_y\frac{\partial H_x}{\partial y}\right)=$$

$$=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x}\left(p+\frac{\mu_e H^2}{2}\right)+(\nu+\nu_r)\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}\right)+2\nu_r\frac{\partial\omega_z}{\partial y}$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_y}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_y}{\partial y}-\frac{\mu_e}{\rho}\left(H_x\frac{\partial H_y}{\partial x}+H_y\frac{\partial H_y}{\partial y}\right)=$$

$$=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial y}\left(p+\frac{\mu_e H^2}{2}\right)+(\nu+\nu_r)\left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2}\right)-2\nu_r\frac{\partial\omega_z}{\partial x} \tag{1.2}$$

$$\frac{\partial\omega_z}{\partial t}+v_x\frac{\partial\omega_z}{\partial x}+v_y\frac{\partial\omega_z}{\partial y}=\frac{2\nu_r}{I}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x}-\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)-\frac{4\nu_r}{I}\omega_z+$$

$$+\gamma\left(\frac{\partial^2\omega_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\omega_z}{\partial y^2}\right)$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial t}+v_x\frac{\partial H_x}{\partial x}+v_y\frac{\partial H_x}{\partial y}-\left(H_x\frac{\partial v_x}{\partial x}+H_y\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)=$$

$$=\nu_H\left(\frac{\partial^2 H_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 H_x}{\partial y^2}\right),\qquad \frac{\partial H_x}{\partial x}+\frac{\partial H_y}{\partial y}=0$$

Обозначим через X масштаб продольных координат x, через Y—масштаб поперечных координат y, через V_x и V_y—соответственно масштабы продольных и поперечных компонент скорости, через h_x и h_y—соответственно масштабы продольных и поперечных компонент вектора магнитного поля и, наконец, через Ω_z—масштаб, характеризующий среднюю угловую скорость вращения частиц.

Примем в качестве масштабов скалярных величин времени и давления некоторые, пока неопределенные, постоянные величины T и P.

Отметим штрихом соответствующие безразмерные переменные, положив

$$t=Tt',\quad x=Xx',\quad y=Yy'$$
$$v_x=V_xv_x',\quad v_y=V_yv_y',\quad p=Pp' \tag{1.3}$$
$$\omega_z=\Omega_z\omega_z',\quad H_x=h_xH_x',\quad H_y=h_yH_y'$$

Если подставить эти величины в систему уравнений (1.2), то при установленном выборе масштабов уравнения для двумерного случая в безразмерной форме примут следующий вид:

$$\frac{X}{V_xT}\frac{\partial v'_x}{\partial t'} + v'_x\frac{\partial v'_x}{\partial x'} + \frac{XV_y}{YV_x}v'_y\frac{\partial v'_x}{\partial y'} - \frac{\mu_e h_x^2}{\rho V_x^2}\left(H'_x\frac{\partial H'_x}{\partial x'} + \frac{h_yX}{h_xY}H'_y\frac{\partial H'_x}{\partial y'}\right) = -\frac{1}{\rho}\frac{P}{V_x^2}\frac{\partial p'}{\partial x'} - \frac{\mu_e h_x^2}{2\rho V_x^2}\frac{\partial}{\partial x'}\left(H'^2_x + \frac{h_y^2}{h_x^2}H'^2_y\right) + (\nu+\nu_r)\frac{1}{V_xX}\frac{\partial v'_x}{\partial x'^2} + (\nu+\nu_r)\frac{X}{V_xY^2}\frac{\partial^2 v'_x}{\partial y'^2} + 2\nu_r\frac{\Omega_z X}{YV_x^2}\frac{\partial\omega'_z}{\partial y'}$$

$$\frac{X}{V_xT}\frac{\partial v'_y}{\partial t'} + v'_x\frac{\partial v'_y}{\partial x'} + \frac{XV_y}{YV_x}v'_y\frac{\partial v'_y}{\partial y'} - \frac{\mu_e h_x h_y}{\rho V_xV_y}\left(H'_x\frac{\partial H'_y}{\partial x'} + \frac{h_yX}{h_xY}H'_y\frac{\partial H'_y}{\partial y'}\right) = -\frac{1}{\rho}\frac{PX}{YV_xV_y}\frac{\partial p'}{\partial y'} - \frac{\mu_e h_x^2X}{2\rho YV_xV_y}\frac{\partial}{\partial y'}\left(H'^2_x + \frac{h_y^2}{h_x^2}H'^2_y\right) + (\nu+\nu_r)\frac{1}{XV_x}\frac{\partial^2 v'_y}{\partial x'^2} + (\nu+\nu_r)\frac{X}{Y^2V_x}\frac{\partial^2 v'_y}{\partial y'^2} - 2\nu_r\frac{\Omega_z}{V_xV_y}\frac{\partial\omega'_z}{\partial x'}$$

$$\frac{X}{V_xT}\frac{\partial\omega'_z}{\partial t'} + v'_x\frac{\partial\omega'_z}{\partial x'} + \frac{V_yX}{V_xY}v'_y\frac{\partial\omega'_z}{\partial y} = \frac{2\nu_r}{I}\left(\frac{V_y}{V_x\Omega_z}\frac{\partial v'_y}{\partial x'} - \frac{X}{Y\Omega_z}\frac{\partial v'_x}{\partial y'}\right) - \frac{4\nu_r}{I}\frac{X}{V_x}\omega'_z + \gamma\frac{1}{XV_x}\frac{\partial^2\omega'_z}{\partial x'^2} + \gamma\frac{X}{Y^2V_x}\frac{\partial^2\omega'_z}{\partial y'^2}$$

$$\frac{X}{V_xT}\frac{\partial H'_x}{\partial t'} + v'_x\frac{\partial H'_x}{\partial x'} + \frac{V_yX}{V_xY}v'_y\frac{\partial H'_x}{\partial y'} - \left(H'_x\frac{\partial v'_x}{\partial x'} + \frac{h_yX}{h_xY}H'_y\frac{\partial v'_x}{\partial y'}\right) = \nu_{н}\left(\frac{1}{V_xX}\frac{\partial^2 H'_x}{\partial x'^2} + \frac{X}{V_xY^2}\frac{\partial^2 H'_x}{\partial y'^2}\right)$$

$$\frac{\partial v'_x}{\partial x'} + \frac{XV_y}{YV_x}\frac{\partial v'_y}{\partial y'} = 0$$

$$\frac{\partial H'_x}{\partial x'} + \frac{h_yX}{h_xY}\frac{\partial H'_y}{\partial y'} = 0$$

Будем считать основными масштабами величины X, V_x, h_x и составим при их помощи рейнольдсово число потока, число магнитного давления и магнитное число Рейнольдса

$$R = \frac{XV_x}{\nu}, \quad R_{н} = \frac{\mu_e h_x^2}{\rho V_x^2}, \quad R_\sigma = \sigma\mu_e V_xX = \frac{XV_x}{\nu_{н}}{}^{*}$$

Выбрав таким образом основные, в общем случае условные мас-

---

* Здесь σ—электропроводимость среды.

штабы продольных длин и скоростей, выразим через них прежде всего масштабы времени и давления, положив

$$T=\frac{X}{V_x},\quad P=\rho V_x^2$$

Масштабы поперечных длин и скоростей Y и V_y, а также магнитного поля h_y выбираются из условий

$$\frac{XV_y}{YV_x}=1,\quad \frac{\nu X}{V_x Y^2}=1,\quad \frac{h_y X}{h_x Y}=1$$

откуда вытекает

$$Y=\frac{X}{\sqrt{R}},\quad V_y=\frac{V_x}{\sqrt{R}},\quad h_y=\frac{h_x}{\sqrt{R}}$$

Тогда получим

$$\frac{\partial v_x'}{\partial t'}+v_x'\frac{\partial v_x'}{\partial x'}+v_y'\frac{\partial v_x'}{\partial y'}-R_n\left(H_x'\frac{\partial H_x'}{\partial x'}+H_y'\frac{\partial H_x'}{\partial y'}\right)=$$

$$=-\frac{\partial p'}{\partial x'}-\frac{R_n}{2}\frac{\partial}{\partial x'}\left(H_x'^2+\frac{1}{R}H_y'^2\right)+\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R_r}\right)\frac{\partial^2 v_x'}{\partial x'^2}+$$

$$+\left(1+\frac{R}{R_r}\right)\frac{\partial^2 v_x'}{\partial y'^2}+\frac{2R}{R_r}\frac{\partial \omega_z'}{\partial y'}$$

$$\frac{1}{R}\left[\frac{\partial v_y'}{\partial t'}+v_x'\frac{\partial v_y'}{\partial x'}+v_y'\frac{\partial v_y'}{\partial y'}-R_n\left(H_x'\frac{\partial H_y'}{\partial x'}+H_y'\frac{\partial H_y'}{\partial y'}\right)\right]=$$

$$=-\frac{\partial p'}{\partial y'}-\frac{R_n}{2}\frac{\partial}{\partial y'}\left(H_x'^2+\frac{1}{R}H_y'^2\right)+\left(\frac{1}{R^2}+\frac{1}{RR_r}\right)\frac{\partial^2 v_y'}{\partial x'^2}+$$

$$+\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R_r}\right)\frac{\partial^2 v_y'}{\partial y'^2}-\frac{2}{R_r}\frac{\partial \omega_z'}{\partial x'}$$

$$\frac{\partial \omega_z'}{\partial t}+v_x'\frac{\partial \omega_z'}{\partial x'}+v_y'\frac{\partial \omega_z'}{\partial y'}=-\frac{4E}{R_r}\omega_z'+\frac{ER}{R_c}\left(\frac{1}{R}\frac{\partial^2\omega_z'}{\partial x'^2}+\frac{\partial^2\omega_z'}{\partial y'^2}\right)+$$

$$+\frac{2E}{R_r}\left(\frac{1}{R}\frac{\partial v_y'}{\partial x'}-\frac{\partial v_x'}{\partial y'}\right)$$

$$\frac{R_n}{R}\left[\frac{\partial H_x'}{\partial t'}+v_x'\frac{\partial H_x'}{\partial x'}+v_y'\frac{\partial H_x'}{\partial y'}-\left(H_x'\frac{\partial v_x'}{\partial x'}+H_y'\frac{\partial v_x'}{\partial y'}\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{R}\frac{\partial^2 H_x'}{\partial x'^2}+\frac{\partial^2 H_x'}{\partial y'^2}$$

$$\frac{\partial v_x'}{\partial x'}+\frac{\partial v_y'}{\partial y'}=0$$

$$\frac{\partial H_x'}{\partial x'}+\frac{\partial H_y'}{\partial y'}=0 \qquad (1.4)$$

Здесь

$$R=\frac{V_x X}{\nu}, \quad E=\frac{X^2}{I}, \quad R_r=\frac{V_x X}{\nu_r}$$

$$R_c=\frac{V_x X^3}{\gamma I}=\frac{V_x X^3}{c_a+c_d}, \quad \gamma=\frac{c_a+c_d}{I} \tag{1.5}$$

Для масштабов имеем

$$Y=X/\sqrt{R}, \quad V_y=V_x/\sqrt{R}$$

$$\Omega_z=\frac{V_x}{X\sqrt{R}}, \qquad h_y=h_x/\sqrt{R} \tag{1.6}$$

Полученная система уравнений представляет собой исходную систему (1.2) уравнений асимметрической магнитной гидродинамики, преобразованную к безразмерному виду. Основным параметром, явно содержащимся, является число Рейнольдса потока R.

При изучении течений при больших числах Рейнольдса приходится использовать теорию пограничного слоя. Устремим в полученных уравнениях R к бесконечности. В зависимости от соотношений между величинами R, R_r, R_c, E рассмотрим три возможных типа дифференциальных уравнений пограничного слоя магнитной гидродинамики с моментными напряжениями.

1. Если безразмерные величины R, R_r, E, R_c/R имеют одинаковые порядки, то в размерных переменных получим

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\mu_e}{\rho}\left(H_x\frac{\partial H_x}{\partial x}+H_y\frac{\partial H_y}{\partial y}\right)=$$

$$=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x}\left(p+\frac{\mu_e H_x^2}{2}\right)+(\nu+\nu_r)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+2\nu_r\frac{\partial \omega}{\partial y}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(p+\frac{\mu_e H_x^2}{2}\right)=0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t}+u\frac{\partial \omega}{\partial x}+v\frac{\partial \omega}{\partial y}=-\frac{4\nu_r}{I}\omega-\frac{2\nu_r}{I}\frac{\partial u}{\partial y}+\gamma\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \tag{1.7}$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial t}+u\frac{\partial H_x}{\partial x}+v\frac{\partial H_x}{\partial y}-\left(H_x\frac{\partial u}{\partial x}+H_y\frac{\partial u}{\partial y}\right)=\nu_a\frac{\partial^2 H_x}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial x}+\frac{\partial H_y}{\partial y}=0$$

где

$$u=v_x, \quad v=v_y, \quad \omega=\omega_z \tag{1.8}$$

В этом случае дифференциальные уравнения пограничного слоя содержат члены, характеризующие несимметричность диады напряжений, моментные напряжения и инерцию частиц жидкости при вращении.

2. В случае, когда R, R_r, E имеют одинаковые порядки, а $ER \ll R_c$, имеем систему уравнений (1.7), в которой четвертое уравнение заменяется следующим равенством:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t}+u\frac{\partial \omega}{\partial x}+v\frac{\partial \omega}{\partial y}=-\frac{4\nu_r}{I}\omega-\frac{2\nu_r}{I}\frac{\partial u}{\partial y} \tag{1.9}$$

Этот случай соответствует отсутствию моментных напряжений в жидкости.

3. В том случае, когда R, R_r, R_c/E имеют одинаковые порядки при условии $E \ll R$, в системе (1.7) четвертое уравнение заменяется следующим уравнением:

$$\frac{\partial\omega}{\partial t} + u\frac{\partial\omega}{\partial x} + v\frac{\partial\omega}{\partial y} = \gamma\frac{\partial^2\omega}{\partial y^2} \tag{1.10}$$

Уравнение (1.10) соответствует случаю, когда моментное напряжение играет главную роль при вращении частиц.

Из второго уравнения системы (1.7) имеем

$$p + \frac{\mu_e H_x^2}{2} = F(x) \tag{1.11}$$

При исследовании пограничного слоя произвольная функция $F(x)$ считается известной. На внешней границе пограничного слоя продольная скорость u переходит в скорость $U(x, t)$ внешнего течения. Так как здесь уже не имеются сильные градиенты скорости и составляющая магнитного поля H_x в направлении, перпендикулярном к стенке, то есть

$$\frac{\partial H_x}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \tag{1.12}$$

то из первого уравнения системы (1.7), пренебрегая силами вязкости, получим

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U\frac{\partial U}{\partial x} - \frac{\mu_e}{\rho}H_{x\infty}\frac{\partial H_{x\infty}}{\partial x} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x}\left(p + \frac{\mu_e H_x^2}{2}\right) \tag{1.13}$$

где индекс ∞ относится к величинам внешней границы пограничного слоя и является известным из решения для случая невязкой жидкости

§ 2. Пограничный слой в случае жидкости с очень малой электрической проводимостью

Во многих инженерных задачах магнитной гидродинамики магнитные числа Рейнольдса

$$R_z = \sigma\mu_e V_x X = \frac{V_x X}{\nu_H}$$

обычно имеют малые значения. В этих задачах индуцированным магнитным полем, обусловленным течением жидкости, можно пренебречь по сравнению с приложенным внешним магнитным полем H_∞.

Рассмотрим опять плоское течение.

В случае очень малых значений электропроводности σ для составляющих пондермоторной силы по направлению x и y в первом приближении соответственно имеем [8]

$$F_{ex} = -\sigma\mu_e^2 H_{y\infty}^2, \quad F_{ey} = 0 \tag{2.1}$$

Выражения (2.1) можно использовать в уравнениях движения при изучении течения в пограничном слое. В первом приближении здесь можно рассматривать только первые три уравнения системы (1.7). Тогда три соответствующих уравнения для плоского пограничного слоя в случае, когда моментное напряжение играет главную роль при вращении частиц, будут иметь вид

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + (\nu + \nu_r)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} +$$

$$+2\nu_r\frac{\partial \omega}{\partial y} - \frac{\sigma}{\rho}\mu_e^2 H_{y\infty}^2 u$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + u\frac{\partial \omega}{\partial x} + v\frac{\partial \omega}{\partial y} = \gamma\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \tag{2.2}$$

§ 3. Магнитогидродинамический пограничный слой на плоской полубесконечной пластинке

Рассмотрим задачу обтекания плоской полубесконечной пластинки вязкой несжимаемой жидкостью с моментными напряжениями. Допустим, пластинка расположена в равномерном стационарном потоке со скоростью U_∞ при наличии внешнего приложенного магнитного поля с постоянной напряженностью $H_{y\infty}$. Рассмотрим течение в пограничном слое жидкости с очень малой электрической проводимостью.

В рассматриваемом случае уравнения пограничного слоя сводятся к следующим:

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = (\nu + \nu_r)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2\nu_r\frac{\partial \omega}{\partial y} - \frac{\sigma}{\rho}\mu_e^2 H_{y\infty}^2 u \tag{3.1}$$

$$u\frac{\partial \omega}{\partial x} + v\frac{\partial \omega}{\partial y} = \gamma\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

При решении этой системы уравнений необходимо учесть граничные условия данной задачи. Так как вязкая жидкость обтекает неподвижное тело, то на его поверхности [5]

$$u = v = 0, \quad 2\omega = -\frac{\partial u}{\partial y} \quad \text{при} \quad y = 0 \tag{3.2}$$

На бесконечности граничные условия будут

$$u \to U_\infty, \quad \omega \to 0 \quad \text{при} \quad y \to \infty \tag{3.3}$$

Введем функцию тока $\psi(x, y)$ так, что

$$u = \frac{\partial\psi}{\partial y}, \qquad v = -\frac{\partial\psi}{\partial x} \tag{3.4}$$

Тогда уравнение неразрывности будет удовлетворяться автоматически.

Система уравнений (3.1), при этом, сводится к следующей:

$$\begin{gathered}\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y} - \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = (\nu+\nu_r)\frac{\partial^3\psi}{\partial y^3} + 2\nu_r\frac{\partial\omega}{\partial y} - m_1\frac{\partial\psi}{\partial y}\\ \frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial\omega}{\partial x} - \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\omega}{\partial y} = \gamma\frac{\partial^2\omega}{\partial y^2}\end{gathered} \tag{3.5*}$$

а граничные условия

$$\begin{gathered}\psi = 0, \quad \frac{\partial\psi}{\partial y} = 0, \quad 2\omega = -\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} \quad \text{при} \quad y = 0\\ \frac{\partial\psi}{\partial y} \to U_\infty, \quad \omega \to 0 \quad \text{при} \quad y \to \infty\end{gathered} \tag{3.6}$$

Запишем функцию тока $\psi(x, y)$ и среднюю угловую скорость вращения частиц $\omega(x, y)$ в следующем виде:

$$\begin{gathered}\psi = \sqrt{(\nu+\nu_r)U_\infty x}\,[f_0(\eta) + mxf_1(\eta) + (mx)^2 f_2(\eta) + \cdots]\\ \omega = \sqrt{\frac{\nu+\nu_r}{\nu_r^2 x}U_\infty^3}\,[\varphi_0(\eta) + mx\varphi_1(\eta) + (mx)^2\varphi_2(\eta) + \cdots]\end{gathered} \tag{3.7}$$

где

$$\eta = y\sqrt{\frac{U_\infty}{(\nu+\nu_r)x}}, \qquad m = \frac{m_1}{U_\infty} \tag{3.8}$$

Подставляя выражения (3.7) и (3.8) в систему уравнений (3.5), получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений для нахождения функций $f_i(\eta)$ и $\omega_i(\eta)$ (штрих означает дифференцирование по η):

$$\begin{gathered}2f_0''' + f_0 f_0'' = -4\varphi_0'\\ \frac{2\gamma}{\nu+\nu_r}\varphi_0'' + (f_0\varphi_0)' = 0\\ 2f_1''' + f_0 f_1'' - 2f_0' f_1' + 3f_0'' f_1 = 2f_0' - 4\varphi_1'\\ \frac{2\gamma}{\nu+\nu_r}\varphi_1'' + f_0\varphi_1' - f_0'\varphi_1 + 3f_1\varphi_0' + f_1'\varphi_0 = 0\\ 2f_2''' + f_0 f_2'' - 4f_0' f_2' + 5f_0'' f_2 = 2f_1'^2 - 2f_1' + 3f_1 f_1'' - 4\varphi_2'\end{gathered} \tag{3.9}$$

---

* $m_1 = \frac{\sigma}{\rho}\mu_r^2 H_{y\infty}^2$.

$$\frac{2\gamma}{\nu+\nu_r}\varphi_2'' + f_0\varphi_2' - 3f_0'\varphi_2 + \varphi_0 f_2' + 5\varphi_0' f_2 = f_1\varphi_1' - 3f_1'\varphi_1$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

Граничные условия будут такими:

$$f_i = f_i' = 0, \quad f_i'' + 2\left(1+\frac{\nu}{\nu_r}\right)\varphi_i = 0 \quad \text{при} \quad \eta = 0$$

$$f_0' \to 1, \quad f_1' = f_2' = \cdots = f_i' \to 0, \quad \varphi_i \to 0, \quad \text{при} \quad \eta \to \infty \qquad (3.10)$$

Первые два уравнения представляют собой уравнения обтекания плоской полубесконечной пластинки вязкой несжимаемой жидкостью с моментными напряжениями.

Ереванский государственный университет

Поступила 10 XI 1971

Լ. Գ. ՊԵՏՐՈՍՅԱՆ

ԱՍԻՄԵՏՐԻԿ ՄԱԳՆԻՍԱԿԱՆ ՀԻԴՐՈԴԻՆԱՄԻԿԱՅԻ ՍԱՀՄԱՆԱՅԻՆ ՇԵՐՏԻ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԸ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Հոդվածում ուսումնասիրվում են ասիմետրիկ մագնիսական հիդրոդինամիկայի հիմնական հավասարումները․ կազմված են անսեղմելի էլեկտրահաղորդիչ հեղուկի շարժման հավասարումները մեծ կամ անսահման էլեկտրահաղորդականության դեպքում։ Ուսումնասիրվում են մածուցիկ անսեղմելի հեղուկի մագնիսական հիդրոդինամիկայի հարթ սահմանային շերտի հավասարումները մոմենտային լարումների, լարումների ասիմետրիկ տենզորի և մասնիկների ներքին իներցիայի առկայության դեպքում։ Դիտարկվում են հարթ սահմանային շերտի հավասարումների տարբեր տիպեր մեծ կամ անսահման էլեկտրահաղորդականություն ունեցող հեղուկի դեպքում, ինչպես նաև շատ փոքր էլեկտրական հաղորդականություն ունեցող հեղուկի դեպքում։

Բերվում է մածուցիկ անսեղմելի հեղուկով կիսաանվերջ հարթ թիթեղի շրջհոսման խնդրի լուծումը մոմենտային լարումների առկայության դեպքում։

EQUATIONS OF BOUNDARY LAYER IN ASYMMETRIC MAGNETOHYDRODYNAMICS

L. G. PETROSIAN

S u m m a r y

The paper presents the basic equations of asymmetric magnetohydrodynamics. The equations of motion of incompressible electroconductive fluid of high or infinite electroconductivity are derived. Various types of equations of the plane boundary layer for the fluid of high or infinite as well as of low electroconductivity are considered.

The solution for the problem of flow around the plane plate by viscous incompressible fluid with angular stresses is given.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Cosserat E., Cosserat F.* Théorie des corps déformables. Paris, 1909.
2. *Mindlin R. D., Tiersten H. F.* Effects of couple-stresses in linear elasticity. Archive for Rational Mechanics and Analysis, 11, № 5, 1962, 415–448 (см. также „Механика" № 4, 1964).
3. *Grad H.* Statistical Mechanics, Thermodynamics and Fluid Dynamics of Systems with an Arbitrary Namber of Integrals. Commun. Pure, App. Math., vol. 5, 1952, p. 455.
4. *Аэро Э. Л., Булыгин А. Н., Кувшинский Е. В.* Асимметрическая гидромеханика. ПММ, т. 29, вып. 2, 1965.
5. *Нгуен Ван Дьеп.* Об уравнениях пограничного слоя жидкости с моментными напряжениями. ПММ, т. 32, вып. 4, 1968.
6. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Электродинамика сплошных сред. Гостехиздат, М., 1959.
7. *Куликовский А. Г., Любимов Г. А.* Магнитная гидродинамика. Физматгиз, М., 1962.
8. *Бай Ши-и.* Магнитная газодинамика и динамика плазмы. Изд. „Мир", М., 1964.