

Р. Ш. СОЛОМОНЯН

### НЕСТАЦИОНАРНЫЙ СКОС ПОТОКА ЗА ТРЕУГОЛЬНЫМ КРЫЛОМ ПРИ СВЕРХЗВУКОВОМ ДВИЖЕНИИ

Вопрос определения аэродинамических характеристик хвостового оперения летательного аппарата имеет большое практическое значение как с точки зрения управления летательными аппаратами, так и с точки зрения аэроупругости.

При определении аэродинамических сил и моментов хвостового оперения возникает вопрос нахождения скоса потока за крылом. Эта задача в частных случаях рассмотрена в работах [5, 7] и др., а общая постановка дана Н. Н. Кислягиным [3].

В настоящей статье даются формулы для вычисления скоса потока при общей постановке задачи для крыла треугольной формы в плане, имеющего сверхзвуковые передние кромки.

Пусть тонкое слабоизогнутое треугольное крыло движется в идеальной сжимаемой жидкости с малым углом атаки и с некоторым углом скольжения  $\beta_0$ . Будем считать, что основное движение крыла является прямолинейным поступательным с постоянной сверхзвуковой скоростью  $U$ . Предположим также, что, кроме основного движения, крыло совершает малые добавочные колебания.

Скос потока представим через коэффициенты вращательных производных [2, 3] и воспользуемся формулами вычисления этих коэффициентов [2], которые для случая малых чисел Струхала имеют вид:

$$\theta_{\nu}^{(i)}(x, y) = \frac{1}{\pi^2} \left\{ -\frac{1}{2} V. p. \int_{\bar{\chi}(x)}^y \frac{f_{\nu}^{(i)}[\bar{\chi}(\eta), \eta] d\eta}{\sqrt{y-\eta}^3 \sqrt{x-\bar{\chi}(\eta)}} + \right. \\ \left. + \int_{\bar{\chi}(x)}^y \int_{\bar{\chi}(\eta)}^x \frac{1}{\sqrt{(x-\xi)(y-\eta)}} \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} f_{\nu}^{(i)}(\xi, \eta) d\xi d\eta \right\} \quad (1)$$

(i = 1, 2; ν = 1, 3, 4)

Формула (1) написана в безразмерных характеристических координатах  $x, y$ , которые связаны с декартовыми координатами  $x_1, y_1$  (фиг. 1) следующим образом:

$$x = \frac{2}{lk} x_1 - \frac{2}{l} y_1, \quad y = \frac{1}{lk} x_1 + \frac{2}{l} y_1 \quad (2)$$

где  $k = \sqrt{M^2 - 1}$ ,  $M = \frac{U}{a}$  — число Маха,  $a$  — скорость звука в невозмущенном потоке,  $l$  — характерный линейный размер (размах) крыла.

В формуле (1) знак  $V.p. \int_a^b$  означает главное значение интеграла по Адамару [4],  $y = \chi(x)$  есть уравнение задней кромки крыла,  $x = \bar{\chi}(y)$  — уравнение той же кромки крыла, решенное относительно переменной  $x$ . Функции  $f_v^{(i)}(x, y)$  ( $i = 1, 2$ ;  $v = 1, 3, 4$ ) выражаются формулами

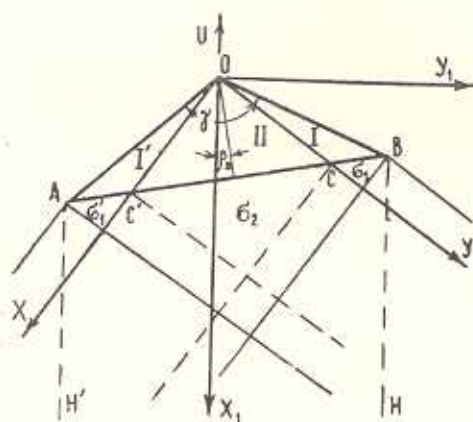
$$f_v^{(1)}(x, y) = - \int_{s_0+s_1}^b \int_{s_0+s_1}^b \frac{B_v^{(1)}(\xi, \eta) d\xi d\eta}{V(x-\xi)(y-\eta)} + A_v^{(1)}(x, y) \quad (3)$$

$$f_v^{(2)}(x, y) = \frac{\lambda}{8} \left( k + \frac{1}{k} \right) \int_{s_0+s_1}^b \int_{s_0+s_1}^b B_v^{(1)}(\xi, \eta) \frac{x-\xi+y-\eta}{V(x-\xi)(y-\eta)} d\xi d\eta + A_v^{(2)}(x, y), \quad (v = 1, 3, 4) \quad (4)$$

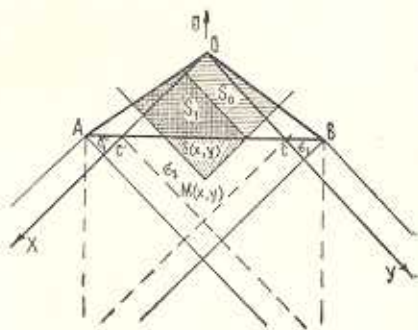
где  $B_v^{(1)}(x, y)$  заданы условием плавного обтекания крыла и имеют следующие значения [2]:

$$B_1^{(1)}(x, y) = -1; \quad B_3^{(1)}(x, y) = -\frac{\lambda}{8}(x-y); \quad B_4^{(1)}(x, y) = -\frac{\lambda k}{8}(x+y)$$

$\lambda = \frac{l^2}{S}$  — относительное удлинение,  $S$  — площадь крыла.



Фиг. 1



Фиг. 2

Уравнения кромок крыла будут (фиг. 1):

$$y = -\alpha_0^2 x \text{ — правой передней кромки,}$$

$$y = -\alpha_1^2 x \text{ — левой передней кромки,}$$

$$y = -\beta^2 x + e = \chi(x) \text{ — задней кромки,}$$

где угловые коэффициенты и число  $e$  выражаются через геометрические параметры крыла и число Маха

$$\alpha_0^2 = -\frac{1 + k \operatorname{tg}(\gamma - \beta_0)}{1 - k \operatorname{tg}(\gamma - \beta_0)}, \quad \alpha_1^2 = -\frac{1 - k \operatorname{tg}(\gamma + \beta_0)}{1 + k \operatorname{tg}(\gamma + \beta_0)}$$

$$\beta^2 = -\frac{1 + k \operatorname{ctg} \beta_0}{1 - k \operatorname{ctg} \beta_0}, \quad e = -\frac{8 \sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \beta_0}}{\lambda (1 - k \operatorname{ctg} \beta_0)}$$

Волнами возмущений, исходящими из точки  $O$ , крыло делится на три области (I, II и I'), а задняя кромка—на три отрезка  $BC$ ,  $CC'$  и  $C'A$  с различными аналитическими выражениями для потенциалов.

В формулах (3) и (4) функции  $A_0^{(i)}(x, y)$  являются значениями потенциалов возмущенных скоростей на указанных отрезках. Для вычисления этих функций при малых числах Струхала пользуемся формулами, имеющимися в работе [2].

Для крыла треугольной формы в плане, когда точка  $M$  расположена в области  $\tau_2$  (фиг. 2), функции  $f_j^{(i)}(x, y)$  имеют следующие выражения:

$$f_1^{(1)}(x, y) = -\frac{\pi}{\beta} Z_2(x, y) + \sum_{j=0}^1 g_{i,j}^{(1,1)} \left\{ Z_j \left[ \frac{\pi}{2} + (-1)^j \psi_j \right] - \frac{Q_{1j}}{\gamma} \left[ \frac{\pi}{2} + (-1)^j \bar{\psi}_j \right] \right\} \quad (5)$$

$$f_3^{(1)}(x, y) = -\frac{\lambda \pi}{8} \left[ \frac{e - \nabla x}{\beta} Z_2(x, y) - \frac{1 + 3\beta^2}{4\beta^3} Z_2^2(x, y) \right] +$$

$$+ \sum_{j=0}^1 \sum_{n=0}^1 g_{3,j}^{(1,2-n)} \left\{ Z_j^{2-n} y^n \left[ \frac{\pi}{2} + (-1)^j \psi_j \right] - \frac{1}{\nabla^2} Q_{1,j}^n(0) Q_{i,j}^{2-n} \left[ \frac{\pi}{2} + (-1)^j \bar{\psi}_j \right] \right\} +$$

$$+ \sum_{n=0}^1 [b_{n,1-n}^{(1)} x^{n+\frac{1}{2}} y^{\frac{3}{2}-n} + p_n^{(1)}(y-x)^n R(x, y)] \quad (6)$$

$$f_4^{(1)}(x, y) = \frac{\lambda k \pi}{8} \left[ \frac{3\beta^2 - 1}{4\beta^3} Z_2^2(x, y) + \frac{e + (1 - \beta^2)x}{\beta} Z_2(x, y) \right] +$$

$$+ \sum_{j=0}^1 \sum_{n=0}^1 g_{4,j}^{(1,2-n)} \left\{ Z_j^{2-n} y^n \left[ \frac{\pi}{2} + (-1)^j \psi_j \right] - \frac{1}{\nabla^2} Q_{1,j}^{2-n} Q_{i,j}^n(0) \left[ \frac{\pi}{2} + (-1)^j \bar{\psi}_j \right] \right\} +$$

$$+ \sum_{n=0}^1 [d_{n,1-n}^{(1)} x^{n+\frac{1}{2}} y^{\frac{3}{2}-n} + q_n^{(1)}(y-x)^n R(x, y)] \quad (7)$$

$$f_1^{(2)}(x, y) = -\frac{\lambda M^2 (1 - \beta^2) \pi}{32 \beta^3 k} Z_2^2(x, y) +$$

$$+ \sum_{j=0}^1 g_{1,j}^{(2,2)} \left\{ Z_j^2 \left[ \frac{\pi}{2} + (-1)^j \psi_j \right] - \frac{Q_{1,j}^2}{\nabla^2} \left[ \frac{\pi}{2} + (-1)^j \bar{\psi}_j \right] \right\} +$$

$$+ \sum_{n=0}^1 [a_{n,1-n}^{(2)} x^{n+\frac{1}{2}} y^{\frac{3}{2}-n} + r_n^{(2)} (y-x)^n R(x, y)] \quad (8)$$

$$f_3^{(2)}(x, y) = \frac{\lambda^2 \pi}{64} \left( k + \frac{1}{k} \right) \left\{ \frac{\nabla}{4\beta^3} (e - \nabla x) Z_2^2(x, y) + \frac{\nabla^2}{8\beta^5} Z_2^3(x, y) \right\} +$$

$$+ \sum_{j=0}^1 \sum_{n=0}^{+1} g_{3,j}^{(2,3-n)} \left\{ Z_j^{3-n} y^n \left[ \frac{\pi}{2} + (-1)^j \psi_j \right] - \right.$$

$$\left. - \frac{Q_1^n(0) Q_1^{3-n}}{\nabla^3} \left[ \frac{\pi}{2} + (-1)^j \bar{\psi}_j \right] \right\} +$$

$$+ \sum_{n=0}^2 [b_{n,2-n}^{(2)} x^{n+\frac{1}{2}} y^{\frac{5}{2}-n} + p_n^{(2)} (y-x)^n R(x, y)] \quad (9)$$

$$f_4^{(2)}(x, y) = \frac{\lambda^2 k \pi}{64} \left( k + \frac{1}{k} \right) \left\{ \frac{\nabla}{4\beta^3} [(\beta^2 - 1)x - e] Z_2^2(x, y) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{24\beta^5} (9 + 4\beta^2 - 9\beta^4) Z_2^3(x, y) \right\} +$$

$$+ \sum_{j=0}^1 \sum_{n=0}^1 g_{4,j}^{(2,3-n)} \left\{ Z_j^{3-n} y^n \left[ \frac{\pi}{2} + (-1)^j \psi_j \right] - \right.$$

$$\left. - \frac{Q_{1,j}^{3-n} Q_1^n(0)}{\nabla^3} \left[ \frac{\pi}{2} + (-1)^j \bar{\psi}_j \right] \right\} +$$

$$+ \sum_{n=0}^2 [d_{n,2-n}^{(2)} x^{n+\frac{1}{2}} y^{\frac{5}{2}-n} + q_n^{(2)} (y-x)^n R(x, y)] \quad (10)$$

В формулах (5)–(10) и для дальнейших расчетов, с целью сокращения записи, введены следующие обозначения функций

$$Z_j = y + \alpha_j^2 x, \quad Z_2(x, y) = y + \beta^2 x - e, \quad Z_3 = y - \beta^2 x + e$$

$$Q_{0,j} = Q_0(y, \alpha_j) = \Delta_j y + \alpha_j^2 e, \quad \bar{\gamma}_j(y) = \frac{1}{\beta^2} (e - y)$$

$$Q_{1,j} = Q_1(x, y, \alpha_j) = \Delta_j (y - x) + (1 + \alpha_j^2) e$$

$$Q_1(0) = Q_1(x, y, 0) = \beta^2 (y - x) + e$$

$$Q_{2,j} = Q_2(x, \alpha_j) = -\Delta_j x + e$$

$$Q_{3,j} = Q_3(x, \alpha_j) = -\Delta_j x + (\alpha_j^2 + \beta^2) e$$

$$\Omega_j = \Omega(x, \alpha_j) = \alpha_j^2 (37\beta^2 x + 14e)$$

$$\psi_{1,j} = \psi_1(x, y, \alpha_j) = \arcsin \frac{y - \alpha_j^2 x}{y + \alpha_j^2 x}, \quad \bar{\psi}_{0,j} = \bar{\psi}_{0,j} = \frac{\pi}{2}$$

$$\bar{\psi}_{1,j} = \bar{\psi}_1(x, y, \alpha_j) = \arcsin \frac{(\beta^2 + \alpha_j^2)(y - x) + (1 - \alpha_j^2)e}{\Delta_j(y - x) + (1 + \alpha_j^2)e}$$

$$C(y, \alpha_j) = \arcsin \frac{(\alpha_j^2 + \beta^2)y - \alpha_j^2 e}{\Delta_j y + \alpha_j^2 e}$$

$$R(x, y) = \sqrt{e^2 + (\beta^2 - 1)e(y - x) - \beta^2(y - x)^2}$$

$$R_1(x, y, \alpha_j) = \arcsin \sqrt{\frac{y(y + \beta^2 x - e)}{(e - y)(y + \alpha_j^2 x)}}$$

$$R_2(x, y) = \arcsin \sqrt{\frac{y + \beta^2 x - e}{e - y}}$$

Ниже приводятся значения коэффициентов, участвующие в расчетах, которые зависят только от геометрических характеристик крыла ( $\alpha_0, \alpha_1, \beta, \lambda$ ) и числа Маха.

$$\gamma_1 = \alpha_0^2 \alpha_1^2, \quad \gamma_2 = \alpha_0^2 - \alpha_1^2, \quad \gamma_3 = \alpha_0^2 + \alpha_1^2, \quad \Delta_j = \beta^2 - \alpha_j^2, \quad \nabla = 1 + \beta^2$$

$$g_{1,j}^{(1,1)} = \frac{1}{\alpha_j}, \quad g_{1,j}^{(2,2)} = -\frac{\lambda M^2}{32k} \frac{1 + \alpha_j^2}{\alpha_j^3}, \quad g_{3,j}^{(1,1)} = -\frac{\lambda(1 + \alpha_j^2)}{8\alpha_j^3}$$

$$g_{3,j}^{(1,2)} = \frac{\lambda(3 + \alpha_j^2)}{32\alpha_j^3}, \quad g_{3,j}^{(2,2)} = \frac{\lambda^2 M^2}{256k} \frac{(1 + \alpha_j^2)^2}{\alpha_j^5}, \quad g_{3,j}^{(2,3)} = -\frac{\lambda^2 M^2 (1 + \alpha_j^2)^2}{512k \alpha_j^5}$$

$$g_{4,j}^{(1,1)} = -\frac{\lambda k (1 - \alpha_j^2)}{8\alpha_j^3}, \quad g_{4,j}^{(1,2)} = \frac{\lambda k}{32} \frac{3 - \alpha_j^2}{\alpha_j^3}, \quad g_{4,j}^{(2,2)} = \frac{\lambda^2 M^2}{256} \frac{\alpha_j^4 - 1}{\alpha_j^5}$$

$$g_{4,j}^{(2,3)} = -\frac{\lambda^2 M^2 (3\alpha_j^4 - 4\alpha_j^2 - 3)}{1536 \alpha_j^5}, \quad (j = 0, 1)$$

$$a_{1,0}^{(2)} = \frac{\gamma_2 M^2 \lambda}{16k}, \quad a_{0,1}^{(2)} = \frac{\lambda \gamma_2 M^2}{16 \gamma_1 k}, \quad b_{1,0}^{(1)} = \frac{\lambda \gamma_2}{16}, \quad b_{0,1}^{(1)} = -\frac{\lambda \gamma_2}{16 \gamma_1}$$

$$b_{2,0}^{(2)} = \frac{\lambda^2 M^2}{256k} \gamma_2 (2 + \gamma_3), \quad b_{1,1}^{(2)} = -\frac{\lambda^2 M^2 \gamma_2}{384 k \gamma_1} (1 - \gamma_1)$$

$$b_{0,2}^{(2)} = -\frac{\lambda^2 M^2 \gamma_2}{256 k \gamma_1^2} (\gamma_3 + 2\gamma_1), \quad d_{1,0}^{(1)} = \frac{\lambda k \gamma_2}{16}, \quad d_{0,1}^{(1)} = \frac{\lambda k \gamma_2}{16 \gamma_1}$$

$$d_{2,0}^{(2)} = \frac{\lambda^2 M^2}{768} \gamma_2 (4 - 3\gamma_3), \quad d_{1,1}^{(2)} = -\frac{\lambda^2 M^2 \gamma_2}{384 \gamma_1} (1 + \gamma_1)$$

$$d_{0,2}^{(2)} = \frac{\lambda^2 M^2 \gamma_2}{768 \gamma_1^2} (4\gamma_1 - 3\gamma_3), \quad p_0^{(1)} = \frac{\lambda \gamma_2}{16 \nabla^2 \gamma_1} (1 - \gamma_1) e$$

$$p_1^{(1)} = \frac{\lambda \gamma_2 (\beta^2 + \gamma_3)}{16 \nabla^2 \gamma_1}$$

$$\begin{aligned}
 p_0^{(2)} &= \frac{\lambda^2 \gamma_2 M^2}{768 \gamma_1^2 k \nabla^3} [-3\gamma_1^2(2 + \gamma_3) + 2\gamma_1(1 - \gamma_1) + 3(2\gamma_1 + \gamma_3)] e^2 \\
 p_1^{(2)} &= -\frac{\lambda^2 M^2 \gamma_2}{768 k \gamma_1^2 \nabla^3} [6\gamma_1^2(2 + \gamma_3) + 2(\beta^2 - 1)(1 - \gamma_1)\gamma_1 + 6\beta^2(2\gamma_1 + \gamma_3)] e \\
 p_2^{(2)} &= -\frac{\lambda^2 M^2 \gamma_2}{768 k \gamma_1^2 \nabla^3} [3\gamma_1^2(2 + \gamma_3) + 2\beta^2\gamma_1(1 - \gamma_1) - 3(2\gamma_1 + \gamma_3)\beta^2] \\
 q_0^{(1)} &= \frac{\lambda k \gamma_2}{16 \gamma_1 \nabla^2} (1 + \gamma_1) e, \quad q_1^{(1)} = \frac{\lambda k \gamma_2}{16 \gamma_1 \nabla^2} (\beta^2 - \gamma_1) \\
 q_0^{(2)} &= -\frac{\lambda^2 M^2 \gamma_2}{768 \gamma_1^2 \nabla^3} [\gamma_1^2(4 - 3\gamma_3) - 2\gamma_1(1 + \gamma_1) + (4\gamma_1 - 3\gamma_3)] e^2 \\
 q_1^{(2)} &= \frac{\lambda^2 M^2 \gamma_2}{768 \gamma_1^2 \nabla^3} [2\gamma_1^2(4 - 3\gamma_3) - 2\gamma_1(1 + \gamma_1)(1 - \beta^2) - 2\beta^2(4\gamma_1 - 3\gamma_3)] e \\
 q_2^{(2)} &= -\frac{\lambda^2 M^2 \gamma_2}{768 \gamma_1^2 \nabla^3} [\gamma_1^2(4 - 3\gamma_3) + 2\beta^2\gamma_1(1 + \gamma_1) + \beta^4(4\gamma_1 - 3\gamma_3)] \\
 r_0^{(2)} &= -\frac{\lambda M^2}{16k} \gamma_2 \frac{1 + \gamma_1}{\nabla^2 \gamma_1} e, \quad r_1^{(2)} = -\frac{\lambda M^2}{16k} \gamma_2 \frac{\beta^2 - \gamma_1}{\nabla^2 \gamma_1} \\
 &\quad \omega_j = 3e\beta^2 - 14\alpha_j^2
 \end{aligned}$$

Подставляя в формулу (2) значения функций  $f_j^{(i)}(x, y)$  из (5)–(10) и выполняя интегрирование, получим выражения для  $\theta_j^{(i)}(x, y)$  в следующем виде:

$$\begin{aligned}
 \theta_1^{(1)}(x, y) &= -1 + \frac{1}{\pi^2} \sum_{j=0}^1 g_{1,j}^{(1,1)} \left\{ F_{0,j}^{(0,1)}(x, y) + (-1)^j F_{1,j}^{(0,1)}(x, y) - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{\nabla} [L_{0,j}^{(0,1)}(x, y) + (-1)^j L_{1,j}^{(0,1)}(x, y)] \right\} \quad (11)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \theta_3^{(1)}(x, y) &= \frac{\lambda}{8} \left[ \frac{1 + 3\beta^2}{2\beta^2} Z_2(x, y) + (e - \nabla x) + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{\pi^2} \sum_{j=0}^1 \sum_{n=0}^1 g_{3,j}^{(1,2-n)} \left\{ F_{0,j}^{(n,2-n)}(x, y) + (-1)^j F_{1,j}^{(n,2-n)}(x, y) - \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \frac{1}{\nabla^2} [L_{0,j}^{(n,2-n)}(x, y) + (-1)^j L_{1,j}^{(n,2-n)}(x, y)] \right\} + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{\pi^2} \sum_{n=0}^1 [b_{n,1-n}^{(1)} H_{n,1-n}(x, y) + p_n^{(1)} N_n(x, y)] \right] \quad (12)
 \end{aligned}$$

$$\theta_4^{(1)}(x, y) = -\frac{\lambda k}{8} \left\{ \frac{3\beta^2 - 1}{4\beta^2} Z_2(x, y) + (1 - \beta^2)x + e \right\} +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{\pi^2} \sum_{j=0}^1 \sum_{n=0}^1 g_{4,j}^{(1, 2-n)} \left\{ F_{0,j}^{(n, 2-n)}(x, y) + (-1)^j F_{1,j}^{(n, 2-n)}(x, y) - \right. \\
& \quad \left. - \frac{1}{\nabla^2} [L_{0,j}^{(n, 2-n)}(x, y) + (-1)^j L_{1,j}^{(n, 2-n)}(x, y)] \right\} + \\
& \quad + \frac{1}{\pi^2} \sum_{n=0}^1 [d_{n,1-n}^{(1)} H_{n,1-n}(x, y) + q_n^{(1)} N_n(x, y)] \quad (13)
\end{aligned}$$

$$\theta_1^{(2)}(x, y) = - \frac{\lambda M^2 (1 - \beta^2)}{32 \beta^4 k} Z_2^2(x, y) +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{\pi^2} \sum_{j=0}^1 g_{1,j}^{(2, 2)} \left\{ F_{0,j}^{(0, 2)}(x, y) + (-1)^j F_{1,j}^{(0, 2)}(x, y) - \right. \\
& \quad \left. - \frac{1}{\nabla^2} [L_{0,j}^{(0, 2)}(x, y) + (-1)^j L_{1,j}^{(0, 2)}(x, y)] \right\} + \\
& \quad + \frac{1}{\pi^2} \sum_{n=0}^1 [a_{n,1-n}^{(2)} H_{n,1-n}(x, y) + r_n^{(2)} N_n(x, y)] \quad (14)
\end{aligned}$$

$$\theta_3^{(2)}(x, y) = \frac{\lambda}{8} \left[ \frac{\nabla}{2\beta^2} (e - \nabla x) Z_2(x, y) + \frac{3}{8} \frac{\nabla^2}{\beta^4} Z_2^2(x, y) \right] +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{\pi^2} \sum_{j=0}^1 \sum_{n=0}^1 g_{3,j}^{(2, 3-n)} \left\{ F_{0,j}^{(n, 3-n)}(x, y) + (-1)^j F_{1,j}^{(n, 3-n)}(x, y) - \right. \\
& \quad \left. - \frac{1}{\nabla^3} [L_{0,j}^{(n, 3-n)}(x, y) + (-1)^j L_{1,j}^{(n, 3-n)}(x, y)] \right\} + \\
& \quad + \frac{1}{\pi^2} \sum_{n=0}^2 [b_{n,2-n}^{(2)} H_{n,2-n}(x, y) + p_n^{(2)} N_n(x, y)] \quad (15)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\theta_4^{(2)}(x, y) = \frac{\lambda k}{8} \left\{ \frac{\nabla}{2\beta^2} [(\beta^2 - 1)x - e] Z_2(x, y) + \right. \\
\left. + \frac{1}{8\beta^4} (9 + 4\beta^2 - 9\beta^4) Z_2^2(x, y) \right\} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{\pi^2} \sum_{j=0}^1 \sum_{n=0}^1 g_{4,j}^{(2, 3-n)} \left\{ F_{0,j}^{(n, 3-n)}(x, y) + (-1)^j F_{1,j}^{(n, 3-n)}(x, y) - \right. \\
& \quad \left. - \frac{1}{\nabla^3} [L_{0,j}^{(n, 3-n)}(x, y) + (-1)^j L_{1,j}^{(n, 3-n)}(x, y)] \right\} + \\
& \quad + \frac{1}{\pi^2} \sum_{n=0}^2 [d_{n,2-n}^{(2)} H_{n,2-n}(x, y) + q_n^{(2)} N_n(x, y)] \quad (16)
\end{aligned}$$

В формулах (11)–(16) для скосов потока  $\theta_{\zeta}^{(i)}(x, y)$  входят функции

$$F_{l,l}^{(n,m)}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \int_{\chi(x)}^y \frac{d\eta}{V y - \eta} \frac{\partial}{\partial x} \int_{\bar{\chi}(\eta)}^x \frac{\eta^n Z_l^m}{V x - \xi} \psi_l(\xi, \eta, \alpha_j) d\xi$$

$$(n = 0, 1; m = 1, 2, 3; l = 0, 1)$$

$$L_{l,l}^{(n,m)}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \int_{\chi(x)}^y \frac{d\eta}{V y - \eta} \frac{\partial}{\partial x} \times$$

$$\times \int_{\bar{\chi}(\eta)}^x \frac{Q_l^n(\xi, \eta, 0) Q_l^m(\xi, \eta, \alpha_j)}{V x - \xi} \psi_l(\xi, \eta, \alpha_j) d\xi$$

$$H_{n,m}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \int_{\chi(x)}^y \frac{\eta^m V \bar{\eta} d\eta}{V y - \eta} \frac{\partial}{\partial x} \int_{\bar{\chi}(\eta)}^x \frac{\xi^n V \bar{\xi} d\xi}{V x - \xi}, \quad (n, m = 0, 1, 2)$$

$$N_n(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \int_{\chi(x)}^y \frac{d\eta}{V y - \eta} \frac{\partial}{\partial x} \int_{\bar{\chi}(\eta)}^x \frac{(\eta - \xi)^n R(\xi, \eta) d\xi}{V x - \xi}$$

которые, после выполнения действий в правых частях, имеют вид

$$F_{0,j}^{(0,1)}(x, y, \alpha_j) = \frac{\pi^2 (\alpha_j^2 + \beta^2)}{4 \beta \alpha_j} \quad (17)$$

$$F_{0,j}^{(0,2)}(x, y, \alpha_j) = \frac{\pi^2}{8 \beta^3} \{ [4(2\beta^2 + \Delta_j) \alpha_j^2 - 3\Delta_j^2] y +$$

$$+ \beta^2 [\Delta_j^2 + 4\alpha_j^2(\beta^2 + \alpha_j^2)] x - \Delta_j^2 e \} \quad (18)$$

$$F_{0,j}^{(0,3)}(x, y, \alpha_j) = \frac{3\pi^2}{32\beta^3} \{ -\Delta_j^3(4y^2 + Z_3^2) - 4\alpha_j^2 \Delta_j^2 e(2y +$$

$$+ Z_3) + 8\alpha_j^4 \Delta_j e^2 + 6\alpha_j^2 Q_{0,j}^2 + 4\alpha_j^2 \beta^2 Q_{0,j} Q_{2,j} +$$

$$+ 6\alpha_j^2 \beta^4 Q_{2,j}^2 + 24\alpha_j^2 \beta^2 Z_2(x, y)(\beta^2 Q_{2,j} + 3Q_{0,j}) + 16\alpha_j^4 \beta^2 Z_2^2(x, y) \} \quad (19)$$

$$F_{0,j}^{(1,1)}(x, y, \alpha_j) = -\frac{\pi^2}{8\beta} (3\Delta_j y - \beta^2 \Delta_j x + \beta^2 e - 3\alpha_j^2 e) +$$

$$+ \frac{\pi^2 \alpha_j^2}{4\beta} [2y + Z_2(x, y)] \quad (20)$$

$$F_{0,j}^{(1,2)}(x, y, \alpha_j) = -\frac{3\pi^2 \Delta_j}{32\beta^3} (4y^2 + Z_3^2) + \frac{\pi^2 \alpha_j^2}{4\beta^3} Z_2(x, y) \times$$

$$\times [(\alpha_j^2 - 4\Delta_j) \beta^2 x + (5\beta^2 + \Delta_j) y + (\beta^2 + 2\alpha_j^2) e] +$$



$$+ \frac{\pi^2 \alpha_j^2}{4\beta^3} [4\beta^4 (\Delta_j x - e) x + 5\alpha_j^2 e^2] \quad (21)$$

$$L_{0,j}^{(0,1)}(x, y, \alpha_j) = -\frac{\Delta_j \pi^2}{4\alpha_j \beta} + \frac{\pi^2 \Delta_j}{2\nabla \alpha_j \beta} (y + \beta^2 x - e) \quad (22)$$

$$L_{0,j}^{(0,2)}(x, y, \alpha_j) = -\frac{\pi^2 \Delta_j}{8\beta^3} \{ \Delta_j (3\nabla^2 + 12\nabla - 8) y - \Delta_j (\nabla^2 - 4\nabla + 8) \beta^2 x + [\nabla^2 (\beta^2 - 5\alpha_j^2) + 4\beta^2 (1 - \beta^2) + 4\alpha_j^2 (1 + 3\beta^2)] e \} \quad (23)$$

$$L_{0,j}^{(0,3)}(x, y) = -\frac{3\pi^2 \nabla^3 \Delta_j}{32\beta^5} \{ \Delta_j^2 (4y^2 + Z_3^2) + 4\alpha_j^2 \Delta_j e (2y + Z_3) - 8\alpha_j^4 e^2 \} - \frac{3\pi^2}{16\beta^5} \Delta_j [8\beta^4 Q_0^2(y, \alpha_j) + 2\beta^2 (3 + 2\beta^2) \Delta_j Q_0(y, \alpha_j) \times \\ \times Z_2(x, y) + \Delta_j^2 (3\beta^4 + 4\beta^2 + 3) Z_2^2(x, y) + 8\beta^4 Q_0(y, \alpha_j) Q_2(x, \alpha_j) + \\ + 8\beta^4 \nabla Q_2^2(x, \alpha_j) + 2\beta^2 (2\nabla - 1)(\nabla + 3) \Delta_j Q_2(x, \alpha_j) Z_2(x, y)] \quad (24)$$

$$L_{0,j}^{(1,1)}(x, y) = -\frac{\pi^2 \nabla^2}{8\beta} [\Delta_j (2y + Z_3) - 2\alpha_j^2 e] - \frac{\pi^2}{4\beta} Z_2(x, y) \times \\ \times [(3\nabla - 2) \Delta_j y - \Delta_j \nabla \beta^2 x + (\beta^4 + \alpha_j^2 \beta^2 + \Delta_j) e] \quad (25)$$

$$L_{0,j}^{(1,2)}(x, y) = -\frac{\pi^2 \nabla^3}{32\beta^3} [3\Delta_j^2 [4y^2 + Z_3^2] + 8\Delta_j \alpha_j^2 e [2y + Z_3] - 8\alpha_j^4 e^2] - \frac{3\pi^2}{16\beta^3} \Delta_j^2 \nabla (4 - \nabla) Z_2^2(x, y) - \frac{\pi^2}{2\beta^3} [\Delta_j (2\nabla - 1) \times \\ \times [3\beta^2 Q_{1,j} - \alpha_j^2 \nabla e] Z_2(x, y) + 3\beta^4 [Q_0(y, \alpha_j) - \Delta_j Z_2(x, y)] Q_0(y, \alpha_j) + \\ + 3\beta^4 [Q_{1,j} + \beta^2 Q_2(x, \alpha_j)] Q_2(x, \alpha_j) - \alpha_j^2 e \nabla [Q_{1,j} + \nabla Q_2(x, \alpha_j)]] \quad (26)$$

$$F_{1,j}^{(0,1)}(x, y, \alpha_j) = -\frac{1}{2\beta} V. p. \int_{\chi(x)}^y \frac{Q_0(\eta, \alpha_j) C(\eta, \alpha_j) d\eta}{V y - \eta^3 V \eta + \beta^2 x - e} - J_1 + \\ + \frac{\alpha_j^2}{\beta} \int_{\chi(x)}^y \frac{C(\eta, \alpha_j) d\eta}{V y - \eta V Z_2(x, \eta)} \quad (27)$$

$$-2\alpha_j \int_{\chi(x)}^y \frac{R_1(x, \eta, \alpha_j) d\eta}{V y - \eta V \eta + \alpha_j^2 x} + \alpha_j \int_{\chi(x)}^y \frac{R_2(x, \eta) d\eta}{V \eta (y - \eta)}$$

$$F_{1,j}^{(0,2)}(x, y, \alpha_j) = -\frac{1}{2\beta^3} V. p. \int_{\chi(x)}^y \frac{Q_0^2(\eta, \alpha_j) C(\eta, \alpha_j) d\eta}{V y - \eta^3 V \eta + \beta^2 x - e} - \\ - \frac{1}{2\beta^3} [(\alpha_j^2 + 2\beta^3) J_2 - \alpha_j^2 [3\chi(x) + e] J_1 + 3\alpha_j^2 e \chi(x) J_0] +$$

$$+ \frac{2\alpha_j^2}{\beta^3} \int_{\lambda(x)}^y [Q_0(\eta, \alpha_j) + 2\beta^2 Z_2(x, \eta)] \frac{C(\eta, \alpha_j) d\eta}{V y - \eta V Z_2(x, \eta)} + \quad (28)$$

$$+ \frac{\alpha_j}{2} \int_{\lambda(x)}^y \frac{10\eta + 3\alpha_j^2 x}{V(y - \eta)\eta} R_2(x, \eta) d\eta -$$

$$- 8\alpha_j \int_{\lambda(x)}^y \sqrt{\frac{\eta + \alpha_j^2 x}{y - \eta}} R_1(x, \eta, \alpha_j) d\eta$$

$$F_{1,j}^{(0,3)}(x, y, \alpha_j) = -\frac{1}{2\beta^5} V.p. \int_{\lambda(x)}^y \frac{Q_0^3(\eta, \alpha_j) C(\eta, \alpha_j) d\eta}{V y - \eta^3 V Z_2(x, \eta)} +$$

$$+ \frac{\alpha_j^2}{\beta^5} \int_{\lambda(x)}^y [3Q_0^2(\eta, \alpha_j) + 12\beta^2 Q_0(\eta, \alpha_j) Z_2(x, \eta) +$$

$$+ 8\alpha_j^2 \beta^2 Z_2^2(x, \eta)] \frac{C(\eta, \alpha_j) d\eta}{V y - \eta V Z_2(x, \eta)} +$$

$$+ \frac{\alpha_j}{80} \int_{\lambda(x)}^y [880\eta^2 + 960\alpha_j^2 x \eta + 165\alpha_j^4 x^2] \frac{R_2(x, \eta)}{V \eta (y - \eta)} d\eta -$$

$$- 16\alpha_j \int_{\lambda(x)}^y \sqrt{\frac{(\eta + \alpha_j^2 x)^3}{y - \eta}} R_1(x, \eta) d\eta + \frac{2e\alpha_j^3}{\beta^4} [(3\beta^2 + \alpha_j^2) J_2 +$$

$$+ [3\alpha_j^2 e - (3\beta^2 + 5\alpha_j^2)\lambda(x)] J_1 - \alpha_j^2 \lambda(x) (4\beta^2 x - e) J_0] +$$

$$+ \frac{\alpha_j^3}{80\beta^4} [-5\omega_j J_3 + [4\omega_j (2e - \beta^2 x) - 3\Omega_j(x)] J_2 - [3\omega_j e \lambda(x) -$$

$$- 2\Omega_j(x)(2e - \beta^2 x)] J_1 - e \Omega_j(x) \lambda(x) J_0] +$$

$$+ \frac{\alpha_j}{80} [176 J_3 + 320\alpha_j^2 x J_2 + 165\alpha_j^4 x^2 J_1] - \frac{16}{5} \alpha_j [J_3 +$$

$$+ 2\alpha_j^2 x J_2 + \alpha_j^4 x^2 J_1] - \frac{16\alpha_j^3 e}{5\beta^4} [(\alpha_j^2 + \beta^2) J_2 + [\alpha_j^2 \beta^2 x -$$

$$- (\beta^2 + 2\alpha_j^2) \lambda(x)] J_1 - \alpha_j^2 (2\beta^2 x - e) \lambda(x) J_0] \quad (29)$$

$$F_{1,j}^{(1,1)}(x, y, \alpha_j) = -\frac{1}{2\beta} V.p. \int_{\lambda(x)}^y \frac{\eta Q_0(\eta, \alpha_j) C(\eta, \alpha_j)}{V y - \eta^3 V Z_2(x, \eta)} d\eta +$$

$$+ 3\alpha_j \int_{\lambda(x)}^y \sqrt{\frac{\eta}{y - \eta}} R_2(x, \eta) d\eta +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\alpha_j^2}{\beta} \int_{\chi(x)}^y \frac{3\eta + 2\beta^2 x - 2e}{V y - \eta} \frac{C(\eta, \alpha_j)}{V Z_2(x, \eta)} d\eta - \alpha_j J_2 - \\
& - 2\alpha_j \int_{\chi(x)}^y \frac{(3\eta + 2\alpha_j^2 x) R_1(x, \eta, \alpha_j)}{V(y - \eta)(\eta + \alpha_j^2 x)} d\eta \quad (30)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_{1,j}^{(1,2)}(x, y, \alpha_j) = & - \frac{1}{2\beta^3} V. p. \int_{\chi(x)}^y \frac{\eta Q_0^2(\eta, \alpha_j) C(\eta, \alpha_j)}{V y - \eta^3 V Z_2(x, \eta)} d\eta + \\
& + \frac{2\alpha_j^2}{\beta^3} \int_{\chi(x)}^y [Q_0(\eta, \alpha_j) + 2\beta^2 Z_2(x, \eta)] \frac{\eta C(\eta, \alpha_j) d\eta}{V(y - \eta) Z_2(x, \eta)} + \\
& + \frac{\alpha_j}{6} \int_{\chi(x)}^y (50\eta + 27\alpha_j^2 x) R_2(x, \eta) \sqrt{\frac{\eta}{y - \eta}} d\eta - \\
& - \frac{8\alpha_j}{3} \int_{\chi(x)}^y (5\eta + 2\alpha_j^2 x) \sqrt{\frac{\eta + \alpha_j^2 x}{y - \eta}} R_1(x, \eta, \alpha_j) d\eta + \\
& + \frac{4\alpha_j^2}{\beta^3} \int_{\chi(x)}^y \left[ Q_0(\eta, \alpha_j) Z_2(x, \eta) + \frac{2}{3} \alpha_j^2 Z_2^2 \right] \sqrt{\frac{Z_2(x, \eta)}{y - \eta}} C(\eta, \alpha_j) d\eta - \\
& - \frac{\alpha_j}{\beta^2} \{ (\alpha_j^2 + \beta^2) J_3 - \alpha_j^2 [e + \chi(x)] J_2 + 2\alpha_j^2 e \chi(x) J_1 \} \quad (31)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L_{1,j}^{(0,1)}(x, y, \alpha_j) = & - \frac{\nabla}{2\beta^3} V. p. \int_{\chi(x)}^y \frac{Q_0(\eta, \alpha_j) C(\eta, \alpha_j) d\eta}{V(y - \eta)^3 Z_2(x, \eta)} - \\
& - \frac{\Delta_j}{\beta} \int_{\chi(x)}^y \frac{C(\eta, \alpha_j) d\eta}{V y - \eta} \frac{1}{V Z_2(x, \eta)} - \frac{3\nabla - 2}{\nabla} \alpha_j e J_0 + \\
& + \frac{2\beta^3}{\Delta} Q_2(x, \alpha_j) J_{-1} - \frac{\Delta_j}{\alpha_j \beta} \int_{\chi(x)}^y \frac{G_1^{(1)}(x, \eta, \alpha_j)}{V y - \eta} d\eta + \\
& + \frac{\alpha_j e \nabla}{2\beta^3} \int_{\chi(x)}^y \frac{G_2^{(0)}(x, \eta, \alpha_j) d\eta}{V y - \eta} \quad (32)
\end{aligned}$$

$$L_{1,j}^{(0,2)}(x, y, \alpha_j) = - \frac{\nabla^2}{2\beta^3} V. p. \int_{\chi(x)}^y \frac{Q_0^2(\eta, \alpha_j) C(\eta, \alpha_j) d\eta}{V y - \eta^3 V Z_2(x, \eta)} -$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{2\Delta_j}{\beta^2} \int_{\lambda(x)}^y [\beta^2 Q_{1,j} + 2\nabla\Delta_j Z_2(x, \eta)] \frac{C(\eta, \alpha_j) d\eta}{V y - \eta V Z_2(x, \eta)} - \\
& - \frac{4\alpha_j e}{3\nabla} [(3\nabla - 2)\Delta_j J_1 + [(3\nabla - 2)e - \nabla Q_2(x, \alpha_j)] J_0 + \\
& + \frac{2\beta^4}{\Delta_j} Q_2^2(x, \alpha_j) J_{-1}] - \frac{\nabla\alpha_j e}{\beta^2} [\nabla J_1 + \alpha_j^2 e J_0] + \\
& + \frac{4}{\beta} \nabla\alpha_j \Delta_j e \int_{\lambda(x)}^y \left\{ I_{-1}^{(1)}(p_2) - \frac{Q_1(x, \eta, \alpha_j)}{2\alpha_j^2 \nabla e} G_1^{(1)}(x, \eta, \alpha_j) - \right. \\
& - \left. \frac{\Delta_j G_1^{(2)}(x, \eta, \alpha_j)}{6\nabla\alpha_j^2 e} \right\} \frac{d\eta}{V y - \eta} - \frac{\alpha_j \nabla e}{2\beta} \int_{\lambda(x)}^y \{2\Delta_j J_0 - Q_1(x, \eta, \alpha_j) \times \\
& \times G_2^{(0)}(x, y, \alpha_j) - \Delta_j G_2^{(1)}(x, \eta, \alpha_j)\} \frac{d\eta}{V y - \eta} \quad (33) \\
L_{1,j}^{(0,3)}(x, y, \alpha_j) = & - \frac{\nabla^3}{2\beta^5} V. p. \int_{\lambda(x)}^y \frac{Q_0^3(\eta, \alpha_j) C(\eta, \alpha_j)}{V y - \eta^3 V Z_2(x, \eta)} d\eta - \\
& - \frac{\Delta_j}{3\beta^5} \int_{\lambda(x)}^y [3\beta^4 Q_1^2(x, \eta, \alpha_j) + 6\beta^2 \Delta_j (2\nabla - 1) Q_1(x, \eta, \alpha_j) Z_2(x, \eta) + \\
& + \Delta_j^2 (4\nabla - 1) Z_2^2(x, \eta)] \frac{C(\eta, \alpha_j) d\eta}{V y - \eta V Z_2(x, \eta)} - \frac{2\alpha_j e}{5\nabla\beta^2} \left\{ 15\beta^4 + \right. \\
& + 10\beta^2 + 3) [\Delta_j^2 J_2 + 2\alpha_j^2 e \Delta_j J_1 + \alpha_j^4 e^2 J_0] - \beta^2 (15\beta^4 - \\
& - 10\beta^2 - 1) Q_2(x, \alpha_j) [\Delta_j J_1 + \alpha_j^2 e J_0] + 4\beta^2 (1 - 5\beta^2) Q_2^2(x, \alpha_j) J_0 + \\
& + \frac{8\beta^6}{\Delta_j} Q_2^3(x, \alpha_j) J_{-1} \left. \right\} - \frac{\alpha_j e}{\beta^2} [\Delta_j^2 (3\nabla - 2) J_2 + 2\Delta_j [2\beta^2 Q_1(x, 0, \alpha_j) - \\
& - \nabla\Delta_j \lambda(x)] J_1 + [\beta^2 Q_1(x, 0, \alpha_j) [Q_1(x, 0, \alpha_j) - 2\Delta_j \lambda(x)] + \Delta_j^2 \lambda(x)] J_0 + \\
& + \frac{\Delta_j}{5\alpha_j \beta} \int_{\lambda(x)}^y [60\nabla\alpha_j^2 e Q_1(x, \eta, \alpha_j) I_{-1}^{(1)}(p_2) + 20\nabla\alpha_j^2 \Delta_j e I_{-1}^{(2)}(p_2) - \\
& - 15Q_1^2(x, \eta, \alpha_j) G_1^{(1)}(x, \eta, \alpha_j) - 10\Delta_j Q_1(x, \eta, \alpha_j) G_1^{(2)}(x, \eta, \alpha_j) - \\
& - 3\Delta_j^2 G_1^{(3)}(x, \eta, \alpha_j)] \frac{d\eta}{V y - \eta} - \frac{\nabla\alpha_j e}{2\beta} \int_{\lambda(x)}^y [4\Delta_j Q_1(x, \eta, \alpha_j) J_0 + \\
& + 4\Delta_j^2 J_1 - Q_1^2(x, \eta, \alpha_j) G_2^{(0)}(x, \eta, \alpha_j) - 2\Delta_j Q_1(x, \eta, \alpha_j) \times
\end{aligned}$$

$$\times G_2^{(1)}(x, \eta, \alpha_j) - \Delta_j^2 G_2^{(2)}(x, \eta, \alpha_j) \left\} \frac{d\eta}{V y - \eta} \quad (34)$$

$$L_{1,j}^{(1,1)}(x, y, \alpha_j) = -\frac{\nabla^2}{2\beta} V. p. \int_{\chi(x)}^y \frac{\eta Q_0(\eta, \alpha_j) C(\eta, \alpha_j)}{V y - \eta^3 V Z_2(x, \eta)} d\eta -$$

$$-\frac{1}{\beta} \int_{\chi(x)}^y \{ [2\beta^2 Q_1(x, \eta, \alpha_j) - \alpha_j^2 \nabla e] + 2(2\nabla - 1) \Delta_j Z_2(x, \eta) \} \times$$

$$\times \frac{C(\eta, \alpha_j) d\eta}{V y - \eta V Z_2(x, \eta)} - \frac{2\beta^2 \alpha_j e}{3\Delta_j \nabla} [2(3\nabla - 4) \Delta_j y + (4 - 3\nabla) [2\beta^2 Q_2(x, \alpha_j) -$$

$$- \alpha_j^2 e] J_0] - \frac{\beta^2}{\Delta_j} Q_2(x, \alpha_j) [4\beta^2 Q_2(x, \alpha_j) - 3\alpha_j^2 \nabla e] J_{-1} \} +$$

$$+ \frac{2}{\beta} \nabla \alpha_j e \int_{\chi(x)}^y \left\{ 2\beta^2 I_{-1}^{(1)}(p_2) - \frac{1}{2\nabla \alpha_j^2} [2\beta^2 Q_1(x, \eta, \alpha_j) -$$

$$- \alpha_j^2 \nabla e] G_1^{(1)}(x, \eta, \alpha_j) \right\} \frac{d\eta}{V y - \eta} - \frac{2\beta \Delta_j}{3\alpha_j} \int_{\chi(x)}^y \frac{G_1^{(2)}(x, \eta, \alpha_j)}{V y - \eta} d\eta -$$

$$- \alpha_j \nabla e J_1 - \frac{\alpha_j \nabla e}{\beta} \int_{\chi(x)}^y \left\{ \beta^2 J_0 - \frac{1}{2} Q_1(x, \eta, 0) G_2^{(0)}(x, \eta, \alpha_j) -$$

$$- \frac{\beta^2}{2} G_2^{(1)}(x, \eta, \alpha_j) \right\} \frac{d\eta}{V y - \eta} \quad (35)$$

$$L_{1,j}^{(1,2)}(x, y, \alpha_j) = -\frac{\nabla^3}{2\beta^3} V. p. \int_{\chi(x)}^y \frac{\eta Q_0^2(\eta, \alpha_j) C(\eta, \alpha_j) d\eta}{V y - \eta^3 V Z_2(x, \eta)} -$$

$$-\frac{1}{\beta^3} \int_{\chi(x)}^y \{ 2(2\nabla - 1) \Delta_j [2\beta^2 Q_1(x, \eta, \alpha_j) + \Delta_j Q_1(x, \eta, 0)] Z_2(x, \eta) +$$

$$+ \beta^2 [\beta^2 Q_1^2(x, \eta, \alpha_j) + 2\Delta_j Q_1(x, \eta, \alpha_j) Q_1(x, \eta, 0)] + (4\nabla - 1) \times$$

$$\times \Delta_j^2 Z_2^2(x, \eta) \left\} \frac{C(\eta, \alpha_j) d\eta}{V y - \eta V Z_2(x, \eta)} - \frac{2\alpha_j e}{15\nabla \Delta_j} \left\{ 3(15\beta^4 + 10\beta^2 +$$

$$+ 3) [\Delta_j^2 J_2 + 2\Delta_j \alpha_j^2 e J_1 + \alpha_j^4 e^2 J_0] + [3\beta^2 (10\beta^2 -$$

$$- 15\beta^4 + 1) Q_2(x, \alpha_j) - 10\nabla \alpha_j^2 (3\nabla - 2) e \left\{ \Delta_j J_1 + \alpha_j^2 e J_0 -$$

$$- 2\beta^2 [6\beta^2 (5\nabla - 6) Q_2(x, \alpha_j) + 5\alpha_j^2 e \nabla (4 - 3\nabla)] Q_2(x, \alpha_j) J_0 +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{4\beta^2}{\Delta_j} [5\nabla e a_j^2 - 6\beta^2 Q_2(x, a_j)] Q_2^2(x, a_j) J_{-1} \Big\} + \\
& + \frac{\nabla e a_j}{\beta^2} \int_{\chi(x)}^y [4[2\beta^2 Q_1(x, \eta, a_j) + \Delta_j Q_1(x, \eta, 0)] I_1^{(1)}(p_2) + \\
& + 4\beta^2 \Delta_j I_{-1}^{(2)}(p_2)] \frac{d\eta}{V y - \eta} - \frac{1}{a_j \beta} \int_{\chi(x)}^y [\beta^2 Q_1^2(x, \eta, a_j) + \\
& + 2\nabla_j Q_1(x, \eta, a_j) Q_1(x, \eta, 0)] G_1^{(1)}(x, \eta, a_j) \frac{d\eta}{V y - \eta} - \\
& - \frac{2\Delta_j}{3a_j \beta} \int_{\chi(x)}^y [2\beta^2 Q_1(x, \eta, a_j) + \Delta_j Q_1(x, \eta, 0)] G_1^{(2)}(x, \eta, a_j) \times \\
& \times \frac{d\eta}{V y - \eta} - \frac{3\beta^2 \Delta_j^2}{5a_j} \int_{\chi(x)}^y \frac{G_1^{(3)}(x, \eta, a_j)}{V y - \eta} d\eta - \\
& - \frac{a_j \nabla e}{\beta} \int_{\chi(x)}^y \left\{ [\beta^2 Q_1(x, \eta, a_j) + \right. \\
& \left. + \Delta_j Q_1(x, \eta, 0)] I_0 + 2\beta^2 \Delta_j I_0^{(1)} - \frac{1}{2} Q_1(x, \eta, a_j) Q_1(x, \eta, 0) \times \right. \\
& \times G_2^{(0)}(x, \eta, a_j) - \frac{1}{2} [\beta^2 Q_1(x, \eta, a_j) + \Delta_j Q_1(x, \eta, 0)] G_2^{(1)}(x, \eta, a_j) - \\
& - \frac{1}{2} \beta^2 \Delta_j G_2^{(2)}(x, \eta, a_j) \Big\} \frac{d\eta}{V y - \eta} - a_j e \left\{ \beta^2 \Delta_j (J_2 - 2x J_1 + \right. \\
& \left. + x^2 J_0) + [(1 + a_j^2) \beta^2 + \Delta_j] e (J_1 - x J_0) + (1 + a_j^2) e^2 J_0 + \right. \\
& \left. + \Delta_j (J_2 - x J_1) + \frac{1}{\beta^2} [\Delta_j + \beta^2 (1 + a_j^2)] e J_1 - 2\Delta_j \chi(x) (J_1 - \right. \\
& \left. - x J_0) - \frac{1}{\beta^2} [\Delta_j + \beta^2 (1 + a_j^2)] e \chi(x) J_0 + \frac{\Delta_j}{\beta^2} [J_2 - 2\chi(x) J_1 + \chi^2(x) J_0] \right\} \quad (36)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_{1,0}(x, y) = & - \frac{3}{4\beta^2} \{ 3J_2 + [3e + \chi(x)] J_1 - e\chi(x) J_0 \} + \\
& + \frac{3x}{4} \int_{\chi(x)}^y \frac{R_2(x, \eta) d\eta}{V(y-\eta)\eta} - \frac{1}{2\beta^2} V. p. \int_{\chi(x)}^y \sqrt{\frac{\eta(e-\eta)^2}{(y-\eta)^3 Z_2(x, \eta)}} d\eta \quad (37)
\end{aligned}$$

$$H_{2,0}(x, y) = \frac{5}{16\beta^4} [10J_3 + [\chi(x) - 21e]J_2 - [6\chi^2(x) -$$

$$-10e\lambda(x) - 10e^2]J_1 + \lambda(x)[3\lambda(x) - 5e]eJ_0] -$$

$$-\frac{1}{2\beta^4} V. p. \int_{\lambda(x)}^y \sqrt{\frac{(e-\eta)^3 \eta}{(y-\eta)^3 Z_2(x, \eta)}} d\eta + \frac{15x^2}{16} \int_{\lambda(x)}^y \frac{R_2(x, \eta) d\eta}{V \eta (y-\eta)} \quad (38)$$

$$H_{1,1}(x, y) = -\frac{3}{4\beta^2} \{5J_3 - [3\lambda(x) + 5e]J_2 + 3e\lambda(x)J_1\} -$$

$$-\frac{1}{2\beta^2} V. p. \int_{\lambda(x)}^y \sqrt{\frac{\eta(e-\eta)}{y-\eta}} \frac{d\eta}{V Z_2(x, \eta)} +$$

$$+\frac{9x}{4} \int_{\lambda(x)}^y \sqrt{\frac{\eta}{y-\eta}} R_2(x, \eta) d\eta \quad (39)$$

$$H_{0,1}(x, y) = \frac{J_2}{2} - \frac{1}{2} V. p. \int_{\lambda(x)}^y \sqrt{\frac{\eta^3(e-\eta)}{(y-\eta)^3 Z_2(x, \eta)}} d\eta +$$

$$+\frac{3}{2} \int_{\lambda(x)}^y \sqrt{\frac{\eta}{y-\eta}} R_2(x, \eta) d\eta \quad (40)$$

$$H_{0,2}(x, y) = \frac{1}{2} J_3 - \frac{1}{2} V. p. \int_{\lambda(x)}^y \sqrt{\frac{\eta^3(e-\eta)}{(y-\eta)^3 Z_2(x, \eta)}} d\eta +$$

$$+\frac{5}{2} \int_{\lambda(x)}^y \sqrt{\frac{\eta^3}{y-\eta}} R_2(x, \eta) d\eta \quad (41)$$

$$N_0(x, y) = -J_0 + 2J_1 - \frac{\nabla}{2} V. p. \int_{\lambda(x)}^y \frac{V(e-\eta)\eta d\eta}{V(y-\eta)^3 Z_2(x, \eta)} +$$

$$+\beta \int_{\lambda(x)}^y \frac{I_0(x, \eta) d\eta}{V y - \eta} - \frac{1}{4\beta} \int_{\lambda(x)}^y \{[2\beta^2(\eta-x) - (\beta^2-1)e]G_2^{(0)}(x, \eta) +$$

$$+ 2\beta^2 G_2^{(1)}(x, \eta)\} \frac{d\eta}{V y - \eta} \quad (42)$$

$$N_1(x, y) = \frac{1}{2\beta^2} [e^2 J_0 - e(3\nabla + 2)J_1 + 4\nabla J_2] -$$

$$-\frac{\nabla}{2\beta^2} V. p. \int_{\lambda(x)}^y \frac{(\nabla\eta - e)V(e-\eta)\eta d\eta}{V y - \eta^3 V Z_2(x, \eta)} - \frac{1}{2\beta} \int_{\lambda(x)}^y [3(\nabla - 2)e -$$

$$\begin{aligned}
 & -8\beta^2\eta] I_0 + 8\beta^2 I_1 \Big| \frac{d\eta}{V y - \eta} - \frac{1}{4\beta} \int_{\chi(x)}^y \{ [4\beta^2 (\eta - x)^2 - \\
 & - 3(\nabla - 2)e(\eta - x) - 2e^2] G_2^{(0)}(x, \eta) + [8\beta^2 (\eta - x) - \\
 & - 3(\nabla - 2)e] G_2^{(1)}(x, \eta) + 4\beta^2 G_2^{(1)}(x, \eta) \} \frac{d\eta}{V y - \eta} \quad (43)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 N_2(x, y) = & -\frac{1}{2\beta^4} [e^3 J_0 - 2(3\nabla + 1)e^2 J_1 + \nabla(5\nabla + 8)e J_2 - \\
 & - 6\nabla^2 J_3] - \frac{\nabla}{2\beta^4} V. p. \int_{\chi(x)}^y \frac{(\nabla\eta - e)^2 V \sqrt{\eta(e - \eta)}}{V y - \eta^3 V Z_2(x, \eta)} d\eta - \\
 & - \frac{1}{\beta} \int_{\chi(x)}^y \{ [2e^2 + 5(\nabla - 2)e\eta - 9\beta^2\eta^2] I_0 + [18\beta^2\eta - \\
 & - 5(\nabla - 2)e] I_1 - 9\beta^2 I_2 \} \frac{d\eta}{V y - \eta} - \frac{1}{4\beta} \int_{\chi(x)}^y \{ [6\beta^2 (\eta - x)^3 - \\
 & - 5(\nabla - 2)e(\eta - x)^2 - 4e^2(\eta - x)] G_2^{(0)}(x, \eta) + \\
 & + 2[9\beta^2 (\eta - x)^2 - 5(\nabla - 2)e(\eta - x) - 2e^2] G_2^{(1)}(x, \eta) + \\
 & + [18\beta^2 (\eta - x) - 5(\nabla - 2)e] G_2^{(2)}(x, \eta) + 6\beta^2 G_2^{(3)}(x, \eta) \} \frac{d\eta}{V y - \eta} \quad (44)
 \end{aligned}$$

В формулах (17)–(44) введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
 J_k &= \int_{\chi(x)}^y \frac{\eta^k d\eta}{V(y - \eta) \eta(e - \eta)(\eta + \beta^2 x - e)} \\
 J_{-1} &= \int_{\chi(x)}^y \frac{d\eta}{\left(-\frac{\alpha_j^2 e}{\Delta_j} - \eta\right) V \sqrt{(y - \eta) \eta(e - \eta)(\eta + \beta^2 x - e)}} \\
 G_1^{(m)}(x, \eta, \alpha_j) &= \frac{2\alpha_j^2 \nabla e}{\nabla_j} I_{-2}^{(m)}(p_3) - (\alpha_j^2 + \beta^2) I_{-1}^{(m)}(p_3) + \\
 & + \alpha_j^2 I_{-1}^{(m)}(p_1) + \beta^2 I_{-1}^{(m)}(p_2) \quad (m = 1, 2, 3) \\
 G_2^{(m)}(x, \eta, \alpha_j) &= I_{-1}^{(m)}(p_1) + I_{-1}^{(m)}(p_2) \quad (m = 0, 1, 2) \\
 p_1 &= \eta - e, \quad p_2 = \frac{e}{\beta^2} + \eta, \quad p_3 = \frac{Q_1(0, \eta, \alpha_j)}{\Delta_j}
 \end{aligned}$$



$$I_m = \int_{\bar{\lambda}(\eta)}^x \frac{\xi^m d\xi}{\sqrt{(x-\xi)(e+\xi-\eta) \left( \frac{e}{\beta^2} + \eta - \xi \right)}}$$

$$I_{-k}^{(m)}(p) = \int_{\bar{\lambda}(\eta)}^x \frac{(x-\xi)^m d\xi}{(p-\xi)^k \sqrt{(x-\xi)(e+\xi-\eta) \left( \frac{e}{\beta^2} + \eta - \xi \right)}}$$

В последнем интеграле  $p$  принимает значения  $p_1$ ,  $p_2$  и  $p_3$ . Все интегралы типов  $I_m$ ,  $I_{-k}^{(m)}$ ,  $J_k$  и  $J_{-1}$  выражаются через эллиптические интегралы

$$I_0 = \frac{2\beta}{\sqrt{\nabla e}} \mathbf{E}(\delta, q)$$

$$I_1 = \frac{2}{\beta \sqrt{\nabla e}} [-Q_1(x, \eta, 0) \Pi(\delta, q^2, q) + Q_1(0, \eta, 0) \mathbf{E}(\delta, q)]$$

$$I_2 = -\frac{2\nabla}{3\beta^3} \sqrt{\eta(e-\eta) Z_2(x, \eta)} - \frac{4Q_1(x, \eta, 0)}{3\beta^3 \sqrt{\nabla e}} [e(1-\beta^2) + \beta^2 x + 2\beta^2 \eta] \Pi(\delta, q^2, q) + \frac{2}{3\beta^3 \sqrt{\nabla e}} [2Q_1^2(0, \eta, 0) + \beta^2(x + \eta - e) Q_1(0, \eta, 0) + \beta^4(e - \eta)x] \mathbf{E}(\delta, q)$$

$$I_{-1}^{(0)}(p_3) = -\frac{2\beta \Delta_j^2 Q_1(x, \eta, 0)}{\alpha_j^2 \sqrt{\nabla e^3} Q_1(x, \eta, \alpha_j)} \Pi\left(\delta, \frac{\alpha_j^2 e \nabla q^2}{\beta^2 Q_1(x, \eta, \alpha_j)}, q\right) + \frac{2\beta^3 \Delta_j}{\alpha_j^2 \sqrt{\nabla e}} \mathbf{E}(\delta, q)$$

$$I_{-1}^{(0)}(p_3) = -\frac{1}{\alpha(x, \eta, \alpha_j)} \left[ \frac{Q_1(x, \eta, 0)}{\sqrt{\nabla}} \Pi(\delta, q^2, q) + \frac{\alpha_j^2 \sqrt{\nabla}}{\beta \Delta_j} \mathbf{E}(\delta, q) + \frac{\beta \Delta_j^2 Q_1(x, \eta, 0) b(x, \eta, \alpha_j)}{\alpha_j^2 \sqrt{\nabla^3} Q_1(x, \eta, \alpha_j)} \Pi\left(\delta, \frac{\alpha_j^2 \nabla e q^2}{\beta^2 Q_1(x, \eta, \alpha_j)}, q\right) - \frac{\beta^3 \Delta_j}{\alpha_j^2 \sqrt{\nabla^3}} b(x, \eta, \alpha_j) \mathbf{E}(\delta, q) + \frac{\Delta_j \sqrt{\eta(e-\eta) Z_2(x, \eta)}}{\beta Q_0(\eta, \alpha_j)} \right]$$

$$J_0 = \frac{2}{\beta \sqrt{xy}} \mathbf{E}\left(\frac{\pi}{2}, q_1\right)$$

$$J_1 = \frac{2}{\beta \sqrt{xy}} \left\{ (y-e) \Pi\left(\frac{\pi}{2}, x, q_1\right) + e \mathbf{E}\left(\frac{\pi}{2}, q_1\right) \right\}$$

$$J_2 = \frac{2}{\beta \sqrt{xy}} \left\{ \lambda(x)(e-y) \Pi\left(\frac{\pi}{2}, \frac{ex}{y}, q_1\right) + (Z_3 + e)(e-y) \times \right.$$

$$\begin{aligned} & \times \Pi\left(\frac{\pi}{2}, x, q_1\right) + [\beta^2 x(e-y) - 2e^2] \mathbf{E}\left(\frac{\pi}{2}, q_1\right) \Big\} \\ J_3 = & -\frac{1}{2} \frac{ey \lambda(x)}{\beta \sqrt{xy}} \mathbf{E}\left(\frac{\pi}{2}, q_1\right) - \frac{3\lambda(x)}{4\beta \sqrt{xy}} (Z_3 + e) \left[ (e-y) \times \right. \\ & \left. \times \Pi\left(\frac{\pi}{2}, \frac{ex}{y}, q_1\right) + y \mathbf{E}\left(\frac{\pi}{2}, q_1\right) \right] \\ J_{-1} = & \frac{2\Delta_j(e-y)}{\beta^2 e Q_0(y, x_j)} \Pi\left(\frac{\pi}{2}, \frac{e\beta^2 x}{Q_0(y, x_j)}, q_1\right) + \frac{2}{\beta^2 e} \mathbf{E}\left(\frac{\pi}{2}, q_1\right) \end{aligned}$$

где обозначены

$$\delta = \arcsin \sqrt{\frac{e(\eta + \beta^2 x - e)}{\beta^2 \eta (x - \eta + e)}}, \quad q = \sqrt{\frac{\beta^2 (x - \eta + e)}{\nabla e}}$$

$$x = \frac{y + \beta^2 x - e}{\beta^2 x}, \quad q_1 = \sqrt{\frac{e(y + \beta^2 x - e)}{\beta^2 xy}}$$

$$\begin{aligned} a(x, \eta, \alpha_j) = & \frac{1}{\beta^2} \{ \beta^2 p_3^3(\eta, \alpha_j) - [Q_1(0, \eta, 0) + \beta^2(x + \\ & + \eta - e)] p_3^2(\eta, \alpha_j) + [Q_1(0, \eta, 0)(x + \eta - e) - \beta^2(e - \eta)x] p_3(\eta, \alpha_j) + \\ & + (e - \eta) Q_1(0, \eta, 0)x \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b(x, \eta, \alpha_j) = & \frac{1}{\beta^2} \{ 3\beta^2 p_3^2(\eta, \alpha_j) - 2[Q_1(0, \eta, 0) + \beta^2(x + \\ & + \eta - e)] p_3(\eta, \alpha_j) + Q_1(0, \eta, 0)(x + \eta - e) - \beta^2(e - \eta)x \} \end{aligned}$$

Через  $\mathbf{E}$  и  $\Pi$  обозначены эллиптические интегралы соответственно первого и третьего родов.

Для области  $\sigma_1$  (фиг. 1) формулы коэффициентов вращательных производных сколов потока имеют сравнительно простой вид и выглядят так:

$$\begin{aligned} \theta_1^{(1)}(x, y) = & -1 + \frac{\alpha_0^2 + \beta^2}{\nabla \beta \alpha_0} \\ \theta_3^{(1)}(x, y) = & \frac{\lambda}{8} \left[ \frac{1 + 3\beta^2}{2\beta^2} Z_2(x, y) + e - \nabla x \right] + \\ & + \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=0}^1 g_{3,0}^{(1, 2-n)} \left\{ F_{0,0}^{(n, 2-n)}(x, y) - \frac{1}{\nabla} L_{0,0}^{(n, 2-n)}(x, y) \right\} \\ \theta_4^{(1)}(x, y) = & -\frac{\lambda k}{8} \left\{ \frac{3\beta^2 - 1}{4\beta^2} Z_2(x, y) + e + (1 - \beta^2)x \right\} + \\ & + \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=0}^1 g_{4,0}^{(1, 2-n)} \left\{ F_{0,0}^{(n, 2-n)}(x, y) - \frac{1}{\nabla} L_{0,0}^{(n, 2-n)}(x, y) \right\} \end{aligned}$$

$$\theta_1^{(2)}(x, y) = -\frac{\lambda M^2 (1 - \beta^2)}{32\beta^4 k} Z_2^2(x, y) + \frac{2}{\pi^2} g_{1,0}^{(2,0,2)} \left\{ F_{0,0}^{(0,0,2)}(x, y) - \frac{1}{\nabla^2} L_{0,0}^{(0,0,2)}(x, y) \right\}$$

$$\theta_3^{(2)}(x, y) = \frac{\lambda}{8} \left[ \frac{\nabla}{2\beta^2} (e - \nabla x) Z_2(x, y) + \frac{3}{8} \frac{\nabla^2}{\beta^4} Z_2^2(x, y) \right] + \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=0}^1 g_{3,0}^{(2,3-n)} \left\{ F_{0,0}^{(n,3-n)}(x, y) - \frac{1}{\nabla^3} L_{0,0}^{(n,3-n)}(x, y) \right\}$$

$$\theta_4^{(2)}(x, y) = \frac{\lambda k}{8} \left\{ \frac{\nabla}{2\beta^2} [(\beta^2 - 1)x - e] Z_2(x, y) + \frac{1}{8\beta^4} (9 - 4\beta^2 - 9\beta^4) Z_2^2(x, y) \right\} + \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=0}^1 g_{4,0}^{(2,3-n)} \left\{ F_{0,0}^{(n,3-n)}(x, y) - \frac{1}{\nabla^3} L_{0,0}^{(n,3-n)}(x, y) \right\}$$

Если в эти формулы подставить  $\alpha_1$  вместо  $\alpha_0$ , то получим выражение для коэффициентов вращательных производных скосов потока для области  $\sigma_1$  (фиг. 1). При подстановке  $\alpha_0 = \alpha_1 = \beta$  получаются формулы для скосов потока за крылом бесконечного размаха.

Пользуясь случаем, выражаю мою искреннюю благодарность проф. Р. А. Межлумяну за большой интерес к задаче и ценные замечания, а также Дж. А. Арутюняну за помощь при проверке полученных результатов.

НИИ автоматика  
г. Кировакан

Поступила 1 II 1971

Ռ. Շ. ՍՈՒՄՄԱՆՅԱՆ

ՀՈՍԱՆՔԻ ՈՉ-ՍՏԱՅԻՆԱՐ ՔԵՔՈՒԹՅՈՒՆԸ ԵՌԱՆԿՅՈՒՆԻ ՔԵՎԻ ԵՏԵՎԻՆ  
ՆՐԱ ԳԵՐՉԱՅՆԱՅԻՆ ՇԱՐԺՄԱՆ ԳԵՊԵՐՈՄ

Ա մ փ ո փ ու ի մ

Աշխատանքում արված են բարակ, թույլ ծոված, սլանոսմ եռանկյունի տեսքով և զերծայնային եզրեր ունեցող թևի ետևին հոսանքի ոչ-ստացիոնար թերթիկային հաշվելու բանաձևեր, երբ թևը զերծայնային արագությանը շարժվում է սեղմելի իզոլակիան հեղուկի մեջ:

Այդ բանաձևերը ստացվել են թևի հարթության վրա դրսևող այն տիրույթների կետերի համար, որոնք ընկած են գրգռման ալիքի, թևի ետևի եզրից նրա բեկման և թևի ետևի եզրի միջև, երբ Ստրուխալի թվերը փոքր են:

Ստացված բանաձևերը հնարավորություն են տալիս հաշվումները շարու-

Կակեղ հոսանքն ի վար միհշև անվերջություն ըստ, հարթության այդ մասի համար կարկինում ստացված բանաձևերի:

## NON-STATIONARY DOWNWASH BEHIND A TRIANGULAR WING IN SUPERSONIC MOTION

R. Sh. SOLOMONIAN

### S u m m a r y

Rated formulae for non-stationary downwash behind a thin slightly curved wing which has a triangular formula in the plan and supersonic edges whose apex is turned forward when it moves in the ideal compressible fluid with supersonic speed are given in this paper.

These formulae are obtained for area points situated on the plane of the wing between the disturbance waves, their reflection from the back edge and the back edge itself at small Strouhal numbers.

The above formulae make it possible to continue the downstream calculations at infinitum according to the formulae previously derived for this part of the wing plane.

### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Белоцерковский С. М. Пространственное неустановившееся движение несущих поверхностей. ПММ, т. XIX, вып. 4, 1955.
2. Междумян Р. А., Соломонян Р. Ш. Метод определения нестационарного схода потока за крылом конечного размаха при сверхзвуковом движении. Изв. АН Арм.ССР, серия Механика, т. XXIII, № 6, 1970.
3. Кислягин Н. Н. Коэффициенты вращательных производных сходов, создаваемых в потоке крылом, при неустановившемся движении. Изв. АН СССР, ОТН, Мех. и машиностроение, № 4, 1961.
4. „Общая теория аэродинамики больших скоростей“. Из серии „Аэродинамика больших скоростей и реактивная техника“. Перев. с англ. ИЛ, М., 1959.
5. „Современное состояние аэродинамики больших скоростей“, под общ. ред. А. Хоуарта, ИИА, 1955.
6. Градштейн И. С. и Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Физматгиз, М., 1963.