

А. Г. АВETИСЯН, К. С. ЧОБАНЯН

ХАРАКТЕР НАПРЯЖЕНИЙ В ЗАДЕЛАННОЙ ОКРЕСТНОСТИ
КРАЯ ПОВЕРХНОСТИ СОЕДИНЕНИЯ СОСТАВНОГО ТЕЛА,
НАГРУЖЕННОГО В УСЛОВИЯХ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧИ
ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Некоторые вопросы напряженного состояния окрестности угловых точек контура области в плоской задаче теории упругости изотропного однородного тела рассмотрены в работах [1—7] и др.

Отдельные вопросы напряженного состояния около края поверхности соединения составного тела исследовались в работах [8—11].

В настоящей работе при помощи местного решения плоской задачи теории упругости [4] исследуется поведение поля напряжений в окрестности края поверхности соединения составного тела, когда на внешней поверхности тела около этого края перемещения равны нулю. Рассматриваемая задача приводится к отысканию одного собственного значения многоточечной несамосопряженной краевой задачи для линейного обыкновенного дифференциального уравнения.

Анализ результатов вычислений, проведенных для трех серий значений пяти параметров задачи, показывает, что характер напряженного состояния около рассматриваемого края поверхности соединения существенным образом зависит от упругих деформативных характеристик соединенных материалов. В окрестности края поверхности соединения, выходящей на гладкую часть поверхности составного тела, напряжения могут затухать или возрастать для данных двух материалов в зависимости от величины углов между поверхностью соединения и внешней поверхностью тела. В случае выходящего края возможны концентрации напряжений, а в случае входящего края — напряженное состояние, исчезающее при приближении к краю поверхности соединения.

1. Пусть тело состоит из спаянных между собой по общей части боковых поверхностей двух цилиндрических тел с различными характеристиками упругости.

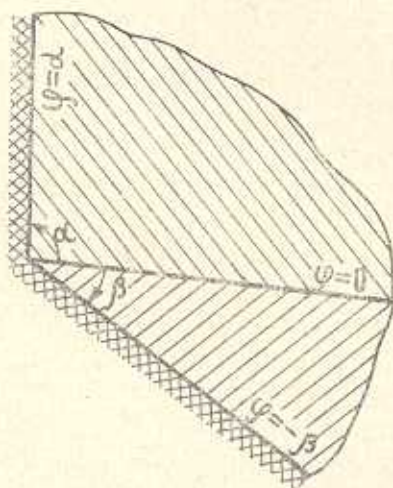
Рассматривается плоское напряженное состояние или плоская деформация цилиндрического тела; на части боковой поверхности, примыкающей к краю поверхности соединения, заданы нулевые перемещения. На остальной части боковой поверхности действует внешняя нагрузка.

При отсутствии массовых сил компоненты напряжений через функцию напряжений Эри Φ в полярных координатах выражаются формулами

$$\sigma_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2}, \quad \sigma_\varphi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2}, \quad \tau_{r\varphi} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \right) \quad (1.1)$$

Функция $\Phi(r, \varphi)$ в каждой из областей поперечного сечения (фиг. 1) рассматриваемого цилиндрического тела удовлетворяет бигармоническому уравнению

$$\Delta^2 \Phi_i \equiv \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right)^2 \Phi_i = 0 \quad (1.2)$$



Фиг. 1

На линии раздела областей I и II поперечного сечения, соответствующих различным материалам, функция $\Phi(r, \varphi)$ удовлетворяет [12, 13] условиям

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \Phi_2, \quad \frac{\partial \Phi_1}{\partial \varphi} = \frac{\partial \Phi_2}{\partial \varphi} \\ \frac{1}{E_1} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi_1}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial \varphi^2} - \nu_1 \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial r^2} \right] &= \\ = \frac{1}{E_2} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi_2}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial \varphi^2} - \nu_2 \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial r^2} \right] & \\ \frac{1}{E_1} \left[(2 + \nu_1) \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^3 \Phi_1}{\partial r^2 \partial \varphi} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial r \partial \varphi} + \frac{2}{r^3} \frac{\partial \Phi_1}{\partial \varphi} \right) + \right. & \\ \left. + \frac{3}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial r \partial \varphi} - \frac{2}{r^3} \frac{\partial \Phi_1}{\partial \varphi} + \frac{1}{r^3} \frac{\partial^3 \Phi_1}{\partial \varphi^3} \right] &= \\ = \frac{1}{E_2} \left[(2 + \nu_2) \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^3 \Phi_2}{\partial r^2 \partial \varphi} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial r \partial \varphi} + \frac{2}{r^3} \frac{\partial \Phi_2}{\partial \varphi} \right) + \right. & \end{aligned} \quad (1.3)$$

$$\left. + \frac{3}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial r \partial \varphi} - \frac{2}{r^3} \frac{\partial \Phi_2}{\partial \varphi} + \frac{1}{r^3} \frac{\partial^3 \Phi_2}{\partial \varphi^3} \right]$$

Начало полярной системы координат помещено в угловой точке контура области, а полярная ось направлена по линии контакта.

Условия заделки поверхности через функции Эри в полярных координатах выражаются соотношениями

$$\begin{aligned} & \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi_1}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial \varphi^2} - \nu_1 \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial r^2} = 0 \\ & (2 + \nu_1) \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^3 \Phi_1}{\partial r^2 \partial \varphi} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial r \partial \varphi} + \frac{2}{r^3} \frac{\partial \Phi_1}{\partial \varphi} \right) + \\ & + \frac{3}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial r \partial \varphi} - \frac{2}{r^3} \frac{\partial \Phi_1}{\partial \varphi} + \frac{1}{r^3} \frac{\partial^3 \Phi_1}{\partial \varphi^3} = 0 \quad \text{при } \varphi = \alpha \quad (1.4) \\ & \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi_2}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial \varphi^2} - \nu_2 \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial r^2} = 0 \\ & (2 + \nu_2) \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^3 \Phi_2}{\partial r^2 \partial \varphi} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial r \partial \varphi} + \frac{2}{r^3} \frac{\partial \Phi_2}{\partial \varphi} \right) + \\ & + \frac{3}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial r \partial \varphi} - \frac{2}{r^3} \frac{\partial \Phi_2}{\partial \varphi} + \frac{1}{r^3} \frac{\partial^3 \Phi_2}{\partial \varphi^3} = 0 \quad \text{при } \varphi = -\beta \end{aligned}$$

где $\Phi_i (i=1, 2)$ представляют функцию Φ в областях I и II соответственно, а E_i и $\nu_i (i=1, 2)$ — модули упругости и коэффициенты Пуассона материалов.

Условия (1.3) и (1.4) записаны для плоского напряженного состояния. Для плоской деформации в соотношениях (1.3—1.4) вместо ν_i подставляется $\frac{\nu_i}{1 - \nu_i}$.

Решение уравнения (1.2) представляется в виде

$$\Phi_i = r^{\lambda+1} \theta_i(\lambda, \varphi) \quad (1.5)$$

где λ — параметр. Подставляя (1.5) в (1.2), для θ_i получаем обыкновенное дифференциальное уравнение четвертого порядка

$$\theta_i^{IV} + 2(\lambda^2 + 1) \theta_i'' + (\lambda^2 - 1)^2 \theta_i = 0 \quad (1.6)$$

общее решение которого имеет вид

$$\begin{aligned} \theta_i(\lambda, \varphi) = & A_{i1} \sin(\lambda+1)\varphi + A_{i2} \cos(\lambda+1)\varphi + A_{i3} \sin(\lambda-1)\varphi + \\ & + A_{i4} \cos(\lambda-1)\varphi \end{aligned} \quad (1.7)$$

где $A_{ij} (i=1, 2; j=1, 2, 3, 4)$ — постоянные интегрирования.

Внося (1.5) в (1.3) и (1.4), получим краевые условия для функций θ_1 и θ_2 .

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \Theta_1}{\partial \varphi^2} + (\lambda + 1)(1 - \nu_1 \lambda) \Theta_1 &= 0 \\ \frac{\partial^3 \Theta_1}{\partial \varphi^3} + [(2 + \nu_1) \lambda^2 + (1 - \nu_1) \lambda + 1] \frac{\partial \Theta_1}{\partial \varphi} &= 0 \end{aligned} \right\} \text{при } \varphi = \alpha$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \Theta_2}{\partial \varphi^2} + (\lambda + 1)(1 - \nu_2 \lambda) \Theta_2 &= 0 \\ \frac{\partial^3 \Theta_2}{\partial \varphi^3} + [(2 + \nu_2) \lambda^2 + (1 - \nu_2) \lambda + 1] \frac{\partial \Theta_2}{\partial \varphi} &= 0 \end{aligned} \right\} \text{при } \varphi = -\beta$$

$$\frac{\partial \Theta_1}{\partial \varphi} = \frac{\partial \Theta_2}{\partial \varphi}, \quad \Theta_1 = \Theta_2 \quad (1.8)$$

$$\frac{1}{E_1} \left[\frac{\partial^2 \Theta_1}{\partial \varphi^2} + (\lambda + 1)(1 - \nu_1 \lambda) \Theta_1 \right] = \frac{1}{E_2} \left[\frac{\partial^2 \Theta_2}{\partial \varphi^2} + (\lambda + 1)(1 - \nu_2 \lambda) \Theta_2 \right]$$

$$\frac{1}{E_1} \left\{ \frac{\partial^3 \Theta_1}{\partial \varphi^3} + [(2 + \nu_1) \lambda^2 + (1 - \nu_1) \lambda + 1] \frac{\partial \Theta_1}{\partial \varphi} \right\} =$$

$$= \frac{1}{E_2} \left\{ \frac{\partial^3 \Theta_2}{\partial \varphi^3} + [(2 + \nu_2) \lambda^2 + (1 - \nu_2) \lambda + 1] \frac{\partial \Theta_2}{\partial \varphi} \right\} \quad \text{при } \varphi = 0$$

Подставляя $\Theta_i(r, \varphi)$ ($i = 1, 2$) в (1.8), получим следующую систему линейных уравнений относительно коэффициентов A_{ij} ($i = 1, 2, j = 1, 2, 3, 4$):

$$\begin{aligned} \lambda^+ \nu_1^+ S_1^+ A_{11} + \lambda^+ \nu_1^+ C_1^+ A_{12} + (\nu_1^+ \lambda^+ - 4) S_1^- A_{13} + (\nu_1^+ \lambda^+ - 4) C_1^- A_{14} &= 0 \\ \lambda^+ \nu_1^+ C_1^+ A_{11} - \lambda^+ \nu_1^+ S_1^+ A_{12} + (\nu_1^+ \lambda^+ + 4) C_1^- A_{13} - (\nu_1^+ \lambda^+ + 4) S_1^- A_{14} &= 0 \\ \lambda^+ \nu_2^+ S_2^+ A_{21} - \lambda^+ \nu_2^+ C_2^+ A_{22} + (\nu_2^+ \lambda^+ - 4) S_2^- A_{23} - (\nu_2^+ \lambda^+ - 4) C_2^- A_{24} &= 0 \\ \lambda^+ \nu_2^+ C_2^+ A_{21} + \lambda^+ \nu_2^+ S_2^+ A_{22} + (\nu_2^+ \lambda^+ + 4) C_2^- A_{23} + (\nu_2^+ \lambda^+ + 4) S_2^- A_{24} &= 0 \\ \lambda^+ \nu_1^+ A_{12} + (\lambda^+ \nu_1^+ - 4) A_{14} - \mu [\lambda^+ \nu_2^+ A_{22} + (\lambda^+ \nu_2^+ - 4) A_{24}] &= 0 \quad (1.9) \\ \lambda^+ \nu_1^+ A_{11} + (\nu_1^+ \lambda^+ + 4) A_{13} - \mu [\lambda^+ \nu_2^+ A_{21} + (\nu_2^+ \lambda^+ + 4) A_{23}] &= 0 \\ A_{12} + A_{14} - A_{22} - A_{24} &= 0 \\ \lambda^+ A_{11} + \lambda^- A_{13} - \lambda^+ A_{21} - \lambda^- A_{23} &= 0 \end{aligned}$$

где для краткости приняты обозначения

$$\mu = \frac{E_1}{E_2}, \quad \lambda^+ = 1 + \lambda, \quad \lambda^- = \lambda - 1, \quad \nu_i^+ = \nu_i + 1, \quad S_i^+ = \sin(\lambda + 1) \varphi$$

$$S_i^- = \sin(\lambda - 1) \varphi, \quad C_i^+ = \cos(\lambda + 1) \varphi, \quad C_i^- = \cos(\lambda - 1) \varphi, \quad (i = 1, 2)$$

Для существования нетривиального решения однородной системы (1.9) линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов A_{ij} ($j = 1, 2, 3, 4; i = 1, 2$) необходимо, чтобы определитель этой системы равнялся нулю

$$\Delta(\lambda, \mu, \nu_1, \nu_2, \varphi) = 0 \quad (1.10)$$

После ряда преобразований условие (1.10) можно представить в виде

$$\begin{aligned} & -4\lambda^2[\nu_1^{+2} \sin \alpha \cos \beta + \mu\nu_2^{+2} \sin \beta \cos \alpha]^2 - 4\lambda^2(\nu_1^{+2} - \mu\nu_2^{+2})^2 \sin^2 \alpha \sin^2 \beta + \\ & + 4[\nu_1^+(\nu_1^+ - 4) \sin \lambda \alpha \cos \lambda \beta + \mu\nu_2^+(\nu_2^+ - 4) \sin \lambda \beta \cos \lambda \alpha]^2 + 4[\nu_1^+(\nu_1^+ - 4) - \\ & - \mu\nu_2^+(\nu_2^+ - 4)]^2 \sin^2 \lambda \beta \sin^2 \lambda \alpha + 4\nu_1^{+3} \lambda^2 (\nu_2^+ - 4) (\mu\nu_2^+ - \nu_1^+) \sin^2 \alpha \sin^2 \lambda \beta - \\ & - 4\nu_1^+(\nu_1^+ - 4)^2 (\nu_2^+ - 4) (\mu\nu_2^+ - \nu_1^+) \sin^2 \lambda \alpha \sin^2 \lambda \beta - \\ & - 4\mu\nu_2^{+3} \lambda^2 (\nu_1^+ - 4) (\mu\nu_2^+ - \nu_1^+) \sin^2 \lambda \alpha \sin^2 \beta + \\ & + 4\mu\nu_2^+(\nu_1^+ - 4) (\nu_2^+ - 4)^2 (\mu\nu_2^+ - \nu_1^+) \sin^2 \lambda \alpha \sin^2 \lambda \beta + \\ & + \nu_1^{+2} \nu_2^{+2} \lambda^4 (\mu\nu_2^+ - \nu_1^+)^2 \sin^2 \alpha \sin^2 \beta - \nu_1^{+2} \lambda^2 (\nu_2^+ - 4)^2 (\mu\nu_2^+ - \nu_1^+)^2 \sin^2 \alpha \sin^2 \lambda \beta - \\ & - \nu_2^{+2} \lambda^2 (\nu_1^+ - 4)^2 (\mu\nu_2^+ - \nu_1^+)^2 \sin^2 \lambda \alpha \sin^2 \beta + \\ & + (\nu_1^+ - 4)^2 (\nu_2^+ - 4)^2 (\mu\nu_2^+ - \nu_1^+)^2 \sin^2 \lambda \alpha \sin^2 \lambda \beta = 0 \end{aligned} \quad (1.11)$$

Трехкратный корень $\lambda=1$ уравнения $\Delta=0$ исключаем, так как ему не соответствует нетривиальное решение рассматриваемой краевой задачи для Θ .

В частном случае уравнение (1.11) примет вид

$$\text{при } \alpha = 0 \quad \lambda^2 (\nu_2 + 1)^2 \sin^2 \beta - (\nu_2 - 3)^2 \sin^2 \beta \lambda = 0 \quad (1.12)$$

$$\text{при } \beta = 0 \quad \lambda^2 (\nu_1 + 1)^2 \sin^2 \alpha - (\nu_1 - 3)^2 \sin^2 \alpha \lambda = 0 \quad (1.13)$$

$$\text{и} \quad (\nu + 1)^2 \lambda^2 \sin^2 (\alpha + \beta) - (\nu - 3)^2 \sin^2 (\alpha + \beta) \lambda = 0 \quad (1.14)$$

$$\text{при } \mu = 1, \quad \nu_1 = \nu_2$$

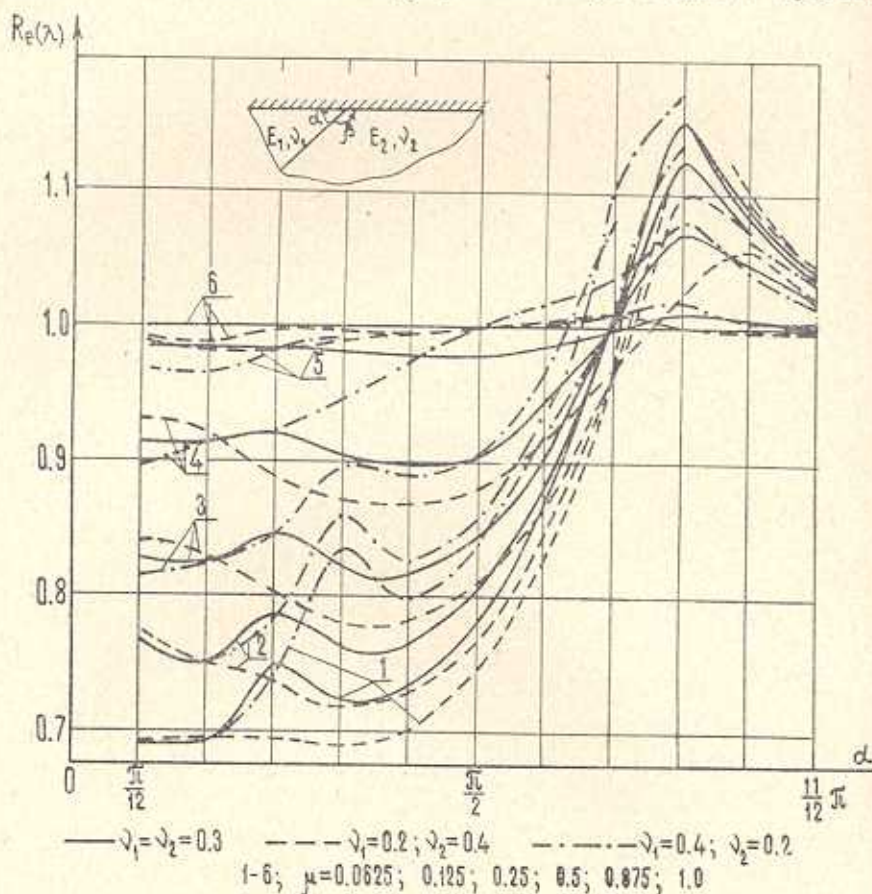
Уравнения (1.9), (1.10), (1.11) совпадают с уравнениями, полученными Вильямсом [4] для исследования особенностей в угловой точке контура в плоской задаче теории упругости для однородного тела, когда контур области около угловой точки защемлен. Эти уравнения можно получить и другим путем [7].

Для каждой комбинации конкретных значений параметров $\alpha, \beta, \mu, \nu_1$ и ν_2 уравнение (1.11) имеет бесконечное множество корней, расположенных в комплексной плоскости λ симметрично относительно осей координат. Система собственных функций

$$\Theta(\varphi, \lambda_i) = \begin{cases} \Theta_1(\varphi, \lambda_i) & \text{при } 0 \leq \varphi \leq \alpha \\ \Theta_2(\varphi, \lambda_i) & \text{при } -\beta \leq \varphi \leq 0 \end{cases} \quad (1.15)$$

в интервале $(-\beta, \alpha)$ является двухкратно полной в классе комплексных или четырехкратно полной в классе действительных функций, непрерывных в интервалах $(-\beta, 0)$, $(0, \alpha)$ и удовлетворяющих условиям (1.8) [14, 15, 16].

Функция напряжений Φ может быть представлена в виде ряда по собственным функциям краевой задачи для Θ . Однако слагаемые в Φ , представленные при помощи собственных функций, соответствующих собственным значениям с неположительными действительными частями, приводят к накоплению бесконечно большой энергии упругой деформации в конечном объеме окрестности края поверхности соединения. Поэтому эти слагаемые не включаются в общее решение для Φ . Отбрасыванием собственных значений с неположительными действительными частями вместо четырехкратной полной системы собственных функций $\Theta(\varphi, \lambda_i)$ оставляем двукратно полную в классе кусочно-не-



Фиг. 2

прерывных действительных функций в интервале $(-\beta, \alpha)$. Таким образом, система собственных функций $|\Theta(\varphi, \lambda_i)|$, соответствующих собственным значениям $\lambda_1, \lambda_2, \dots$, пронумерованным по возрастанию положительных действительных частей, позволяет на замыкающей части контура рассматриваемой области представить два компонента произвольной внешней нагрузки в виде бесконечных рядов по этим функциям.

Решение плоской задачи теории упругости в рассматриваемой области может быть представлено в виде ряда

$$\Phi = \sum_{i=1}^{\infty} r^{\lambda_i+1} \theta(z, \lambda_i) \quad (1.16)$$

где θ_i определяется по (1.15).

Из (1.1), (1.5) следует, что если $0 < \operatorname{Re} \lambda_1 < 1$, то при приближении к краю поверхности соединения напряжения неограниченно возрастают, при этом порядок особенности равен $|\operatorname{Re} \lambda - 1|$. А если $\operatorname{Re} \lambda_1 > 1$, напряжения убывают до нуля при приближении к краю поверхности соединения ($r \rightarrow 0$).

Таким образом, исследование характера напряженного состояния в окрестности заделанного края поверхности соединения составного тела в плоской задаче теории упругости приводится к отысканию корня трансцендентного уравнения (1.11) с наименьшей положительной действительной частью в зависимости от параметров $\alpha, \beta, \mu, \nu_1, \nu_2$.

Искомый корень уравнения (1.11) вычислен на ЭВМ для различных комбинаций значений параметров задачи в случае плоского напряженного состояния. На фиг. 2 приведены графики изменения действительной части этого корня для гладкого края $\alpha + \beta = \pi$ поверхности соединения. Для выходящего $\alpha + \beta = \frac{11}{12} \pi$ и входящего $\alpha + \beta = \frac{13}{12} \pi$ краев в табл. 1—4 приведены некоторые значения корня (1.11). Пропущенные в таблицах корни больше единицы.

2. Анализ результатов вычислений приводит к определенным выводам.

Когда $\alpha + \beta = \pi$ и коэффициенты Пуассона обоих материалов одинаковы ($\nu_1 = \nu_2$), согласно графикам фиг. 2 напряжения затухают при приближении к краю поверхности соединения ($r \rightarrow 0$), если угол α , соответствующий материалу с меньшим модулем упругости ($E_1 < E_2$), изменяется в пределах $\alpha_1 < \alpha < \pi$, где предельное значение α_1 угла α находится в интервале $\frac{7}{12} \pi < \alpha_1 < \frac{2}{3} \pi$.

При углах $\alpha < \alpha_1$ порядок особенности напряжений снижается при приближении упругих деформативных свойств соединенных материалов. При увеличении угла α от нуля до α_1 порядок особенности напряжений понижается с незначительными колебаниями. При достаточно близких модулях упругости материалов и $\alpha < \alpha_1$ в некоторых интервалах изменения α возможно отсутствие особенности напряжений. Напряжения имеют осциллирующую особенность при значениях α , близких к $\frac{\pi}{4}$.

Анализ данных, приведенных на фиг. 2, показывает, что при увеличении коэффициента Пуассона материала с меньшим модулем

Таблица 1

$$\alpha + \beta = \frac{11}{12} \pi \quad \nu_1 = \nu_2 = 0.3$$

μ	$\frac{\pi}{12} q$	$q=1$	2	3	4	5	6	7
0.0625		0.75576 0.08543	0.77731 0.06953	0.74070	0.74833	0.79323	0.87808	1.02680
0.125		0.83672 0.05417	0.83477 0.05537	0.79009	0.78882	0.82424	0.90014	1.03536
0.25		0.92899 0.01374	0.01744 0.91282	0.80066	0.85382	0.87738	0.93774	1.05051
0.5		0.99391	0.96327	0.94825	0.94470	0.95861	0.99781	1.07230

Таблица 2

$$\alpha + \beta = \frac{11}{12} \pi \quad \nu_1 > \nu_2 \quad (\nu_1 = 0.4; \nu_2 = 0.2)$$

μ	$\frac{\pi}{12} q$	$q=1$	2	3	4	5	6	7
0.0625		0.75530 0.10567	0.77437 0.11969	0.85891 0.04436	0.80442	0.84430	0.93327	1.09488
0.125		0.83476 0.06916	0.83241 0.10331	0.89691 0.05473	0.84799	0.87776	0.95736	1.11640
0.25		0.92422 0.02309	0.91042 0.07142	0.95292 0.05260	0.91852 1.02133	0.93695	1.00379	
0.5		0.99330	0.99873 0.02304	1.02109 0.02923				

Таблица 3

$$\alpha + \beta = \frac{11}{12} \pi \quad \nu_1 < \nu_2 \quad (\nu_1 = 0.2; \quad \nu_2 = 0.4)$$

$\frac{\pi}{12} q$	$q=1$	2	3	4	5	6	7	8
0.0625	0.75841 0.06101 0.84112	0.72197	0.69665	0.71154	0.75633	0.83830	0.97778	1.21733
0.125	0.03349 0.91398 0.98840	0.77922	0.74801	0.75230	0.78823	0.85046	0.98681	1.19558
0.25	1.02007	0.85572	0.82495	0.82042	0.84335	0.90009	1.00309	
0.5		0.91979	0.92711	0.91990	0.93132	0.96650	1.03036	
0.75		1.00488	0.99656	0.99608	1.00437	1.02462	1.05316	

Таблица 4

$$\alpha + \beta = \frac{13}{12} \pi \quad \nu_1 = \nu_2 = 0.3$$

$\frac{\pi}{12} q$	$q=1$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0.0625	0.64135 0.05751	0.62937 0.10089	0.66383 0.10718	0.73019 0.07312	0.70784	0.72368	0.77304	0.85979	1.00075	1.08717	1.03915	1.98003
0.125	0.67880	0.68598 0.07813	0.70544 0.09521	0.75789 0.07059	0.73646	0.74492	0.78656	0.86335	0.98600	1.07567	1.03267	0.98337
0.25	0.73729	0.76121 0.03670	0.76677 0.07164	0.80114 0.06175	0.78372	0.78181	0.81064	0.86968	0.96145	1.43706	1.01873	0.96859
0.5	0.81819	0.80781	0.03030 0.84366	0.03947 0.85936	0.85122	0.83914	0.84943	0.87970	0.92648	0.98869	0.97354	0.93985
0.75	0.86284	0.85407	0.86568	0.89037	0.88621	0.87788	0.87737	0.88671	0.90404	0.92136	0.92671	0.91383

упругости ($\nu_1 > \nu_2$) интервал изменения соответствующего этому материалу угла α , при котором напряжения около края поверхности соединения затухают, увеличивается при близких модулях упругости материалов, смещаясь влево. Такое смещение замечается и при уменьшении ν_1 ($\nu_1 < \nu_2$), однако, соответствующие интервалы для α суживаются. То же самое заключение справедливо для интервалов изменения значений угла α , при которых напряжения имеют около края поверхности соединения осциллирующие особенности, только эти интервалы, изменяясь, смещаются для малых значений $\mu = \frac{E_1}{E_2}$ влево, а для значений μ , близких к единице, — направо. В случае, когда соединенные материалы имеют одинаковые модули упругости и разные коэффициенты Пуассона ($\nu_1 = 0.2$; $\nu_2 = 0.4$), напряжения около края поверхности соединения затухают, если $\alpha_1 < \alpha < \alpha_2$, причем для предельных значений угла α имеем оценки $\frac{\pi}{6} < \alpha_1 < \frac{\pi}{4}$; $5\frac{\pi}{12} < \alpha_2 < \frac{\pi}{2}$. Для остальных возможных значений угла α напряжения имеют особенности, причем осциллирующие, когда значение α близко к $\frac{2\pi}{3}$.

3. Когда $\alpha + \beta = \frac{11}{12}\pi$, а коэффициенты Пуассона обоих материалов одинаковы ($\nu_1 = \nu_2$), тогда, как показывает анализ данных, приведенных в табл. 1, напряжения имеют особенность при приближении к выступающему краю поверхности соединения ($r \rightarrow 0$), если угол α , соответствующий материалу с меньшим модулем упругости ($E_1 < E_2$), изменяется для $\mu = \frac{E_1}{E_2} < 0.5$ в пределах $0 < \alpha < \alpha_1$, где предельное значение α_1 угла α находится в интервале $\frac{\pi}{2} < \alpha_1 < \frac{7\pi}{12}$. Порядок особенности напряжений при приближении упругих деформативных свойств соединенных материалов снижается, а при увеличении угла α от нуля до α_1 уменьшается с незначительными колебаниями. Особенность напряжений в указанных пределах изменений параметров α и μ имеет осциллирующий характер и принимает максимальное значение при α , близком к $\frac{\pi}{8}$. При углах $\alpha > \alpha_1$ около края поверхности соединения напряжения затухают.

При увеличении коэффициента Пуассона материала с меньшим модулем упругости ($\nu_1 > \nu_2$) интервал изменения угла α , соответствующего этому материалу, суживается тем больше, чем отношение $\mu = \frac{E_1}{E_2}$ ближе к единице. А если коэффициент Пуассона материала с меньшим модулем упругости уменьшается ($\nu_1 < \nu_2$), то тогда интервал для α , при котором напряжения около края поверхности соединения

имеют особенность, расширяется для малых отношений $\mu = \frac{E_1}{E_2}$. Относительно интервалов изменения α , при изменении ν_1 и ν_2 , когда особенность имеет осциллирующий характер, справедливо утверждение, приведенное выше для случая $\alpha + \beta = \pi$. О порядке особенности можно сказать то же самое, что и для случая $\nu_1 = \nu_2$. Эти выводы следуют из данных, приведенных в табл. 2 и 3.

4. Когда $\alpha + \beta = \frac{13}{12}\pi$, а коэффициенты Пуассона обоих материалов одинаковы ($\nu_1 = \nu_2$), как показывают данные, приведенные в табл. 4, около заделанного входящего края напряжения затухают, если угол α , соответствующий материалу с меньшим модулем упругости ($E_1 < E_2$), изменяется в пределах $\alpha_1 < \alpha < \alpha_2$, где предельные значения α_1 и α_2 угла α находятся в интервалах $\frac{2\pi}{3} < \alpha_1 < \frac{3}{4}\pi$; $\alpha_2 = \pi$ для $\mu \leq \frac{1}{16}$ и $\frac{3}{4}\pi < \alpha_1 < \frac{5}{6}\pi$, $\frac{11}{12}\pi < \alpha_2 < \pi$ для $\frac{1}{8} \leq \mu < \frac{1}{2}$.

Для значений параметров α и μ вне этих пределов напряжения имеют особенность, порядок которой уменьшается при увеличении угла α с колебаниями, а при возрастании $\mu = \frac{E_1}{E_2}$ — монотонно. Особенность имеет осциллирующий характер при значениях угла α , близких к $\frac{\pi}{4}$.

Влияние изменения коэффициентов Пуассона соединенных материалов на интервал изменения параметров α и μ , при которых напряжения затухают или имеют особенность, а также на изменение порядка особенности напряжений и ее характер остается таким же, каким было в случае выступающего края.

Проведенный анализ данных таблиц (1—4) показывает, что около выступающего (входящего) заделанного края поверхности соединения, нагруженного составного тела в определенных сочетаниях упругих деформативных характеристик материалов и соответствующих углов, напряжения имеют особенность (затухают), что невозможно в однородных телах. Около заделанного гладкого края напряжения имеют отличное от нуля конечное значение только в эпизодических случаях комбинаций значений параметров α , β , μ , ν_1 и ν_2 . В остальных случаях напряжения около края либо имеют особенность, либо затухают.

Ա. Գ. ԱՎԵՏԻՍԻԱՆ, Կ. Ս. ՇՈԲԱՆԻԱՆ

ԼԱՐՈՒՄԵՆԵՐԻ ԲՆՈՒՅԹԸ ԱՌԱՉԳԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՀԱՐԹ ԽՆԴՐԻ
ՊԱՅՄԱՆՆԵՐՈՒՄ ԲԵՌՆԱՎՈՐՎԱԾ ԲԱՂԱԴՐՅԱԼ ՄԱՐՄՆԻ ՄԻԱՅՄԱՆ
ՄԱԿԵՐԵՎՈՒՅԹԻ ԵՋՐԻ ԱՄՐԱԿՑՎԱԾ ՇՐՋԱԿԱՑՔՈՒՄ

Ա մ փ ո ւ լ մ

Առաձգականության տեսության հարթ խնդրի տեղական լուծումների օգնությամբ ուսումնասիրվում է լարումների դաշտի վարքը բաղադրյալ մարմնի միացման մակերևույթի եզրի մոտ, երբ նրա շրջակայքում մարմնի արտաքին մակերևույթի տեղափոխումները զերո են: Գիտարկվող խնդրի լուծումը բերվում է գծային սովորական գիֆերենցիալ հավասարման համար բազմակետ ոչինքնահամալուծ եզրային խնդրի մի սեփական արժեքի որոնմանը:

Խնդրի պարամետրերի արժեքների երեք սերիա կոմբինացիաների համար կատարված է հաշվարկների արդյունքների վերլուծություն և բացահայտված է միացման մակերևույթի եզրի շրջակայքում լարվածային վիճակի բնույթը՝ կախված միացված նյութերի առաձգական բնութագրից և միացման մակերևույթի ու մարմնի մակերևույթի միջև կազմված նյութերին վերաբերվող անկյուններից: Ստացված են սահմանների գնահատականներ՝ պարամետրերի փոփոխման այն տիրույթների համար, երբ բավարարվում են միացման մակերևույթի եզրի թերլարվածության պայմանները:

ON THE NATURE OF STRESSES IN THE FIXED VICINITY OF
THE JUNCTION SURFACE BRINK OF A COMPOSITE ELASTIC
BODY LOADED IN CONDITIONS OF A PLANE PROBLEM OF
THE ELASTICITY THEORY

A. G. AVETISIAN, K. S. CHOBANIAN

S u m m a r y

By local solution of a plane problem in the elasticity theory the behaviour of the stress field is investigated in the vicinity of the junction surface brink when displacements on the external surface near the brink are equal to zero.

The problem is reduced to the finding of a proper value for a multipoint non-autoconjugate boundary problem for a linear ordinary differential equation.

The calculation is performed for three value combination series of elastic characteristics and for the angles between the junction surface and the outer surface of a composite body. The calculation shows that in the vicinity of the junction surface brink, extending to the smooth portion of the composite body surface, the stresses, on nearing

the brink, may attenuate or increase for the two particular materials, depending on the magnitude of their associated angles.

In the case of a projecting brink the concentration of stresses is probable while with an entering brink the stressed condition may occur, attenuating on nearing the brink. The values are obtained for the bounds of domains of the problem parameters change, when the small stress conditions of the junction surface brink are satisfied.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Saint-Venant*. Exemples du calcul de la torsion des prismes à base mixtiligne. *Compt. Rend.* 87, 1878, 893–899.
2. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. Изд. „Наука“, М., 1966.
3. *Майнарадзе А. Г.* Основные задачи плоской теории упругости для контуров с угловыми точками. Докл. АН СССР, т. XVI, № 3, 1937, 157–161.
4. *Williams M. L.* Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plates in extension. *J. of Appl. Mech.*, v. 19, 1952.
5. *Уфлянд Я. С.* Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Изд. АН СССР, М.—Л., 1963.
6. *Белоносов С. М.* Основные плоские статические задачи теории упругости для односвязных и двусвязных областей. Изд. Сиб. отд. АН СССР, 1962.
7. *Каландия А. И.* Замечания об особенностях упругих решений вблизи углов. Прикладная математика и механика (ПММ), т. 33, вып. 1, 1969, 132–134.
8. *Williams and Zak A.* Crack point stress singularities at a bimaterial interface. *J. of Appl. Mech.*, v. 30, № 1, 1963.
9. *Чобанян К. С.* Способ повышения вибропрочности соединения. Авт. сб. 307869 „Бюллетень открытия, изобретения . . .“, № 21, 1971.
10. *Боджи Д.* Действие касательных и нормальных нагрузок на прямоугольные упругие клинья, выполненные из разных материалов и соединенные по граням. ПМ, Тр. ASME, т. 35, серия E, № 3, 1968.
11. *Чобанян К. С., Геворкян С. Х.* Поведение поля напряжений около угловой точки линии раздела в задаче плоской деформации составного упругого тела. Изв. АН АрмССР, Механика, т. XXIV, № 5, 1971.
12. *Чобанян К. С.* О функции напряжений для плоской задачи теории упругости составных тел. Докл. АН АрмССР, т. XXXII, № 2, 1961.
13. *Ду-Цин-Хуа.* Плоская задача теории упругости неоднородной изотропной среды. Проблемы механики сплошной среды. К семидесятилетию акад. Н. И. Мусхелишвили. Изд. АН СССР, М., 1961.
14. *Келдыш М. В.* О собственных значениях и собственных функциях некоторых несамосопряженных уравнений. Докл. АН СССР, т. 77, № 1, 1951.
15. *Гохберт И. Ц. и Крейн М. Г.* Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов. Изд. „Наука“, М., 1965.
16. *Визитей В. Н. и Маркус А. С.* О сходимости кратных разложений по системе собственных и присоединенных векторов операторного пучка. Мат. сборник, 66, 2(108), 1965.