

А. Г. АВЕТИСЯН

ИССЛЕДОВАНИЯ ХАРАКТЕРА НАПРЯЖЕННОГО
СОСТОЯНИЯ В ЧАСТИЧНО ЗАДЕЛАННОЙ ОКРЕСТНОСТИ
КРАЯ ПОВЕРХНОСТИ СОЕДИНЕНИЯ НАГРУЖЕННОГО
СОСТАВНОГО ТЕЛА

Исследования напряженного состояния составного упругого тела проведены в работах [1—3] и др. В работе [4] рассмотрены некоторые общие вопросы особенностей напряжений в составных телах. Особенности напряженного состояния окрестности угловых точек контура области в плоской задаче теории упругости для составного тела исследованы в работах [5—9].

В этой работе при помощи местного решения плоской задачи теории упругости [10] исследуется поведение поля напряжений в окрестности угловой точки контура, представляющей собой край поверхности соединения двух материалов, имеющих разные упругие свойства. На поверхности тела с одной стороны от края выполняются условия заделки, а с другой стороны поверхность свободна от внешней нагрузки. Составное тело подвергнуто внешней нагрузке, обуславливающей плоскую деформацию или плоское напряженное состояние. Рассматриваемая задача при помощи функции напряжений Эри приводится к отысканию собственных значений трехточечной краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения. Необходимые собственные значения вычислены на ЭВМ для плоского напряженного состояния составного тела при различных комбинациях значений параметров задачи. Анализ результатов вычислений показывает, что характер напряженного состояния около рассматриваемого края поверхности соединения существенным образом зависит от упругих деформативных характеристик соединенных материалов.

1. Пусть тело состоит из двух спаянных между собой по боковым поверхностям цилиндрических тел с различными характеристиками упругости. Поперечное сечение тела представляет собой составной сектор с прямолинейными сторонами $\varphi = \alpha$ и $\varphi = -\beta$ (фиг. 1), при этом $\varphi = 0$ — линия раздела областей I и II (контактная линия). Сторона $\varphi = \alpha$ заделана, то есть на стороне отсутствуют перемещения $u_r = u_\varphi = 0$. Сторона $\varphi = -\beta$ свободна, то есть $\sigma_\varphi = \tau_{r\varphi} = 0$. На остальной части боковой поверхности рассматриваемого тела действует внешняя нагрузка.

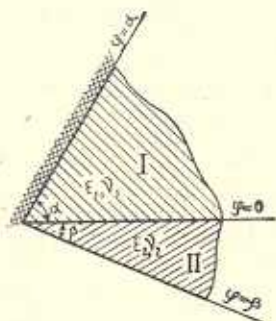
При отсутствии массовых сил компоненты напряжений σ_r , σ_φ , $\tau_{r\varphi}$ выражаются через функцию напряжений Эри $\Phi(r, \varphi)$ формулами

$$\sigma_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2}, \quad \sigma_\varphi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2}, \quad \tau_{r\varphi} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \right) \quad (1.1)$$

Функция Φ в областях I и II удовлетворяет бигармоническому уравнению

$$\nabla \nabla \Phi = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right)^2 \Phi = 0 \quad (1.2)$$

Задача решается в полярных координатах (r, φ) , причем полярная ось направлена по линии $\varphi = 0$ (фиг. 1).



Фиг. 1

Краевые условия и условия на линии раздела имеют вид [11, 12]

$$\begin{aligned} \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} = 0 & \quad \text{при } \varphi = -\beta \\ (2 + \nu_1) \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^3 \Phi_1}{\partial r^2 \partial \varphi} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial r \partial \varphi} + \frac{2}{r^3} \frac{\partial \Phi_1}{\partial \varphi} \right) + \\ + \frac{3}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial r \partial \varphi} - \frac{2}{r^3} \frac{\partial \Phi_1}{\partial \varphi} + \frac{1}{r^3} \frac{\partial^3 \Phi_1}{\partial \varphi^3} = 0 \\ \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi_1}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial \varphi^2} - \nu_1 \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial r^2} = 0 & \quad \text{при } \varphi = \alpha \end{aligned} \quad (1.3)$$

$$\Phi_1 = \Phi_2, \quad \frac{\partial \Phi_1}{\partial \varphi} = \frac{\partial \Phi_2}{\partial \varphi}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{E_1} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi_1}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial \varphi^2} - \nu_1 \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial r^2} \right) = \\ = \frac{1}{E_2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi_2}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial \varphi^2} - \nu_2 \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial r^2} \right) \\ \frac{1}{E_2} \left[(2 + \nu_1) \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^3 \Phi_1}{\partial r^2 \partial \varphi} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial r \partial \varphi} + \frac{2}{r^3} \frac{\partial \Phi_1}{\partial \varphi} \right) + \right. \\ \left. + \frac{3}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial r \partial \varphi} - \frac{2}{r^3} \frac{\partial \Phi_1}{\partial \varphi} + \frac{1}{r^3} \frac{\partial^3 \Phi_1}{\partial \varphi^3} \right] = \end{aligned} \quad (1.4)$$

$$= \frac{1}{E_2} \left[(2 + \nu_2) \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^3 \Phi_2}{\partial r^2 \partial \varphi} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial r \partial \varphi} + \frac{2}{r^3} \frac{\partial \Phi_2}{\partial \varphi} \right) + \right. \\ \left. + \frac{3}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial r \partial \varphi} - \frac{2}{r^3} \frac{\partial \Phi_2}{\partial \varphi} + \frac{1}{r^3} \frac{\partial^3 \Phi_2}{\partial \varphi^3} \right] \quad \text{при } \varphi = 0$$

где $\Phi_i (i=1, 2)$ представляют функцию Φ в областях I и II соответственно; E_i и $\nu_i (i=1, 2)$ — модули упругости и коэффициенты Пуассона материалов.

Решение уравнения (1.2) представляется в виде

$$\Phi_i = r^{\lambda+1} \theta_i(\lambda, \varphi) \quad (1.5)$$

Здесь λ — некоторый параметр, а

$$\theta_i = A_{i1} \sin(\lambda+1)\varphi + A_{i2} \cos(\lambda+1)\varphi + A_{i3} \sin(\lambda-1)\varphi + A_{i4} \cos(\lambda-1)\varphi \\ (i=1, 2) \quad (1.6)$$

представляет собой общее решение обыкновенного дифференциального уравнения

$$\theta_i^{IV} + 2(\lambda^2 + 1)\theta_i'' + (\lambda^2 - 1)^2 \theta_i = 0 \quad (1.7)$$

Имеем граничные условия

$$\theta_2(\lambda, \varphi) = 0, \quad \frac{\partial \theta_2(\lambda, \varphi)}{\partial \varphi} = 0 \quad \text{при } \varphi = -\beta$$

$$\frac{\partial^2 \theta_1}{\partial \varphi^2} + (\lambda+1)(1-\lambda\nu_1)\theta_1 = 0 \quad (1.8)$$

$$\frac{\partial^3 \theta_1}{\partial \varphi^3} + [(2+\nu_1)\lambda^2 + (1-\nu_1)\lambda + 1] \frac{\partial \theta_1}{\partial \varphi} = 0 \quad \text{при } \varphi = \alpha$$

и условия на линии соединения

$$\theta_1 = \theta_2, \quad \frac{\partial \theta_1}{\partial \varphi} = \frac{\partial \theta_2}{\partial \varphi}$$

$$\frac{1}{E_1} \left[\frac{\partial^2 \theta_1}{\partial \varphi^2} + (\lambda+1)(1-\lambda\nu_1)\theta_1 \right] = \frac{1}{E_2} \left[\frac{\partial^2 \theta_2}{\partial \varphi^2} + (\lambda+1)(1-\nu_2\lambda)\theta_2 \right] \quad (1.9)$$

$$\frac{1}{E_1} \left\{ \frac{\partial^3 \theta_1}{\partial \varphi^3} + [(2+\nu_1)\lambda^2 + (1-\nu_1)\lambda + 1] \frac{\partial \theta_1}{\partial \varphi} \right\} = \\ = \frac{1}{E_2} \left\{ \frac{\partial^3 \theta_2}{\partial \varphi^3} + [(2+\nu_2)\lambda^2 + (1-\nu_2)\lambda + 1] \frac{\partial \theta_2}{\partial \varphi} \right\} \quad \text{при } \varphi = 0$$

которые получены после подстановки (1.5) в (1.2), (1.3) и (1.4).

В (1.6) $A_{ij} (i=1, 2; j=1, 2, 3, 4)$ — постоянные интегрирования. Подставляя (1.6) в условия (1.8) и (1.9), получаем следующую однородную систему линейных уравнений относительно коэффициентов A_{ij} :

$$\begin{aligned}
& \lambda^+ \nu_1^+ S_1^+ A_{11} + \lambda^+ \nu_1^+ C_1^+ A_{12} + (\nu_1^+ \lambda^+ - 4) S_1^- A_{13} + (\nu_1^+ \lambda^+ - 4) C_1^- A_{14} = 0 \\
& \lambda^+ \nu_1^+ C_1^+ A_{11} - \lambda^+ \nu_1^+ S_1^+ A_{12} + (\nu_1^+ \lambda^- + 4) C_1^- A_{13} - (\nu_1^+ \lambda^- + 4) S_1^- A_{14} = 0 \\
& -S_2^+ A_{21} + C_2^+ A_{22} - S_2^- A_{23} + C_2^- A_{24} = 0 \\
& \lambda^+ C_2^+ A_{21} + \lambda^+ S_2^+ A_{22} + \lambda^- C_2^- A_{23} + \lambda^- S_2^- A_{24} = 0 \\
& \nu_1^+ \lambda^+ A_{12} + (\nu_1^+ \lambda^+ - 4) A_{14} - \mu \lambda^+ \nu_2^+ A_{22} - \mu (\nu_2^+ \lambda^+ - 4) A_{24} = 0 \quad (1.10) \\
& \nu_1^+ \lambda^+ A_{11} + (\nu_1^+ \lambda^- + 4) A_{13} - \mu \nu_2^+ \lambda^+ A_{21} - \mu (\nu_2^+ \lambda^- + 4) A_{23} = 0 \\
& \lambda^+ A_{11} + \lambda^- A_{13} - \lambda^+ A_{21} - \lambda^- A_{23} = 0 \\
& A_{12} + A_{14} - A_{22} - A_{24} = 0
\end{aligned}$$

В этой системе для краткости приняты обозначения

$$\mu = \frac{E_1}{E_2} \quad \lambda^+ = \lambda + 1, \quad \lambda^- = \lambda - 1, \quad \nu_i^+ = \nu_i + 1 \quad (i = 1, 2)$$

$$S_1^+ = \sin(\lambda + 1)\alpha, \quad S_2^+ = \sin(\lambda + 1)\beta, \quad S_1^- = \sin(\lambda - 1)\alpha,$$

$$S_2^- = \sin(\lambda - 1)\beta$$

$$C_1^+ = \cos(\lambda + 1)\alpha, \quad C_2^+ = \cos(\lambda + 1)\beta, \quad C_1^- = \cos(\lambda - 1)\alpha,$$

$$C_2^- = \cos(\lambda - 1)\beta$$

Для существования нетривиального решения однородной системы (1.10) линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов A_{ij} ($i = 1, 2$; $j = 1, 2, 3, 4$) необходимо, чтобы определитель этой системы равнялся нулю

$$\Delta(\lambda, \mu, \nu_1, \nu_2, \alpha, \beta) = 0 \quad (1.11)$$

После ряда громоздких преобразований условие (1.11) можно представить в виде

$$\begin{aligned}
& [m_1(\mu m_2 - m_1) \sin \alpha \sin \beta]^2 \lambda^4 - [4\mu^2(m_1^2 \sin^2 \alpha + m_2^2 \sin^2 \beta) + \\
& + 8m_1^2 \mu \sin \alpha \sin \beta \cos(\alpha + \beta)] \lambda^2 + (m_1 - 4)[(\mu m_2 - m_1)(\mu m_2 m_1 - \\
& - m_1^2 + 4m_1 - 4\mu m_1)] \sin^2 \lambda \beta \sin^2 \lambda \alpha + \lambda^2 \sin^2 \lambda \beta \{m_1^2(\mu m_2 - m_1)[4\mu - \\
& - (\mu m_2 - m_1)] \sin^2 \alpha\} - \{m_1(m_1 - 4)(\mu m_2 - m_1)[4 + \\
& + (\mu m_2 - m_1)] \sin^2 \beta\} \lambda^2 \sin^2 \lambda \alpha + 8\mu m_1(m_1 - 4) \sin \lambda \alpha \sin \lambda \beta \cos \lambda(\alpha + \beta) + \\
& + 4\mu^2 m_1(m_1 - 4) \sin^2 \lambda \alpha + 4\mu^2 m_2(m_2 - 4) \sin^2 \lambda \beta + 16\mu^2 = 0
\end{aligned} \quad (1.12)$$

где $m_1 = \nu_1^+$, $m_2 = \nu_2^+$.

Двукратный корень $\lambda = 1$ уравнения (1.11) исключаем, так как ему не соответствует нетривиальное решение рассматриваемой краевой задачи для функции Θ .

Уравнения (1.12) можно получить и другим путем [13].

В частных случаях уравнение (1.12) примет вид

$$\sin^2 \lambda \alpha = \frac{4}{(3 - \nu_1)(1 + \nu_1)} - \lambda^2 \frac{1 + \nu_1}{3 - \nu_1} \sin^2 \alpha \quad \text{при } \beta = 0 \quad (1.13)$$

$$\sin^2 \lambda \beta = \frac{4}{(3 - \nu_2)(1 + \nu_2)} - \lambda^2 \frac{1 + \nu_2}{3 - \nu_2} \sin^2 \beta \quad \text{при } \alpha = 0 \quad (1.14)$$

$$\sin^2 \lambda (\alpha + \beta) = \frac{4}{(3 - \nu)(1 + \nu)} - \lambda^2 \frac{1 + \nu}{3 - \nu} \sin^2 (\alpha + \beta) \quad \text{при } \mu = 1 \quad \nu_1 = \nu_2 = \nu \quad (1.15)$$

а когда $\mu = 0$, получаем

$$\sin^2 \lambda \beta - \lambda^2 \sin^2 \beta = 0 \quad (1.16)$$

$$\sin^2 \lambda \alpha - \frac{(\nu_1 + 1)^2}{(\nu_1 - 3)^2} \lambda^2 \sin^2 \alpha = 0 \quad (1.17)$$

Соотношения (1.13)–(1.15) совпадают с соотношениями, полученными в работах [14, 15], в которых исследованы напряжения вблизи вершины однородного сектора с одним заземленным и другим свободным краями. Тот же вопрос с применением комплексного переменного, рассмотрен в [13]. Соотношение (1.16) соответствует случаю ($E_1 \rightarrow 0$), когда тело является однородным клином со свободными краями, а соотношение (1.17) соответствует ($E_2 \rightarrow \infty$) клину с заземленными краями.

Для каждой комбинации конкретных значений параметров α , β , μ , ν_1 и ν_2 уравнение (1.12) имеет бесконечное множество корней, расположенных в комплексной плоскости λ симметрично относительно осей координат. Принимая, что все корни уравнения (1.12)—простые, пронумеруем их по возрастанию действительных частей так, чтобы нечетным номерам соответствовали корни (1.12), расположенные на верхней полуплоскости, а четным—на нижней.

Решение плоской задачи теории упругости в рассматриваемой области может быть представлено в виде ряда [16, 17]

$$\Phi = \sum_{i=-\infty}^{\infty} r^{\lambda_i + 1} \Theta(\varphi, \lambda_i) \quad (1.18)$$

где

$$\Theta(\varphi, \lambda_i) = \begin{cases} \Theta_1(\varphi, \lambda_i) & \text{при } 0 \leq \varphi \leq \alpha \\ \Theta_2(\varphi, \lambda_i) & \text{при } -\beta \leq \varphi \leq 0 \end{cases} \quad (1.19)$$

Система функций $\Theta(\varphi, \lambda_i)$ в интервале $(-\beta, \alpha)$ является четырехкратно полной в классе действительных функций, непрерывных со своими производными до четвертого порядка в интервалах $(-\beta, 0)$, $(0, \alpha)$ и удовлетворяющих условиям (1.8) и (1.9).

Члены ряда (1.18), соответствующие собственным значениям с отрицательными действительными частями, обуславливают напряжен-

ные состояния, приводящие к накоплению бесконечной энергии упругой деформации в конечном объеме окрестности края поверхности соединения [18]. После отбрасывания этих слагаемых в (1.18), остается двукратно полная система функций $\Theta(\varphi, \lambda_i)$, позволяющая представить в виде ряда два компонента внешней нагрузки на замыкающей части контура рассматриваемой области.

Из (1.1) и (1.18) видно, что если

$$0 < \operatorname{Re} \lambda_1 < 1$$

то напряжения при приближении к угловой точке линии раздела областей неограниченно возрастают, причем порядок особенности равен $|\operatorname{Re} \lambda_1 - 1|$. При $\operatorname{Re} \lambda_1 > 1$ напряжения затухают при приближении к краю поверхности соединения.

Исследование характера напряженного состояния в окрестности края поверхности соединения нагруженного составного тела при заданных граничных условиях в плоской задаче, таким образом, приводится к отысканию корней с наименьшей положительной действительной частью трансцендентного уравнения (1.12).

В зависимости от параметров $\alpha, \beta, \mu, \nu_1, \nu_2$ исходной задачи искомым корнем (1.12) определен на ЭВМ для двух серий различных комбинаций значений этих параметров.

2. Рассмотрены два случая $\mu > 1, \alpha + \beta > \frac{\pi}{4}$ и $\mu < 1, \alpha + \beta < \frac{\pi}{2}$.

Таблица 1

		$\alpha + \beta > 45^\circ \quad \nu_1 = \nu_2 = 0.3$									
$\frac{12\alpha}{\pi}$	$\frac{24\beta}{\pi}$	μ	1.00	1.0625	1.125	1.25	2.0	4.0	8.0	16.0	32.0
1	6		1.018	1.030	1.042	1.063	1.141	1.218	1.260	1.282	1.293
	7		0.926	0.936	0.946	0.962	0.023	1.079	1.110	1.125	1.133
	8		0.856	0.864	0.872	0.885	0.932	0.975	0.998	1.009	1.015
	9		0.801	0.808	0.814	0.825	0.862	0.896	0.913	0.921	0.926
2	4		1.018	1.037	1.054	1.087	1.227	1.401	1.525	1.602	1.645
	5		0.926	0.943	0.959	0.988	1.111	1.261	1.362	1.423	1.457
	6		0.856	0.871	0.885	0.910	1.015	1.135	1.213	1.256	1.278
	7		0.801	0.814	0.826	0.848	0.937	1.033	1.089	1.113	1.735
	8		0.758	0.770	0.780	0.799	0.973	0.949	0.991	1.013	1.023
	9		0.725	0.735	0.744	0.760	0.823	0.883	0.913	0.929	0.937
3	2		1.018	1.030	1.042	1.063	1.141	1.217	1.260	1.282	1.293
	3		0.926	0.941	0.954	0.978	1.075	1.177	1.237	1.270	1.286
	4		0.856	0.871	0.885	0.910	1.015	1.135	1.212	1.255	1.278
	5		0.801	0.816	0.830	0.855	0.961	1.092	1.181	1.234	1.263
	6		0.758	0.772	0.786	0.810	0.914	1.045	1.140	1.199	1.233
	7		0.725	0.738	0.751	0.774	0.873	0.997	1.085	1.138	1.167
	8		0.700	0.713	0.724	0.746	0.832	0.950	1.021	1.057	1.075
	9		0.683	0.695	0.706	0.726	0.812	0.907	0.957	0.978	0.988

а) Когда $\mu > 1$ и коэффициенты Пуассона обоих материалов одинаковы ($\nu_1 = \nu_2 = 0.3$), то анализ данных, полученных на ЭВМ и при-

веденных в табл. 1, показывает, что около частично заделанного края поверхности соединения нагруженного составного тела ($r \rightarrow 0$) напряжения затухают для всех $\mu > 1$ при значениях углов α и β , удовлетворяющих условию $\alpha + \beta < \varphi$, где предельные значения φ суммы $\alpha + \beta$ удовлетворяют условию $\varphi > \frac{\pi}{3}$. При дальнейшем увеличении μ интервал затухания напряжений увеличивается. При остальных значениях углов α и β напряжения имеют особенность при приближении к краю поверхности соединения материалов ($r \rightarrow 0$), причем порядок особенности напряжений убывает с увеличением $\mu = \frac{E_1}{E_2}$ и возрастает при увеличении значений углов α и β .

Таблица 2

		$\alpha + \beta > 45^\circ$	$\nu_1 = 0.4$	$\nu_2 = 0.2$							
$\frac{12\alpha}{\pi}$	$\frac{24\beta}{\pi}$	μ	1.00	1.0625	1.125	1.25	2.0	4.0	8.0	16.0	32.0
1	6		1.029	1.043	1.056	1.080	1.173	1.268	1.322	1.350	1.365
	7		0.943	0.955	0.966	0.985	1.058	1.129	1.168	1.188	1.198
	8		0.878	0.888	0.897	0.912	0.970	1.024	1.052	1.067	1.074
	9		0.828	0.836	0.843	0.856	0.902	0.943	0.965	0.975	0.481
2	3		1.097	1.117	1.135	1.170	1.313	1.488	1.608	1.681	1.722
	4		0.988	0.007	1.024	1.056	1.194	1.370	1.500	1.584	1.634
	5		0.907	0.924	0.940	0.969	1.095	1.255	1.373	1.448	1.493
	6		0.845	0.860	0.874	0.901	1.012	1.150	1.245	1.303	1.335
	7		0.797	0.811	0.824	0.847	0.945	1.059	1.133	1.174	1.196
	8		0.761	0.774	0.785	0.806	0.891	0.984	1.039	1.069	1.083
	9		0.735	0.746	0.756	0.775	0.848	0.923	0.964	0.985	0.995
3	2		0.970	0.982	0.993	1.013	1.086	1.158	1.199	1.220	1.231
	3		0.887	0.900	0.913	0.935	1.025	1.121	1.119	1.211	1.221
	4		0.824	0.837	0.850	0.874	0.972	1.086	1.159	1.201	1.224
	5		0.775	0.789	0.802	0.826	0.927	1.051	1.137	1.191	1.220
	6		0.739	0.752	0.765	0.788	0.888	1.017	1.114	1.179	1.218
	7		0.711	0.724	0.736	0.759	0.857	0.987	1.089	1.164	1.210
	8		0.692	0.704	0.716	0.738	0.833	0.961	1.064	1.145	1.903
	9		0.681	0.693	0.705	0.726	0.820	0.947	1.049	1.123	1.139

При относительном увеличении коэффициента Пуассона ν_1 , соответствующего материалу с большим модулем упругости ($E_1 > E_2$), находящемуся на стороне заделки, область затухания напряжений расширяется, а порядок особенности напряжений уменьшается (табл. 2). При относительном увеличении коэффициента Пуассона ν_2 , соответствующего материалу с меньшим модулем упругости, имеющему свободную поверхность, область затухания напряжений суживается, а порядок особенности напряжений увеличивается (табл. 3). Таким образом, изменение коэффициентов Пуассона влияет и на интервал затухания напряжений, и на особенности напряжений (табл. 2, 3).

б) Когда $\mu < 1$, $\alpha + \beta \leq 90^\circ$ и коэффициенты Пуассона обоих материалов одинаковы ($\nu_1 = \nu_2 = 0.3$).

Таблица 3

		$\alpha + \beta > 45^\circ$		$\nu_1 = 0.2$		$\nu_2 = 0.4$				
$\frac{\alpha}{12}$	$\frac{\beta}{24}$	1.00	1.0625	1.125	1.25	2.0	4.0	8.0	16.0	32.0
1	6	1.006	1.017	1.027	1.045	1.111	1.173	1.206	1.223	1.232
	7	0.909	0.918	0.926	0.940	0.990	1.036	1.060	1.073	1.079
	8	0.835	0.842	0.849	0.860	0.899	0.934	0.952	0.961	0.966
2	4	1.050	1.069	1.087	1.120	1.259	1.426	1.536	1.599	1.634
	5	0.946	0.963	0.978	1.007	1.124	1.257	1.339	1.385	1.409
	6	0.866	0.882	0.894	0.918	1.013	1.116	1.176	1.207	1.223
	7	0.804	0.816	0.827	0.847	0.930	1.004	1.047	1.069	1.081
	8	0.754	0.765	0.774	0.791	0.854	0.915	0.948	0.964	0.972
3	2	1.074	1.088	1.101	1.123	1.208	1.288	1.332	1.354	1.366
	3	0.973	0.989	1.004	1.030	1.134	1.242	1.304	1.337	1.353
	4	0.894	0.910	0.925	0.952	1.064	1.191	1.268	1.310	1.331
	5	0.831	0.846	0.861	0.887	0.999	1.131	1.217	1.264	1.288
	6	0.780	0.794	0.808	0.833	0.933	1.064	1.143	1.186	1.207
	7	0.740	0.753	0.765	0.788	0.884	0.992	1.055	1.086	1.001
	8	0.707	0.720	0.731	0.752	0.836	0.924	0.969	0.990	1.000
	9	0.683	0.694	0.704	0.723	0.795	0.864	0.896	0.910	0.917

Таблица 4*

		$\alpha + \beta < 90^\circ$		$\nu_1 = \nu_2 = 0.3$				
$\frac{12\alpha}{\pi}$	$\frac{24\beta}{\pi}$	0.9375	0.875	0.75	0.5	0.25	0.125	0.0625
1	1							
	2	1.863	1.822	1.729	1.491	1.542	1.142	0.833
	3	1.511	1.479	1.408	1.221	0.928	0.830	0.609
	4	1.282	1.257	1.201	1.052	0.810	0.690	0.512
	5	1.121	1.102	1.058	0.936	0.732	0.609	0.459
	6	1.004	0.983	0.953	0.652	0.676	0.557	0.425
2	1	1.523	1.503	1.455	1.317	1.056	0.808	0.604
	2	1.282	1.257	1.201	1.052	0.810	0.608	0.457
	3	1.116	1.093	1.039	0.901	0.688	0.518	0.397
	4	0.997	0.976	0.927	0.803	0.614	0.468	0.368
	5	0.908	0.889	0.846	0.735	0.566	0.436	0.354
	6	0.840	0.823	0.785	0.686	0.533	0.416	0.352
3	1	1.129	1.119	1.093	1.014	0.846	0.768	0.512
	2	1.004	0.988	0.953	0.852	0.674	0.618	0.340
	3	0.911	0.894	0.855	0.752	0.585	0.450	0.359
	4	0.840	0.823	0.784	0.685	0.531	0.413	0.346
	5	0.786	0.769	0.732	0.637	0.496	0.393	0.352
	6	0.744	0.728	0.693	0.603	0.473	0.383	0.386

* Пропущенные в таблицах 4, 5 и 6 корни больше двух.

Анализ данных, приведенных в табл. 4, показывает, что напряжения затухают около частично заделанного края поверхности соедине-

ния нагруженного составного тела ($r \rightarrow 0$) при значениях углов α и β , удовлетворяющих условию $\alpha + \beta < \varphi$, где предельные значения φ суммы $\alpha + \beta$ больше $\frac{7}{12}\pi$ для всех $\mu > \mu_1$, а μ_1 изменяется в пределах

$0.75 > \mu_1 > 0.5$. При уменьшении $\mu = \frac{E_1}{E_2}$ интервал затухания напряжений суживается и при значениях $\mu \leq 0.0625$ полностью исчезает, независимо от значений углов α и β . Для остальных значений углов α и β напряжения имеют особенность при $r = 0$, то есть при приближении к краю поверхности соединения материалов напряжения неограниченно возрастают. Порядок особенности напряжений увеличивается с уменьшением соотношения $\mu = \frac{E_1}{E_2}$ и с увеличением значений α и β .

При относительном увеличении коэффициента Пуассона ν_1 , соответствующего материалу с меньшим модулем упругости ($E_1 < E_2$), имеющему заделанную поверхность, область затухания напряжений суживается, а порядок особенности напряжений увеличивается. При увеличении ν_2 , соответствующего материалу с большим модулем упругости ($E_2 > E_1$), имеющему свободную поверхность, область затухания напряжений расширяется, а порядок особенности напряжений уменьшается (табл. 5, 6).

Таблица 5

$\alpha + \beta < 90^\circ$		$\nu_1 = 0.4$			$\nu_2 = 0.2$				
$\alpha / \frac{\pi}{12}$	$\beta / \frac{\pi}{24}$	μ	0.9375	0.875	0.75	0.5	0.25	0.125	0.0625
1	1								
	2	1.804	1.763	1.673	1.441	1.087	0.803	0.592	
	3	1.482	1.440	1.376	1.189	0.902	0.671	0.502	
	4	1.270	1.244	1.186	1.033	0.792	0.596	0.452	
	5	1.122	1.101	1.053	0.926	0.719	0.547	0.423	
	6	1.013	0.996	0.956	0.849	0.668	0.515	0.406	
2	1	1.450	1.431	1.387	1.257	1.012	0.779	0.586	
	2	1.227	1.203	1.151	1.010	0.781	0.591	0.449	
	3	1.076	1.052	1.002	0.871	0.667	0.507	0.396	
	4	0.968	0.947	0.900	0.780	0.600	0.461	0.374	
	5	0.889	0.870	0.827	0.718	0.556	0.434	0.368	
	6	0.829	0.811	0.773	0.674	0.526	0.418	0.378	
3	1	1.075	1.065	0.041	0.967	0.811	0.645	0.499	
	2	0.958	0.943	0.910	0.816	0.651	0.505	0.398	
	3	0.872	0.866	0.821	0.724	0.569	0.444	0.368	
	4	0.809	0.793	0.757	0.663	0.520	0.413	0.368	
	5	0.761	0.745	0.710	0.621	0.489	0.399	0.400	
	6	0.724	0.709	0.676	0.592	0.470	0.396	0.521	

Итак, изменение коэффициентов Пуассона влияет на особенность напряжения и влечет за собой существенное изменение интервала остальных параметров задачи, когда напряжения неограниченно возрастают при приближении к краю поверхности соединения материалов.

Подробный анализ искомого корня уравнения (1.12) показывает, что в диапазоне изменения суммы углов $0 < \alpha + \beta < \pi$ в зависимости от значений углов α и β , а также от деформативных характеристик

Таблица 6

		$\alpha + \beta = 90^\circ$		$\nu_1 = 0.2$		$\nu_2 = 0.4$			
$\alpha / \frac{\pi}{12}$	$\frac{24\beta}{\pi}$	μ	0.9375	0.875	0.75	0.5	0.25	0.125	0.0625
1	1						1.611	1.190	0.866
	2	1.927	1.885	1.791	1.547	1.169	0.860	0.629	0.629
	3	1.541	1.510	1.440	1.254	0.958	0.712	0.526	0.526
	4	1.291	1.268	1.216	1.072	0.831	0.625	0.676	0.676
	5	1.119	1.101	1.061	0.947	0.747	0.569	0.431	0.431
	6	0.994	0.980	0.948	0.856	0.686	0.529	0.406	0.406
2	1	1.609	1.876	1.537	1.387	1.107	0.842	0.626	0.626
	2	1.346	1.320	1.260	1.101	0.843	0.629	0.468	0.468
	3	1.163	1.138	1.082	0.937	0.712	0.532	0.402	0.402
	4	1.029	1.007	0.957	0.829	0.632	0.477	0.367	0.367
	5	0.928	0.909	0.866	0.754	0.579	0.441	0.347	0.347
	6	0.851	0.835	0.797	0.698	0.542	0.418	0.338	0.338
3	1	1.195	1.184	1.156	1.070	0.888	0.695	0.527	0.527
	2	1.059	1.042	1.004	0.894	0.702	0.533	0.405	0.405
	3	0.956	0.938	0.896	0.784	0.604	0.459	0.356	0.356
	4	0.877	0.856	0.817	0.710	0.645	0.417	0.334	0.334
	5	0.814	0.797	0.757	0.657	0.506	0.392	0.327	0.327
	6	0.765	0.748	0.712	0.618	0.479	0.377	0.333	0.333

материалов, напряжения при приближении к краю поверхности соединения затухают или беспредельно возрастают. Конечные напряжения при $r = 0$ возникают только при эпизодических комбинациях α , β , ν_1 , ν_2 .

Автор считает своим долгом выразить глубокую признательность К. С. Чобаняну за внимание к этой работе.

Ереванский политехнический
институт им. К. Маркса

Поступила 11 II 1972

Ա. Գ. ԱՎԵՏԻՅԱՆ

ԼԱՐՎԱԾԱՅԻՆ ՎԻՃԱԿԻ ԲՆՈՒՅԹԻ ՈՒՍՈՒՄԵԱՍԻՐՈՒԹՅՈՒՆԸ ԲԵՌՆԱՎՈՐՎԱԾ
ԲԱՂԱԳՐՅԱԼ ՄԱՐՄՆԻ ՄԻԱՑՄԱՆ ՄԱԿԵՆԵՎՈՒՅԹԻ ՄԱՍՍԵՐ
ԱՄՐԱԿՑՎԱԾ ԵԶՐԻ ՇՐՋԱԿԱՅՔՈՒՄ

Ա մ փ ո փ ո լ մ

Աշխատանքում առաձգականության տեսության հարթ խնդրի տեղական լուծումների օգնությամբ ռատամնաիրվում է լարումների դաշտի վարքը բազադրյալ մարմնի միացման մակերևույթի եզրի մոտ, երբ միացված մարմիններ-

րից մեկի արտաքին մակերևույթը ամրակցված է, իսկ երկրորդ մարմնի արտաքին մակերևույթը՝ ազատ:

Գիտարկվող խնդրի լուծումը բերվում է գծային սովորական դիֆերենցիալ հավասարման համար բազմակետ ոչ ինքնահամալուծ եզրային խնդրի մի սեփական արժեքի որոնման:

Խնդրի պարամետրերի որոշ արժեքների համար կատարված է հաշվարկների արդյունքների վերլուծություն և բացահայտված է լարվածային վիճակի բնույթը՝ կախված միացված նյութերի առաձգական բնութագրից և միացման մակերևույթի ու մարմնի արտաքին մակերևույթի միջև կազմված նյութերին վերաբերվող անկյուններից:

INVESTIGATION ON THE NATURE OF STRESS STATE IN THE NEIGHBOURHOOD OF THE PARTLY FIXED BRINK OF THE JUNCTION SURFACE OF A LOADED COMPOSITE BODY

A. G. AVETISIAN

S u m m a r y

By means of local solution of the plane problem in the theory of elasticity the behaviour of the stress field in the neighbourhood of the brink of the junction surface of a body is investigated where the external surface of one of the joined bodies is fixed and that of the second is free. The solution of the problem is reduced to the determination of a proper value of a multipoint non-self-adjoint boundary-value problem for a linear ordinary differential equation.

An analysis of the calculation results is carried out for the parameter values, and the nature of stress state, depending on the characteristics of joined elastic materials and angles between the junction surface and surface of the body is revealed.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Мусхелишвили И. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.—Л., 1949.
2. *Мизлин С. Г.* Плоская задача теории упругости для неоднородной среды. Тр. Сейсмолог. ин-та АН СССР, № 66, 1935.
3. *Шерман Д. И.* Плоская задача теории упругости для анизотропной среды. Тр. Сейсмолог. ин-та АН СССР, № 86, 1938, стр. 51—78.
4. *Аксентюк О. К.* Особенности напряженно-деформированного состояния плиты в окрестности ребра. ПММ, т. 31, вып. 1, 1967, стр. 178—186.
5. *Williams M. L.* The stresses around a fault or a crack in dissimilar media. Bulletin of the seismological society of America, v. 49, 1959.
6. *Williams M. L. and Zak A.* Crack point stress singularities at a bimaterial interface. J. of Appl. Mech., v. 30, № 1, 1963.

7. Чобанян К. С. Авт. свид. № 307869. Бюллетень № 21, 1971.
8. Боджи Д. Действие касательных и нормальных нагрузок на прямоугольные упругие пластины, выполненные из разных материалов и соединенные по граням. ПМ, ТР, т. 35, серия Е, № 3, 1968.
9. Чобанян К. С., Геворкян С. Х. Поведение поля напряжений около угловой точки линии раздела в задаче плоской деформации составного упругого тела. Изв. АН АрмССР, Механика, т. XXIV, № 5, 1971.
10. Klein M. Zur theorie der Druckversuchs. Abhand der Aerodynamische Inst. u. d. Techn. Hochschule, Aachen, Germany, v. 7, 1927, p. 43—62.
11. Чобанян К. С. О функции напряжений для плоской задачи теории упругости составных тел. Докл. АН АрмССР, т. XXXII, № 2, 1961.
12. Ду-Цин-Хуа. Плоская задача теории упругости неоднородной изотропной среды. Проблемы механики сплошной среды. К семидесятилетию акад. Н. И. Мусхелишвили. Изд. АН СССР, М., 1961.
13. Каландия А. И. Замечания об особенностях упругих решений вблизи углов. ПММ, т. 33, вып. 1, 1969.
14. Williams M. L. Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plates in extension. J. of Appl. Mech., v. 19, 1952.
15. Уфлянд Н. С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Изд. АН СССР, М.—Л., 1963.
16. Келдыш М. В. О собственных значениях и собственных функциях некоторых несамосопряженных уравнений. Докл. АН СССР, № 1, т. 77, 1951.
17. Воронич И. И. О поведении основных краевых задач плоской теории упругости в окрестности особых точек границы. Тезисы докладов на III Всесоюзном съезде по теоретической и прикладной механике. М., 1968.
18. Benthem Y. P. A Laplace transform method for the solution of semi-infinite and finite strip problems in stress analysis. Quart Mech. and Appl. Math., т. XVI, 4, 1963.