ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXV, № 5, 1972 Механика

К. А. АБГАРЯН

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ НА ЗАДАННОМ ПРОМЕЖУТКЕ ВРЕМЕНИ

1. При рассмотрении реальных объектов нас обычно интересует их поведение в течение некоторого конечного промежутка времени, поэтому устойчивость движения как характеристика качества объекта должна отражать определенные свойства его движения на этом конечном промежутке времени. В некоторых случаях, как, например, в случае линейной автономной системы, свойства движения в течение конечного промежутка времени и бесконечного (при $t \to \infty$) находятся в тесной взаимосвязи, и поэтому при исследовании таких систем может быть использовано понятие устойчивости, введенное для бесконечного промежутка времени и тогда, когда интересующий промежуток времени конечен, а именно, можно, например, принять, что исследуемое движение устойчиво на заданном конечном промежутке времени, если оно устойчиво по Ляпунову, и неустойчиво на заданном конечном промежутке, если оно неустойчиво по Ляпунову. Установление с достаточным основанием такого соответствия возможно все же в исключительных случаях. В общем случае понятие устойчивости, введенное для бесконечного промежутка, не может быть использовано для оценки свойств движения в пределах конечного промежутка, и вот почему.

Задача устойчивости движения реальных объектов обычно сводится к исследованию решений некоторых систем дифференциальных, интегро-дифференциальных или другого типа уравнений. Ясно, что исследование устойчивости движения объекта путем анализа решений соответствующих уравнений имеет смысл лишь при условии должной адэкватности математической модели физической реальности. Часто такая адэкватность выполняется в пределах только конечного промежутка времени, и тогда свойства решений уравнений при $t \to \infty$ не имеют никакого отношения к свойствам движения рассматриваемого объекта. Но даже если адэкватность соблюдается при всех $t > t_0$, это еще не значит, что между понятиями устойчивости движения на конечном и бесконечном промежутках времени возможно установить разумное взаимнооднозначное соответствие. В самом деле, решения двух систем дифференциальных уравнений $\dfrac{dx}{dt} = f_1(t, x)$ и $\dfrac{dx}{dt} = f_2(t, x)$, где $f_1(t, 0)$, $f_2(t, 0) \equiv 0$, и в пределах конечного промежутка $t_0 \leqslant t < T$ $f_1(t, x) \equiv f_2(t, x)$, на этом промежутке совпадают. Вместе с тем вполне может случиться, что, например, тривиальное решение первой системы устойчиво по Ляпунову, а тривиальное решение второй системы—неустойчиво, поскольку решение задачи устойчивости по Ляпунову определяется свойствами функций f_1 и f_2 на промежутке $[t_0, \infty)$, а при $t > T$ эти функции могут отличаться друг от друга как угодно.

Соображения такого рода и определяют необходимость введения самостоятельного понятия об устойчивости движения на конечном промежутке времени.

Вопрос об устойчивости движения на конечном промежутке времени, по-видимому, впервые, был поставлен Н. Г. Четаевым [1]. В настоящее время известно несколько отличающихся друг от друга постановок задачи устойчивости движения на конечном промежутке времени (см. [1—7] и др.). Общим для всех постановок является введение определенной функциональной связи между областями предельных отклонений параметров движения в начальный момент t_0 и при $t > t_0$ в пределах конечного (наперед заданного или незаданного) промежутка времени. Различие же между ними проявляется, во-первых, в характере ограничений, налагаемых на отклонения параметров движения и, во-вторых, в способе задания области предельных отклонений.

Мы здесь рассматриваем задачу об устойчивости движения на конечном промежутке времени в следующей постановке.

Определение. Если уравнения возмущенного движения таковы, что при достаточно малом $\rho > 0$ любое решение $x(t)$ уравнений, начальное значение $x_0 = x(t_0)$ которого удовлетворяет условию

$$(G(t_0)\,x_0,\ G(t_0)\,x_0) \leqslant \rho^2 \tag{1.1}$$

на заданном промежутке $t_0 \leqslant t < T$ удовлетворяет условию

$$(G(t)\,x,\ G(t)\,x) \leqslant \rho^2 \tag{1.2}$$

где $G(t)$—заданная ограниченная матрица, то невозмущенное движение по отношению к области (1.2) устойчиво на $[t_0, T)$; в противном случае—неустойчиво.

В отличие от определения устойчивости, приведенного в [7], здесь конечный промежуток времени, на котором рассматривается устойчивость, считается заданным.

Область предельных отклонений параметров движения x_s $(s = 1, \cdots, n)$—элементов столбцовой матрицы x задается посредством неотрицательной функции $V(t, x) = (G(t)\,x,\ G(t)\,x)$, определяемой матрицей $G(t)$. В зависимости от способа задания $G(t)$ область предельных отклонений (1.2) приобретает тот или иной вид. Пусть, например, $K(t)$—матрица, преобразующая матрицу коэффициентов линейной части уравнений возмущенного движения U к каноническому виду, так что $K^{-1}(t)\,U(t)K(t) = \Lambda(t)$, где $\Lambda(t)$—диагональная или квазидиагональная матрица (в частности,—матрица Жордана); при $G(t) \equiv K^{-1}(t_0)$ область, задаваемая соотношением (1.2), совпадает с областью предельных отклонений, введенной Г. В. Каменковым [3], а при $G(t) \equiv K^{-1}(t)$ — с областью предельных отклонений, предложенной А. А. Лебедевым [4].

Мы будем связывать выбор области предельных отклонений не с каноническими преобразованиями матрицы коэффициентов уравнений первого приближения, а с каноническими преобразованиями самих уравнений первого приближения.

Допустим, что

$$\frac{dx}{dt} = U(t)\,x \tag{1.3}$$

— векторно-матричное уравнение возмущенного движения первого приближения, где U — квадратная матрица порядка n, непрерывная на $[t_0, T]$, а $K(t)$ — невырожденная и дифференцируемая на $[t_0, T]$ квадратная матрица порядка n с нормированными столбцами $K_1(t)$, $K_2(t)$, $\cdots$, $K_n(t)$ ($\|K_j\| = 1$, $j = 1, \cdots, n$) и такая, что подстановка

$$x = K(t)\,y \tag{1.4}$$

приводит уравнение (1.3) к каноническому виду

$$\frac{dy}{dt} = \Lambda(t)\,y \tag{1.5}$$

где $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$, а λ_j ($j = 1, \cdots, n$) — некоторые скалярные функции t.

Оставляя пока в стороне вопрос о существовании такой матрицы $K(t)$, положим $G(t) \equiv K^{-1}(t)$. Тогда область предельных отклонений будет определена соотношением

$$V(t,\ x) \equiv (K^{-1}(t)\,x,\ \ K^{-1}(t)\,x) \leqslant \rho^2 \tag{1.6}$$

Геометрически область (1.6) представляет собой n-мерный эллипсоид, ограниченный поверхностью

$$(K^{-1}(t)\,x,\ \ K^{-1}(t)\,x) = \rho^2 \tag{1.7}$$

Каждый из $2n$ лучей $x = \pm K_\sigma(t)\,s$ ($\sigma = 1, \cdots, n$; $s > 0$) пересекает поверхность (1.7) один раз при значении параметра $s = \rho$. Действительно,

$$(K^{-1}(t)\,K_\sigma(t)\,\rho,\ K^{-1}(t)\,K_\sigma(t)\,\rho) = \rho^2 \sum_{i=1}^{n} \delta_{i\sigma}^2 = \rho^2 \qquad \left(\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}\right)$$

Точки пересечения этих лучей с поверхностью (1.7) находятся от начала координат ($x = 0$) на неизменном расстоянии ρ, ибо $\|K_\sigma(t)\,\rho\| = \|K_\sigma(t)\|\,\rho = \rho = \mathrm{const}$.

Можно было бы еще показать, что лучи $x = \pm K_\sigma(t)\,s$ расположены симметрично относительно главных осей эллипсоида (1.6) и направлены по диагоналям n-мерного параллелепипеда, грани которого касаются эллипсоида в его вершинах. С течением времени меняется ориентация главных осей эллипсоида, и сам он может деформироваться (то есть могут меняться размеры его полуосей), но при этом остаются на неизменном расстоянии от начала координат все точки пересечения лучей $x = K_\sigma(t)\,s$ с поверхностью эллипсоида.

Ниже устанавливаются условия устойчивости и неустойчивости невозмущенного движения на конечном (заданном) промежутке времени по отношению к области (1.6) и исследуется вопрос о существовании и структуре преобразующей матрицы $K(t)$.

2. Пусть уравнения возмущенного движения представлены в виде

$$\frac{dx}{dt} = U(t)\,x + h(t,\ x) \tag{2.1}$$

где h—столбцовая матрица, элементы которой являются нелинейными функциями отклонений x_s, причем равномерно по t в пределах промежутка $[t_0,\ T]$

$$\lim_{x\to 0}\frac{h(t,\ x)}{\|x\|} = 0 \tag{2.2}$$

При замене переменных (1.4) область предельных отклонений и уравнения возмущенного движения принимают соответственно вид

$$\|y\|^2 \leqslant \rho^2$$

$$\frac{dy}{dt} = \Lambda(t)\,y + M(t)\,h(t,\ Ky)$$

Здесь $M(t) \equiv K^{-1}(t)$.

Полная производная по t в силу уравнений возмущенного движения от функции $V(t,\ x) = V(t,\ Ky) = \|y\|^2$, положительно определенной на $[t_0,\ T]$, равна

$$\frac{dV}{dt} = \sum_{\sigma=1}^{n} 2\,\mathrm{Re}\,\lambda_\sigma\,|y_\sigma|^2 + 2\,\mathrm{Re}\,(y^* Mh) \tag{2.3}$$

где y_σ $(\sigma = 1, \cdots, n)$—элементы столбцовой матрицы y, а y^*—матрица, эрмитово сопряженная матрице y.

Интегрируя (2.3) вдоль решения уравнений возмущенного движения, получим после некоторых преобразований

$$\frac{V(t,\ x)}{V(t_0,\ x_0)} = 1 + \sum_{\sigma=1}^{n}\left(\exp\int_{t_0}^{t} 2\,\mathrm{Re}\,\lambda_\sigma d\tau - 1\right)\frac{|y_{\sigma 0}|^2}{\|y_0\|^2} + (t - t_0)\,\psi(t,\ y) \tag{2.4}$$

где $y_0 = y(t_0)$, $y_{\sigma 0} = y_\sigma(t_0)$, а

$$\psi(t,\ y) = \frac{1}{(t - t_0)\,\|y_0\|^2}\int_{t_0}^{t}\mathrm{Re}\left(\ y^* \exp\int_{t'}^{t} 2\,\mathrm{Re}\,\Lambda\, d\tau\, Mh\right)dt'$$

В силу (2.2), как нетрудно показать, равномерно по t в пределах промежутка $[t_0, T]$

$$\lim_{y\to 0} \psi(t, y) = 0 \tag{2.5}$$

Обозначим

$$\mu_\sigma(t) = \frac{1}{t-t_0}\int_{t_0}^{t} \operatorname{Re}\lambda_\sigma\, dt, \quad \mu(t) = \max_\sigma \mu_\sigma(t)$$

Теорема 2.1. *Если*

$$\mu(t) < 0 \qquad (t \in [t_0, T]) \tag{2.6}$$

то невозмущенное движение (тривиальное решение уравнения (2.1)) обладает устойчивостью на заданном промежутке $[t_0, T)$ по отношению к области (1.6).

Доказательство. В силу условия (2.6) существует такое $\delta_0 > 0$, что в пределах замкнутого промежутка $[t_0, T]$ $\mu(t) \leqslant -\delta_0$. Учитывая это, получим при достаточно малых $\delta > 0$ $(\delta < \min(\delta_0, 1/T - t_0))$

$$\sum_{\sigma=1}^{n}\left(\exp\int_{t_0}^{t} 2\operatorname{Re}\lambda_\sigma\, d\tau - 1\right)\frac{|y_{\sigma 0}|^2}{\|y_0\|^2} \leqslant \sum_{\sigma=1}^{n}(e^{-2\delta(t-t_0)} - 1)\,\frac{|y_{\sigma 0}|^2}{\|y_0\|^2} \leqslant$$

$$\leqslant -2\delta(t-t_0)$$

С другой стороны, в силу (2.5) можно указать такое $\rho_0 > 0$, что при всех $\|y\| < \rho_0$ будем иметь $|\psi(t, y)| < 2\delta$ и тогда $V(t, x) \leqslant V(t_0, x_0)$, а это означает, что любое решение уравнения (2.1), удовлетворяющее условию $V(t_0, x_0) \leqslant \rho^2$, где ρ — произвольное положительное число из промежутка $0 < \rho \leqslant \rho_0$, в пределах промежутка $[t_0, T)$ удовлетворяет условию $V(t, x) \leqslant \rho^2$, что и доказывает теорему.

Теорема 2.2. *Если в какой-нибудь точке $\bar{t} \in [t_0, T)$*

$$\mu(\bar{t}) > 0 \tag{2.7}$$

то невозмущенное движение (тривиальное решение уравнения (2.1)) неустойчиво на заданном промежутке $[t_0, T)$ по отношению к области (1.6).

Доказательство. Пусть для определенности $\mu(\bar{t}) = \mu_s(\bar{t})$. Рассмотрим частное решение $x^\circ = Ky^\circ$, определенное начальными условиями $y_s(t_0) = \rho$, $y_\sigma(t_0) = 0$ $(\sigma \neq s)$. Вдоль этого решения

$$V(t, x^\circ) = V(t_0, x_0^0)\left[\, 1 + (\exp\int_{t_0}^{t} 2\operatorname{Re}\lambda_s\, dt - 1) + (t - t_0)\,\psi(t, y^\circ)\right]$$

Откуда

$$V(\bar{t}, x^\circ) = V(t_0, x_0^0)[1 + (e^{2\mu(\bar{t})(\bar{t}-t_0)} - 1) + (\bar{t} - t_0)\,\psi(\bar{t}, y^\circ)]$$

Случай $\bar{t} = t_0$ сводится к случаю $\bar{t} \in (t_0, T)$, так как из $\mu(t_0) > 0$ по непрерывности следует $\mu(t) > 0$ в пределах некоторого конечного отрезка $[t_0, t_0 + \Delta]$, и значит $\mu(t_1) > 0$ при $t_1 \in (t_0, t_0 + \Delta) \subset (t_0, T)$.

Итак, пусть $\bar{t} \in (t_0, T)$. При условии (2.7) $e^{2\mu(\bar{t})(\bar{t}-t_0)} - 1 = \varepsilon > 0$, и в соответствии с (2.5) существует такое $\rho_0 > 0$, что при всех y, удовлетворяющих неравенству $\|y\| \leqslant \rho_0$, $(t - t_0)|\psi(t, y)| < \varepsilon$, и потому

$$e^{2\mu(\bar{t})(\bar{t}-t_0)} - 1 + (t - t_0)\psi(\bar{t}, y) = \varepsilon_1 > 0 \quad (0 < \varepsilon_1 < 2\varepsilon).$$

В силу этого для любого $\rho \in (0, \rho_0/\sqrt{1+\varepsilon_1})$

$$V(\bar{t}, x^0) > V(t_0, x_0^0) = \rho^2$$

и значит условия устойчивости не выполняются.

Теорема 2.3. *Если в какой-нибудь точке $\bar{t} \in [t_0, T)$*

$$\mu(\bar{t}) = 0 \tag{2.8}$$

то невозмущенное движение (тривиальное решение уравнения (2.1)) может не обладать устойчивостью на заданном промежутке $[t_0, T)$ по отношению к области (1.6).

Доказательство. Соотношение (2.8) допускает существование такого частного решения $x^0 = Ky^0$, что при любом сколь угодно малом ρ

$$V(\bar{t}, x) = V(t_0, x_0^0)[1 + (t - t_0)\psi(\bar{t}, y^0)]$$

Отсюда следует, что в зависимости от свойств нелинейной части уравнения (2.1) может иметь место и неравенство $V(\bar{t}, x^0) > V(t_0, x_0^0)$, а это означает невыполнение условий устойчивости.

3. В частом случае линейной системы $(h(t, x) \equiv 0)$ доказанные теоремы трансформируются в следующую теорему.

Теорема 3.1. *Для устойчивости невозмущенного движения линейной системы (тривиального решения уравнения (1.3)) на заданном промежутке $[t_0, T)$ относительно области (1.6) необходимо и достаточно, чтобы*

$$\mu(t) \leqslant 0 \qquad (t \in [t_0, T))$$

Теорема легко доказывается посредством соотношения (2.4) с учетом того, что в данном случае $\psi(t, y) \equiv 0$.

Замечание. Любопытно отметить, что в рассматриваемой постановке устойчивость или неустойчивость линейной системы на конечном промежутке определяется знаками функций $\mu_s(t)$, верхние пределы которых представляют собой характеристические показатели системы. В самом деле, фундаментальная матрица решений уравнения (1.3) состоит из столбцов

$$x_\sigma = K_\sigma(t) \exp \int\limits_{t_0}^{t} \lambda_\sigma(t)\, dt \quad (\sigma = 1, \cdots, n)$$

Поэтому, учитывая, что $\|K_\sigma\| = 1$,

$$\chi(x_\sigma) = \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t - t_0} \cdot \int\limits_{t_0}^{t} \lambda_\sigma\, dt = \overline{\lim_{t\to\infty}} \mu_\sigma(t)$$

4. Теперь о существовании и структуре преобразования линейной дифференциальной системы к диагональному виду. Имеет место

Теорема 4.1. *Пусть $U(t)$—квадратная матрица порядка n, непрерывная на $[t_0, T]$. Тогда преобразование*

$$x = K(t)\, y \tag{4.1}$$

с невырожденной и дифференцируемой на $[t_0, T]$ матрицей K приводит векторно-матричное уравнение (1.3) к уравнению

$$\frac{dy}{dt} = \Lambda(t)\, y \tag{4.2}$$

с диагональной и непрерывной на $[t_0, T]$ матрицей Λ тогда и только тогда, когда

$$K(t) = X(t)\, C Y(t) \tag{4.3}$$

где X—единственное решение матричного уравнения

$$\frac{dX}{dt} = UX, \quad X(t_0) = E \tag{4.4}$$

C—постоянная невырожденная матрица порядка n, а Y—непрерывно дифференцируемая и невырожденная на $[t_0, T]$ диагональная матрица порядка n.

Доказательство. При замене переменных согласно (4.1) и (4.3) уравнение (1.3) принимает вид

$$\frac{dy}{dt} = -Y^{-1} \frac{dY}{dt}\, y \tag{4.5}$$

В силу свойств матрицы Y матрица преобразованного уравнения

$$\Lambda = -Y^{-1} \frac{dY}{dt}$$

непрерывна на $[t_0, T]$ и имеет диагональную структуру.

Пусть, далее, $K(t)$—матрица преобразования (4.1), приводящего уравнение (1.3) к виду (4.2). Покажем, что эта матрица представима в форме (4.3). Матрица K преобразования уравнения (1.3) к виду (4.2) связана с матрицами U и Λ соотношением

$$\frac{dK}{dt} = UK - K\Lambda$$

Учитывая это и используя (4.4) и (4.5), легко показать, что $\frac{d}{dt}(X^{-1}KY^{-1}) = 0$, то есть $X^{-1}KY^{-1} = \text{const}$. Отсюда следует (4.3). Теорема доказана.

Из всего множества матриц K, определенных равенством (4.3), можно выделить подмножество тех, столбцы которых имеют единичную норму. Имея в виду, что $C = (c_1, \cdots, c_n)$ (c_σ—столбцовые матрицы), а Y в общем случае может быть представлена в виде

$$Y = \operatorname{diag}(r_1 e^{i\theta_1}, \cdots, r_n e^{i\theta_n})$$

где $r_\sigma(t)$ и $\theta_\sigma(t)$—непрерывно дифференцируемые вещественные скалярные функции и $r_\sigma(t) > 0$ ($\sigma = 1, \cdots, n$) при всех t из промежутка $[t_0, T]$, в соответствии с условием нормировки столбцов матрицы K—

$$\|Xc_\sigma r_\sigma e^{i\theta}\| = 1 \quad (\sigma = 1, \cdots, n)$$

—будем иметь

$$Y = \operatorname{diag}\left(\frac{e^{i\theta_1}}{\|Xc_1\|}, \cdots, \frac{e^{i\theta_n}}{\|Xc_n\|}\right) \tag{4.6}$$

Таким образом, может быть сформулирована еще

Теорема 4.2. *В условиях теоремы 4.1 при дополнительном условии*

$$\|K_\sigma\| = 1, \quad (\sigma = 1, \cdots, n)$$

наложенном на столбцы матрицы $K = (K_1, \cdots, K_n)$, *общее выражение для матрицы преобразования уравнения (1.3) к виду (4.2) представляется соотношением*

$$K = XCY$$

где Y *определено равенством (4.6).*

Следствие. В условиях теоремы 4.2

$$\operatorname{Re}\Lambda = \operatorname{diag}\left(\frac{d\ln\|Xc_1\|}{dt}, \cdots, \frac{d\ln\|Xc_n\|}{dt}\right)$$

$$\operatorname{Im}\Lambda = -\operatorname{diag}\left(\frac{d\theta_1}{dt}, \cdots, \frac{d\theta_n}{dt}\right)$$

Эти соотношения получаются путем подстановки (4.6) в (4.5).

Примечание. Область предельных отклонений задается посредством матрицы K, которая в соответствии с вышеизложенным определяется неоднозначно из-за произвола, имеющегося в выборе матрицы C и скалярных функций $\theta_\sigma(t)$. Произвол в выборе функций θ_σ в данном случае несущественен, поскольку условия устойчивости движения формулируются через $\operatorname{Re}\Lambda$ и никак не зависят от $\operatorname{Im}\Lambda$. Что касается матрицы C, то каждому C будет соответствовать определенная область предельных отклонений и определенная матрица $\mathrm{Re}\,\Lambda$, так что условия устойчивости движения существенно зависят от выбора матрицы C. Поэтому для определенности в каждом конкретном случае необходимо дополнительно задаваться матрицей C. Задание матрицы C означает задание области предельных отклонений в начальный момент t_0, поскольку, как легко видеть, $C = G^{-1}(t_0)$.

Московский авиационный
институт

Поступила 21 VII 1971

Կ. Ա. ԱԲԳԱՐՅԱՆ

ՏՐՎԱԾ ԺԱՄԱՆԱԿԱՄԻՋՈՑՈՒՄ ՇԱՐԺՄԱՆ ԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Հոդվածում մտցվում է տրված (վերջավոր) ժամանակամիջոցում շարժման կայունության հասկացությունը և բացահայտվում են չգրգռված շարժման կայունության ու անկայունության անհրաժեշտ ու բավարար պայմանները շարժման պարամետրերի սահմանային շեղումների տիրույթի նկատմամբ, որը տրվում է գրգռված շարժման առաջին մոտավորության հավասարումների սիստեմը անկյունագծային մատրիցայով սիստեմի բերող ձևափոխության մատրիցայով։ Նշվում են այդպիսի ձևափոխության գոյության պայմանները և բերվում է այդ ձևափոխության մատրիցայի ընդհանուր տեսքը։

ON STABILITY OF MOTION AT A GIVEN TIME INTERVAL

K. A. ABGARIAN

S u m m a r y

The paper is concerned with a concept on motion stability at a given (finite) time interval and with conditions necessary and sufficient for stability and non-stability of non-disturbed motion with respect to the region of maximum deviation of motion parameters given by the matrix of transformation in the system of disturbed motion equations in the first approximation to the diagonal matrix system. The conditions and the general expression for the matrix of this transformation are presented.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Четаев Н. Г.* Об одной мысли Пуанкаре. Сб. научн. трудов Казанск. авиац. ин-та, № 3, 1935.

2. *Моисеев Н. Д.* Обзор развития не-ляпуновских теорий устойчивости. Зап. семинара по теории устойчивости движения ВВА им. Н. Е. Жуковского, вып. 1, 1946.

3. *Каменков Г. В.* Об устойчивости движения на конечном интервале времени. ПММ, т. 17, вып. 5, 1953.

4. *Лебедев А. А.* Об устойчивости движения на заданном интервале времени. ПММ, т. 18, вып. 2, 1954.

5. *Чжан Сы-Ин.* Об устойчивости движения на конечном интервале времени. ПММ, т. 23, вып. 2, 1959.

6. *Weiss L.* and *Infante E. F.* On the stability of sistems defined over a finite time interval. Proc. Nat'l Acad. Sci. (USA), vol. 54, № 1, 1965, p.p. 44—48.

7. *Абгарян К. А.* Об устойчивости движения на конечном промежутке времени. Докл. АН СССР, т. 183, № 3, 1968.