

Б. А. КОРБУТ, Ю. И. НАГОРНЫЙ

УСТОЙЧИВОСТЬ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ, СОДЕРЖАЩЕЙ УПРУГИЙ ЗАПОЛНИТЕЛЬ

Рассматривается замкнутая тонкостенная сферическая оболочка, содержащая внутри упругий наполнитель. Наполнитель может быть сплошным, иметь сферическую полость или представлять шаровой слой, соединенный внутри с другой оболочкой или с твердым телом.

Изучается устойчивость рассматриваемой оболочки в линейной постановке при действии внешнего равномерного давления.

Для оболочки используются уравнения пологих оболочек в смешанной форме. Наполнитель представляется двумя моделями. В первой, приближенной модели, его деформация описывается одним уравнением теории упругости относительно радиального перемещения. Два других перемещения принимаются равными нулю, а соответствующие им уравнения исключаются. Принятое допущение о перемещениях оправдывается, если наполнитель связан с оболочкой, для которой справедливы уравнения теории пологих оболочек. Для таких оболочек, как известно, тангенциальные перемещения малы по сравнению с нормальными. Для второй модели, называемой тонкой, деформация наполнителя определяется с помощью общих уравнений трехмерной теории упругости.

1. Уравнение устойчивости сферической оболочки имеет вид [1]

$$\frac{D}{h} \nabla^6 w + \frac{q - q_s^0}{2h} \nabla^4 w + \frac{E}{R^2} \nabla^2 w + \frac{1}{h} \nabla^2 q_s = 0 \quad (1.1)$$

Здесь: w — прогиб, D — цилиндрическая жесткость, E — модуль упругости, R и h — радиус и толщина оболочки, q — внешнее давление, q_s^0 и q_s — реакции наполнителя соответственно в докритической и послекритической стадиях, ∇^2 — оператор Лапласа, $\nabla^4 = \nabla^2 \nabla^2$, $\nabla^6 = \nabla^2 \nabla^2 \nabla^2$.

В случае двух оболочек, соединенных наполнителем, используются два уравнения вида (1.1), причем параметры внешней оболочки снабжаются индексом „+“, а внутренней „-“. Неизвестные реакции q_s^0 и q_s находятся из уравнения равновесия наполнителя.

2. Используя первую модель, уравнение равновесия наполнителя запишем в виде [2]

$$\mu_s (\partial_s + 2\mu_s) \left(r^2 \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + 2r \frac{\partial u_r}{\partial r} - 2u_r \right) + \mu_s \left(\operatorname{ctg} \theta \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \varphi^2} \right) = 0 \quad (2.1)$$

где u_r — радиальное перемещение, ν_s и λ_s — постоянные Ляме, r , θ и φ — сферические координаты.

Решением уравнения (2.1) будет

$$u_r = (C_1 r^k + C_2 r^p) Y(\theta, \varphi) \quad (2.2)$$

$$\alpha = \sqrt{9 + 4\nu_s(1 - 2\nu_s)/2(1 - \nu_s)}, \quad \eta = n(n+1), \quad k = \frac{\alpha - 1}{2}, \quad p = -\frac{\alpha + 1}{2}$$

Здесь $Y(\theta, \varphi)$ — поверхностная сферическая функция порядка n ($n = 0, 1, 2, \dots$), ν_s — коэффициент Пуассона наполнителя, C_1 и C_2 — постоянные.

Граничные условия для различных случаев имеют вид:
заполнитель сплошной

$$\begin{aligned} u_r = w, \quad \sigma_r = -q_s, \quad r = R \\ u_r \neq \infty, \quad r = 0 \end{aligned} \quad (2.3)$$

заполнитель с полостью радиуса a

$$\begin{aligned} u_r = w, \quad \sigma_r = -q_s, \quad r = R \\ \sigma_r = 0, \quad r = a \end{aligned} \quad (2.4)$$

заполнитель, содержащий твердое тело радиуса a

$$\begin{aligned} u_r = w, \quad \sigma_r = -q_s, \quad r = R \\ u_r = 0, \quad r = a \end{aligned} \quad (2.5)$$

заполнитель, связанный с двумя оболочками

$$\begin{aligned} u_r = w_+, \quad \sigma_r = -q_{s+}, \quad r = R \\ u_r = w_-, \quad \sigma_r = q_{s-}, \quad r = a \end{aligned} \quad (2.6)$$

Радиальное напряжение определяется законом Гука

$$\sigma_r = (\lambda_s + 2\nu_s) \frac{\partial u_r}{\partial r} + 2\lambda_s \frac{u_r}{r} \quad (2.7)$$

Используя (2.2)–(2.7), реакцию наполнителя можно выразить через прогиб оболочки (оболочек).

Подставляя найденную реакцию (реакции) в уравнение (1.1), используя соотношение [3]

$$\nabla^2 w = -\frac{\gamma}{R^2} w \quad (2.8)$$

и имея в виду, что в соответствии с (2.8) w — гармоническая поверхностная функция, получим

$$\varphi^* = (1 + \lambda) \left[\frac{\gamma}{12(1 - \nu^2)} \eta + \frac{1}{\gamma \lambda} + \frac{E_s^*}{\gamma \lambda} M \right] \quad (2.9)$$

Для сплошного заполнителя

$$M = \nu_{s1} \left[\frac{1}{2} \sqrt{9 + 4\nu_{s2}\gamma_1} + \nu_{s3} \right] \quad (2.10)$$

$$\nu_{s1} = \frac{1 - \nu_s}{(1 + \nu_s)(1 - 2\nu_s)}, \quad \nu_{s2} = \frac{1 - 2\nu_s}{2(1 - \nu_s)}, \quad \nu_{s3} = \frac{5\nu_s - 1}{2(1 - \nu_s)}$$

$$\nu_{s4} = (1 - \nu)/2(1 - 2\nu_s), \quad \delta = E_s^* \nu_{s4}$$

Для заполнителя с полостью

$$M = \nu_{s1}(1 - \varepsilon^3) \left[\left(\frac{\alpha}{2} \right)^2 - \nu_{s3} \right] \left[\left(\frac{\alpha}{2} + \nu_{s3} \right) \varepsilon^3 + \left(\frac{\alpha}{2} - \nu_{s3} \right) \right]^{-1} \quad (2.11)$$

$$\delta = E_s^* \frac{(1 - \varepsilon^3)(1 - \nu)}{\varepsilon^3(1 + \nu_s) + 2(1 - 2\nu_s)}$$

Для заполнителя, содержащего твердое тело,

$$M = \nu_{s1}(1 - \varepsilon^3) \left[\left(\frac{\alpha}{2} + \nu_{s3} \right) + \varepsilon^3 \left(\frac{\alpha}{2} - \nu_{s3} \right) \right] \quad (2.12)$$

$$\delta = E_s^* \frac{1 - \nu}{2} \left[1 + 2\varepsilon^3 \frac{1 - 2\nu_s}{1 + \nu_s} \right] [(1 - \varepsilon^3)(1 - 2\nu_s)]^{-1}$$

Для заполнителя, связанного с двумя оболочками, вместо (2.8) используются выражения

$$\nabla^2 w_+ = -\frac{\gamma}{R^2} w_+, \quad \nabla^2 w_- = -\frac{\gamma}{a^2} w_- \quad (2.13)$$

Подстановка (2.13) и реакций заполнителя, найденных с помощью (2.2), (2.6), (2.7), в уравнения устойчивости оболочек вида (1.1) дает

$$(\psi_1 - \sigma^* \gamma)(\psi_2 - \sigma^* \gamma) - \psi_3 \psi_4 = 0 \quad (2.14)$$

$$\psi_1 = \frac{1 + \delta_1}{12(1 - \nu_s^2)} \alpha_+ \gamma_1^2 + \frac{1 + \delta_1}{\alpha_-} (1 + E_s^* \nu_{s1} H_1)$$

$$\psi_2 = \frac{(1 + \delta_1) \alpha_+}{12(1 - \nu_s^2) E_s^* h^* G_1 \gamma_1} \gamma_1^2 + \frac{(1 + \delta_1) \varepsilon^3 h^*}{G_1 \gamma_1 \alpha_+} (1 - E_s^* \varepsilon \nu_{s1} H_2)$$

$$\psi_3 = E_s^* \varepsilon \nu_{s1} H_3, \quad \psi_4 = \frac{1 + \delta_1}{\alpha_+} E_s^* \nu_{s1} H_4$$

$$H_1 = \frac{2\nu_s}{1 - \nu_s} + \frac{k - \varepsilon^p}{1 - \varepsilon^2}, \quad H_2 = \frac{2\nu_s}{1 - \nu_s} + \frac{p - k\varepsilon^2}{1 - \varepsilon^2}$$

$$H_3 = \frac{\alpha \varepsilon}{\varepsilon^p - \varepsilon^k}, \quad H_4 = \frac{\alpha}{\varepsilon^2 (\varepsilon^p - \varepsilon^k)}$$

$$G_1 = 3E_s^* \varepsilon^3 (1 - \nu_s) \nu_{s1} \left[2(1 - \varepsilon^3) + E_s^* \varepsilon (1 - \nu_s) \left(\frac{2}{1 + \nu_s} + 3\varepsilon^3 \nu_{s1} \right) \right]^{-1}$$

$$G_2 = \frac{1}{1-\varepsilon^3} \left[\frac{1}{1-2\nu_s} + \frac{2}{1+\nu_s} \varepsilon^3 - 3G_1 \varepsilon^2 \nu_{s1} \right], \quad \delta_1 = E_s^* G_2 \frac{1-\nu_+}{2}$$

Безразмерные параметры имеют вид:

$$\varepsilon^* = \frac{qR^2}{2E_- h_+^2}, \quad \nu_+ = \frac{h_+}{R}, \quad \varepsilon = \frac{a}{R} \quad (2.15)$$

$$E_s^* = \frac{E_s R}{E_+ h_+}, \quad h^* = \frac{h_+}{h_-}, \quad \gamma = \frac{E_- h_-}{E_+ h_+} \frac{1-\nu_+}{1-\nu_-}$$

Критическое давление определяется из условия

$$\frac{\partial \varepsilon^*}{\partial \eta} = 0$$

Имеют место предельные переходы. Приняв в (2.11) $\varepsilon = 0$, получим (2.10); в случае $E_- \rightarrow \infty$ уравнение (2.14) переходит в (2.12).

Заметим, что коэффициенты δ и δ_1 , учитывающие докритическое обжатие, получаются из общего решения, если принять $\gamma = 0$. Аналогично определяется и q_s^0 .

3. Для второй модели уравнение равновесия будет [4]

$$\nabla^2 \bar{u} + \frac{1}{1-2\nu_s} \text{grad div } \bar{u} = 0 \quad (3.1)$$

Здесь \bar{u} — вектор полного перемещения, grad и div — известные операторы.

Решение (3.1) возьмем в виде [5]

$$u_r = \frac{1}{2\nu_s} \frac{\partial \Phi}{\partial r}, \quad u_\theta = \frac{1}{2\nu_s} \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}, \quad u_\varphi = \frac{1}{2\nu_s} \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \quad (3.2)$$

$$\Phi = \cos \varphi \sin \theta \frac{\partial \Phi_1}{\partial r} + \frac{\cos \varphi \cos \theta}{r} \frac{\partial \Phi_1}{\partial \theta} +$$

$$+ \frac{\cos \varphi}{r \sin \theta} \frac{\partial \Phi_2}{\partial \varphi} + \cos \theta \frac{\partial \Phi_3}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial \Phi_3}{\partial \theta} -$$

$$- \frac{\sin \varphi}{r \sin \theta} \frac{\partial \Phi_1}{\partial \varphi} + \sin \varphi \sin \theta \frac{\partial \Phi_2}{\partial r} + \frac{\sin \varphi \cos \theta}{r} \frac{\partial \Phi_3}{\partial \varphi}$$

Φ_1, Φ_2, Φ_3 — гармонические функции.

Ограничившись случаем сплошного наполнителя, примем

$$\Phi_1 = Ar^m Y(\theta, \varphi), \quad \Phi_2 = Br^m Y(\theta, \varphi) \quad (3.3)$$

$$\Phi_3 = Cr^m Y(\theta, \varphi), \quad m = \frac{\alpha_1 - 1}{2}, \quad \alpha_1 = \sqrt{1 + 4\gamma}$$

Здесь A, B и C — постоянные.

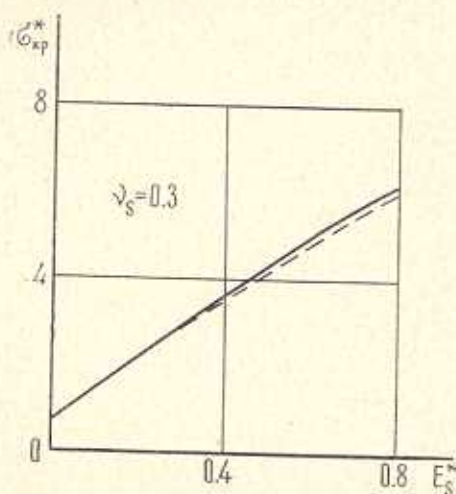
Условия сопряжения с оболочкой будут

$$\begin{aligned}
 u_r &= w, \quad \tau_{r\theta} = 0, \quad \tau_{rz} = 0, \quad \varepsilon_r = -q_s, \quad r = R \\
 \varepsilon_r &= \lambda_s \operatorname{div} \bar{u} + 2\mu_s \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \tau_{r\theta} = \mu_s \left[\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{u_\theta}{r} \right) \right] \\
 \tau_{rz} &= \mu_s \left[\frac{1}{r} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{u_z}{r} \right) \right]
 \end{aligned} \quad (3.4)$$

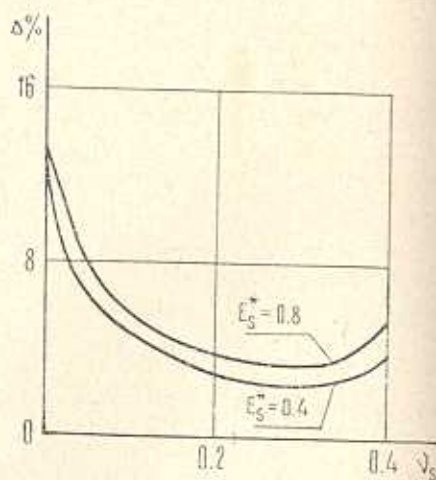
Для удовлетворения краевых условий (3.4) используем принцип смягчения граничных условий [6]. Учитывая, кроме того, что последние три слагаемых в Φ — гармонические функции в смысле метода Бубнова-Галеркина, а остальные — гармонические точно, получим выражение, аналогичное (2.9), в котором

$$M = \frac{1}{1 + \nu_s} \left[\frac{1}{2} \sqrt{1 + 4\nu_s} - 2.5 \right], \quad n \geq 2 \quad (3.5)$$

4. Критические давления были вычислены на основе приближенной и точной моделей заполнителя при следующих данных: $\varepsilon = 0$, $\alpha = 1/250$,



Фиг. 1



Фиг. 2

$\nu = 0.3$; параметры E_s^* и ν_s варьировались. На фиг. 1 показана зависимость критического давления от жесткости заполнителя E_s^* . Сплошная линия соответствует приближенной модели, пунктирная — точной. На фиг. 2 дана относительная погрешность Δ , вносимая в расчет приближенной моделью.

Из приведенных графиков видно, что в практически важном диапазоне изменения жесткости и коэффициента Пуассона заполнителя приближенная модель дает удовлетворительное согласование с точной моделью.

Բ. Ա. ԿՈՐԲՈՒՏ, ՅՈՒ. Ի. ՆԱԿՈՐՆՅԷ

ԱՌԱՋԳԱԿԱՆ ԼՅՈՆ ՊԱՐՈՒՆԱԿԱՂ ԳԵՂԱՅԻՆ ԹԱՂԱՆԹԻ ԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅՈՒՆԸ

Ա մ փ ո փ ու մ

Հոդվածում ուսումնասիրվում է հալասարաչափ արտաքին ճնշման ազդեցության տակ գտնվող լցուն պարունակող փակ գնդաչին թաղանթի կաշունությունը: Լցունի համար ընդունված է ճշգրիտ մոդել, որտեղ օգտագործվում են առաձգականության տեսության ընդհանուր հալասարունմները, և մոտավոր մոդել, որտեղ օգտագործվում է առաձգականության տեսության մեկ հալասարունմ: Դիտարկված են՝ հոծ լցունի, խոռոչով, ինչպես նաև իր մեջ թաղանթ կամ պինդ մարմին ունեցող լցունների դեպքերը:

Ինչպես ցույց են տվել կատարված հաշվարկները, մոտավոր մոդելը բավարար է նկարագրում լցունի դեֆորմացիան:

STABILITY OF A SPHERICAL SHELL WITH AN ELASTIC CORE

B. A. KOR BUT, Y. I. NAGORNY

S u m m a r y

A study on a closed spherical shell with an elastic core is presented.

The cases of a continuous core, a core with a cavity, a core having a shell or a rigid body inside are examined.

The spherical shell is assumed to be subject to the action of external uniform pressure.

Approximate and exact models are employed to determine deformations of the core. One equation of elasticity in terms of radial displacement and three equations of elasticity are used for the approximate and exact models respectively. The agreement of the results obtained on the basis of both models is found to be satisfactory.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Больмир А. С. Устойчивость деформируемых систем. Изд. «Наука», М., 1967.
2. Ляв А. Математическая теория упругости. ОНТИ, 1935.
3. Власов В. Э. Избр. тр., т. 1. Изд-во АН СССР, 1962.
4. Тресфиу Е. Математическая теория упругости. ОНТИ, 1934.
5. Рекаш В. Г. Руководство к решению задач по теории упругости. «Высшая школа» М., 1966.
6. Лейбензон А. С. Собр. тр., т. 1. Изд-во АН СССР, 1951.