ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXV, № 5, 1972 Механика

С. О. САРКИСЯН

О МЕТОДЕ УПРУГИХ РЕШЕНИЙ В ТЕОРИИ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК

Основные уравнения теории малых упруго-пластических деформаций тонкой цилиндрической оболочки представляют собой эллиптическую квазилинейную систему, которая получается из уравнений равновесия [1]

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial T_1}{\partial x}+\frac{\partial S_{12}}{\partial y}=X \\
\frac{\partial T_2}{\partial y}+\frac{\partial S_{12}}{\partial x}+\frac{1}{R}\left(\frac{\partial M_2}{\partial y}+\frac{\partial H}{\partial x}\right)=Y \\
\frac{1}{R} T_2-\frac{\partial^2 M_1}{\partial x^2}-2 \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y}-\frac{\partial^2 M_2}{\partial y^2}=Z
\end{gathered} \tag{1}
$$

где вместо усилий и моментов подставлено их выражение через деформации [2]

$$
\begin{gathered}
\frac{3}{4} T_1=\left(\varepsilon_1+\frac{1}{2} \varepsilon_2\right) J_1-\left(x_1+\frac{1}{2} x_2\right) J_2 \\
\frac{3}{4} T_2=\left(\varepsilon_2+\frac{1}{2} \varepsilon_1\right) J_1-\left(x_2+\frac{1}{2} x_1\right) J_2 \\
\frac{3}{2} S_{12}=\frac{3}{2} S_{21}=\varepsilon_{12} J_1-x_{12} J_2 \\
\frac{3}{4} M_1=\left(\varepsilon_1+\frac{1}{2} \varepsilon_2\right) J_2-\left(x_1+\frac{1}{2} x_2\right) J_3 \\
\frac{3}{4} M_2=\left(\varepsilon_2+\frac{1}{2} \varepsilon_1\right) J_2-\left(x_2+\frac{1}{2} x_1\right) J_3 \\
\frac{3}{2} H=\varepsilon_{12} J_2-x_{12} J_3
\end{gathered} \tag{2}
$$

В этих выражениях $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_{12}$—соответственно относительные удлинения и сдвиг элемента срединной поверхности оболочки, x_1, x_2, x_{12}—изменения нормальных кривизн и кручения

$$
\varepsilon_1=u_x, \quad \varepsilon_2=v_y+\frac{1}{R} w, \quad \varepsilon_{12}=u_y+v_x \tag{3}
$$

$$
x_1=-w_{xx}, \quad x_2=-w_{yy}+\frac{1}{R} v_y, \quad x_{12}=-w_{xy}+\frac{1}{R} v_x \tag{4}
$$

Далее, в формулах (2)

$$J_1 = \int\limits_{-h/2}^{h/2} \frac{\sigma_i}{e_i} dz, \quad J_2 = \int\limits_{-h/2}^{h/2} \frac{\sigma_i}{e_i} z dz, \quad J_3 = \int\limits_{-h/2}^{h/2} \frac{\sigma_i}{e_i} z^2 dz \tag{5}$$

σ_i — интенсивность напряжений, e_i — интенсивность деформаций. Между σ_i и e_i существует определенный закон

$$\sigma_i = 3G[1 - \omega(e_i)]\, e_i \tag{6}$$

где G — модуль сдвига материала, ω — функция e_i, определяющая пластические свойства материала и для реальных материалов с упрочнением, удовлетворяющая условиям [2, 3]

$$0 \leqslant \omega(e_i) \leqslant \omega(e_i) + \frac{d\omega}{de_i} e_i \leqslant \lambda < 1 \tag{7}$$

Как легко видеть, эти условия равносильны следующим условиям:

$$0 \leqslant \omega(e_i) \leqslant \omega(e_i) + \frac{\omega(e_i) - \omega(e_i')}{e_i - e_i'} e_i' = \frac{d[\omega(e_i^0)\, e_i^0]}{de_i^0} \leqslant \lambda < 1 \tag{8}$$

Интенсивность деформаций для оболочки имеет следующее выражение [2]

$$e_i = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{P_\varepsilon - 2zP_{\varepsilon\varkappa} + z^2 P_\varkappa} \tag{9}$$

где

$$P_\varepsilon = \varepsilon_1^2 + \varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_{12}^2$$

$$P_{\varepsilon\varkappa} = \varepsilon_1\varkappa_1 + \varepsilon_2\varkappa_2 + \frac{1}{2}\varepsilon_1\varkappa_2 + \frac{1}{2}\varepsilon_2\varkappa_1 + \varepsilon_{12}\varkappa_{12} \tag{10}$$

$$P_\varkappa = \varkappa_1^2 + \varkappa_1\varkappa_2 + \varkappa_2^2 + \varkappa_{12}^2$$

Пусть оболочка в плане занимает область S с границей Γ

$$S = \{(x, y) : |x| < l_1,\ |y| < l_2\}, \quad \Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2, \quad \Gamma_1 = \Gamma_1' \cup \Gamma_1^2$$

$$\Gamma_1' = \{(x, y) : x = -l_1,\ |y| \leqslant l_2\}, \quad \Gamma_1^2 = \{(x, y) : x = l_1,\ |y| \leqslant l_2\}$$

$$\Gamma_2 = \Gamma \setminus \Gamma_1 \qquad \left(kl_2 = \pi, \quad k = \frac{1}{R}\right)$$

Здесь l_1 — полудлина оболочки, Γ_1', Γ_1^2 — левый и правый торец оболочки соответственно. Будем рассматривать следующие граничные задачи.

I) Найти решение (1), если

$$u|_{\Gamma_1} = v|_{\Gamma_1} = w|_{\Gamma_1} = w_x|_{\Gamma_1} = 0 \tag{11}$$

граничные условия на Γ_2

$$u,\ v,\ w,\ w_y,\ T_n,\ S_n,\ N_n,\ M_n \Big|_{y=-l_2}^{y=l_2} = 0 \tag{12}$$

где n означает нормальное сечение оболочки, T_n—нормальное к контуру усилие в плоскости оболочки, S_n—тангенциальное, N_n—перерезывающее усилие, M_n—изгибающий момент.

II) Найти решение (1), если

$$T_1|_{\Gamma_1} = T_1^*, \quad \left(S_{12} + \frac{1}{R} H\right)_{\Gamma_1} = S_{12}^* \qquad (13)$$
$$(N_1 + H_y)_{\Gamma_1} = N_1^*, \quad M_2|_{\Gamma_1} = M_1$$

условия на Γ_2—те же самые (12).

Для решения задач (I), (II) будут использованы следующие специальные функциональные пространства.

Класс функций, заданных в полосе $|x| \leqslant l_1$, периодических по y с периодом $2l_2$, в зависимости от вводимой метрики в нем может приводить к различным функциональным пространствам. В отличие от обычных пространств $C(S)$, $L_p(S)$, $W_p^{(r)}(S)$, будем снабжать пространства в случае периодичности по y значком градус.

Важнейшие свойства вышеупомянутых классов функций полностью переносятся на случаи частичной и полной периодичности. В частности, пространство $W_p^{(r)}(S^\circ)$ вполне аналогично пространству С. Л. Соболева и для него справедливы [7] такого же рода теоремы вложения [6], как для классов $W_p^{(r)}(S)$.

Пусть C_1—множество вектор-функций $\bar{\varphi}(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$, удовлетворяющих граничным условиям (11); функции φ_1, φ_2 имеют интегрируемые с квадратом первые производные в S, а φ_3 имеют интегрируемые с квадратом вторые производные в S. Зададим на C_1 скалярное произведение

$$(a, b)_{H_1(S^\circ)} = D \int_S \delta P_\varkappa dS + C \int_S \delta P_\varepsilon dS \qquad (14)$$

где

$$\delta P_\varkappa = \varkappa_1^{(a)} \varkappa_1^{(b)} + \frac{1}{2} \varkappa_1^{(a)} \varkappa_2^{(b)} + \frac{1}{2} \varkappa_1^{(b)} \varkappa_2^{(a)} + \varkappa_2^{(a)} \varkappa_2^{(b)} + \varkappa_{12}^{(a)} \varkappa_{12}^{(b)} \qquad (15)$$

$$\delta P_\varepsilon = \varepsilon_1^{(a)} \varepsilon_1^{(b)} + \frac{1}{2} \varepsilon_1^{(a)} \varepsilon_2^{(b)} + \frac{1}{2} \varepsilon_1^{(b)} \varepsilon_2^{(a)} + \varepsilon_2^{(a)} \varepsilon_2^{(b)} + \varepsilon_{12}^{(a)} \varepsilon_{12}^{(b)} \qquad (16)$$

D—обычная цилиндрическая жесткость оболочки, C—жесткость оболочки на растяжение.

Замыкание C_1 в норме (14) назовем пространством $H_1(S^\circ)$. Следовательно,

$$a^2_{H_1(S^\circ)} = D \int_S (\varkappa_1^2 + \varkappa_1\varkappa_2 + \varkappa_2^2 + \varkappa_{12}^2)\, dS +$$
$$+ C \int_S (\varepsilon_1^2 + \varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_{12}^2)\, dS \qquad (17)$$

Аналогично, пусть C_2—множество вектор-функций $\overline{\varphi}(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$, удовлетворяющих условиям

$$\int_S \overline{\varphi}\, dS = 0, \qquad \int_S r \times \overline{\varphi}\, dS = 0 \tag{18}$$

где функции φ_1, φ_2 имеют интегрируемые с квадратом первые производные в S, а φ_3 имеет интегрируемые с квадратом вторые производные в S. Скалярное произведение на C_2 задаем по-прежнему (14). Замыкая C_2 во введенной норме, получаем гильбертово пространство $H_2(S^\circ)$.

Для дальнейших рассмотрений удобно для произвольных вектор-функций $\overline{\omega}(u, v, w)$, где $w(x, y)$—дважды дифференцируемая функция, а $u(x, y)$, $v(x, y)$—дифференцируемые функции, ввести в точке скалярное произведение и норму по формулам

$$(\overline{\omega}_1, \overline{\omega}_2) = \delta P_\varepsilon - 2z\delta P_{\varepsilon\varkappa} + z^2\delta P_\varkappa \tag{19}$$

$$\|\overline{\omega}\| = \sqrt{P_\varepsilon - 2zP_{\varepsilon\varkappa} + z^2 P_\varkappa} = \frac{\sqrt{3}}{2} e_i \tag{20}$$

где δP_ε, $\delta P_{\varepsilon\varkappa}$, $\delta P_\varkappa$, согласно выражениям (10), представляют собой

$$\delta P_\varepsilon = \varepsilon_1^{(\overline{\omega}_1)} \varepsilon_1^{(\overline{\omega}_2)} + \frac{1}{2} \varepsilon_1^{(\overline{\omega}_1)} \varepsilon_2^{(\overline{\omega}_2)} + \frac{1}{2} \varepsilon_1^{(\overline{\omega}_2)} \varepsilon_2^{(\overline{\omega}_1)} + \varepsilon_2^{(\overline{\omega}_1)} \varepsilon_2^{(\overline{\omega}_2)} + \varepsilon_{12}^{(\overline{\omega}_1)} \varepsilon_{12}^{(\overline{\omega}_2)} \tag{21}$$

$$\delta P_\varkappa = \varkappa_1^{(\overline{\omega}_1)} \varkappa_1^{(\overline{\omega}_2)} + \frac{1}{2} \varkappa_1^{(\overline{\omega}_1)} \varkappa_2^{(\overline{\omega}_2)} + \frac{1}{2} \varkappa_1^{(\overline{\omega}_2)} \varkappa_2^{(\overline{\omega}_1)} + \varkappa_2^{(\overline{\omega}_1)} \varkappa_2^{(\overline{\omega}_2)} + \varkappa_{12}^{(\overline{\omega}_1)} \varkappa_{12}^{(\overline{\omega}_2)} \tag{22}$$

$$\delta P_{\varepsilon\varkappa} = \varepsilon_1^{(\overline{\omega}_1)} \varkappa_1^{(\overline{\omega}_2)} + \varepsilon_2^{(\overline{\omega}_1)} \varkappa_2^{(\overline{\omega}_2)} + \frac{1}{2} \varepsilon_1^{(\overline{\omega}_1)} \varkappa_2^{(\overline{\omega}_2)} + \frac{1}{2} \varepsilon_2^{(\overline{\omega}_1)} \varkappa_1^{(\overline{\omega}_2)} +$$

$$+ \frac{1}{2} \varepsilon_1^{(\overline{\omega}_2)} \varkappa_2^{(\overline{\omega}_1)} + \frac{1}{2} \varepsilon_2^{(\overline{\omega}_2)} \varkappa_1^{(\overline{\omega}_1)} + \varepsilon_{12}^{(\overline{\omega}_1)} \varkappa_{12}^{(\overline{\omega}_2)} \tag{23}$$

Легко проверить, что при этом выполняются аксиомы скалярного произведения, за исключением одной: из $\|\overline{\omega}\| = 0$ не следует $\overline{\omega} = 0$, но мы этим свойством в дальнейшем не пользуемся.

Определение 1. Обобщенным решением задачи (I) назовем вектор-функцию $a(u, v, w) \in H_1(S^\circ)$, удовлетворяющую интегральному равенству

$$(a, \overline{\varphi})_{H_1(S^\circ)} = 4G \int_S \int_{-h/2}^{h/2} \omega(a, \overline{\varphi})\, dS dz + \int_S (X\varphi_1 + Y\varphi_2 + Z\varphi_3)\, dS \tag{24}$$

для любой вектор-функции $\overline{\varphi}(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) \in H_1(S^0)$.

Определение 2. Обобщенным решением задачи (II) назовем вектор-функцию $b(u, v, w) \in H_2(S^\circ)$, удовлетворяющую интегральному равенству

$$(b, \bar{\varphi})_{H_2(S^\circ)} = 4G\int\limits_S \int\limits_{-h/2}^{h/2} \omega(b, \bar{\varphi})dSdz + \int\limits_S (X\varphi_1 + Y\varphi_2 + Z\varphi_3)dS +$$

$$+ \int\limits_{\Gamma_1} (T_1^*\varphi_1 + S_{12}^*\varphi_2 + N_1^*\varphi_3 + M_1^*\varphi_{3x})\, d\Gamma_1 \tag{25}$$

для любой вектор-функции $\bar{\varphi}(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) \in H_2(S^\circ)$.

Заметим, что если некоторая вектор-функция—обобщенное решение задачи (I) или (II) в смысле принятого выше определения, то выполнены все условия равновесия оболочки, если их сформулировать с помощью принципа возможных перемещений Лагранжа.

Заметим также, что в случае задачи (II) необходимые условия разрешимости задачи (II) состоят в том [5], что система внешних сил должна быть статически эквивалентна нулю. В последующем в случае задачи (II) мы предполагаем, что выполняются необходимые условия равновесия оболочки. Используя результат [4], получим, что если $\bar{\varphi} \in H_1(S^\circ)$, то $\varphi_1, \varphi_2 \in W_2^{(1)}(S^\circ)$, $\varphi_3 \in W_2^{(2)}(S^\circ)$. Если обозначим норму в $W_p^{(r)}(S^\circ)$ через $\|\cdot\|_{r,\,p,\,S}$, а норму в $C(S^\circ)$—через $|\cdot|$, из теоремы вложения [6] вытекает, что $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_{3x}, \varphi_{3y} \in L_p(S^\circ)$, $1 < p < \infty$, $\varphi_3 \in C(S^\circ)$ и, кроме того,

$$\Omega \leqslant m\|\bar{\varphi}\|_{H_1(S^\circ)} \quad (m > 0) \tag{26}$$

где

$$\Omega = |\varphi_3|, \quad \|f\|_{0,\,p,\,a}, \quad \|\chi\|_{0,\,2,\,S}$$

$$f = u,\ v,\ w_x,\ w_y; \quad a = S,\ \gamma$$

$$\chi = \varphi_{3xx},\ \varphi_{3yy},\ \varphi_{3xy},\ \varphi_{1x},\ \varphi_{2x},\ \varphi_{1y},\ \varphi_{2y}$$

Здесь γ—кусочно-гладкий контур из S, $1 < p < \infty$, а m не зависит от выбора $\bar{\varphi}$, но зависит от $\{a, p\}$.

Если теперь $\bar{\varphi} \in H_2(S^\circ)$, нетрудно убедиться, что $\varphi_1, \varphi_2 \in W_2^{(1)}(S^\circ)$, $\varphi_2 \in W_2^{(2)}(S^\circ)$ и имеют место все вышеупомянутые теоремы вложения и неравенства (26).

Введем операторы A и B соотношениями

$$(Aa, \bar{\varphi})_{H_1(S^\circ)} = 4G\int\limits_S \int\limits_{-h/2}^{h/2} \omega(a, \bar{\varphi})dSdz + \int\limits_S (X\varphi_1 + Y\varphi_2 + Z\varphi_3)\, dS \tag{27}$$

для любого $\bar{\varphi}(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) \in H_1(S^\circ)$ и

$$(Bb, \bar{\varphi})_{H_2(S^\circ)} = 4G\int\limits_S \int\limits_{-h/2}^{h/2} \omega(b, \bar{\varphi})dSdz + \int\limits_S (X\varphi_1 +$$

$$+ Y\varphi_2 + Z\varphi_3)dS + \int\limits_{\Gamma_1} (T_1^*\varphi_1 + S_{12}^*\varphi_2 + N_1^*\varphi_3 + M_1^*\varphi_{3x})d\Gamma_1 \tag{28}$$

для любого $\bar{\varphi}(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)\in H_2(S^\circ)$. Легко показать, что операторы A и B действуют соответственно в пространствах $H_1(S^\circ)$ и $H_2(S^\circ)$. В самом деле, при фиксированном $b\in H_2(S^\circ)$, если $X, Y\in L_p(S^\circ)$; $T_1^*, S_{12}^*, M_1^*\in L_p(\Gamma_1^0)$, $Z\in L_q(S^\circ)$, $N_1^*\in L_q(\Gamma_1^0)$, где $1<p<\infty$, $1\leqslant q<\infty$, имеем

$$\Big|4G\int\limits_S\int\limits_{-h/2}^{h/2}\omega(b, \bar{\varphi})\,dSdz+\int\limits_S(X\varphi_1+Y\varphi_2+Z\varphi_3)\,dS+$$

$$+\int\limits_{\Gamma_1}(T_1^*\varphi_1+S_{12}^*\varphi_2+N_1^*\varphi_3+M_1^*\,\varphi_{3,x})d\Gamma_1\Big|\leqslant 4G\lambda\int\limits_S\int\limits_{-h/2}^{h/2}|(b, \bar{\varphi})|\,dSdz+$$

$$+\Big(\int\limits_S X^p dS\Big)^{\frac{1}{p}}\Big(\int\limits_S\varphi_1^{p'}dS\Big)^{\frac{1}{p'}}+\Big(\int\limits_S Y^p dS\Big)^{\frac{1}{p}}\Big(\int\limits_S\varphi_2^{p'}\,dS\Big)^{\frac{1}{p'}}+$$

$$+\Big(\int\limits_S Z^q dS\Big)^{\frac{1}{q}}\Big(\int\limits_S\varphi_3^{q'}\,dS\Big)^{\frac{1}{q'}}+\Big(\int\limits_{\Gamma_1}(T_1^*)^p\,d\Gamma_1\Big)^{\frac{1}{p}}\Big(\int\limits_{\Gamma_1}\varphi_1^{p'}d\Gamma_1\Big)^{\frac{1}{p'}}+$$

$$+\Big(\int\limits_{\Gamma_1}(S_{12}^*)^p d\Gamma_1\Big)^{\frac{1}{p}}\Big(\int\limits_{\Gamma_1}\varphi_2^{p'}d\Gamma_1\Big)^{\frac{1}{p'}}+\Big(\int\limits_{\Gamma_1}(N_1^*)^q d\Gamma_1\Big)^{\frac{1}{q}}\Big(\int\limits_{\Gamma_1}\varphi_3^{q'}d\Gamma_1\Big)^{\frac{1}{q'}}+$$

$$+\Big(\int\limits_{\Gamma_1}(M_1^*)^p\,d\Gamma_1\Big)^{\frac{1}{p}}\Big(\int\limits_{\Gamma_1}\varphi_{3x}^{p'}d\Gamma_1\Big)^{\frac{1}{p'}}\leqslant$$

$$\leqslant 4\lambda\,G\int\limits_S\int\limits_{-h/2}^{h/2}\|b\|\cdot\|\bar{\varphi}\|\,dSdz+m\|\bar{\varphi}\|_{H_2(S^\circ)}\leqslant$$

$$\leqslant 4G\lambda\Big(\int\limits_S\int\limits_{-h/2}^{h/2}\|b\|^2 dSdz\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\int\limits_S\int\limits_{-h/2}^{h/2}\|\bar{\varphi}\|^2 dSdz\Big)^{\frac{1}{2}}+m\|\bar{\varphi}\|_{H_2(S^\circ)}=$$

$$=4G\lambda\Big(\int\limits_S\int\limits_{-h/2}^{h/2}\|b\|^2 dSdz\Big)^{\frac{1}{2}}\Big\{\frac{h^3}{12}\int\limits_S[(\varkappa_1^{(\bar{\varphi})})^2+\varkappa_1^{(\bar{\varphi})}\varkappa_2^{(\bar{\varphi})}+$$

$$+(\varkappa_2^{(\bar{\varphi})})^2+(\varkappa_{12}^{(\bar{\varphi})})^2]\,dS+h\int\limits_S[(\varepsilon_1^{(\bar{\varphi})})^2+\varepsilon_1^{(\bar{\varphi})}\varepsilon_2^{(\bar{\varphi})}+$$

$$+(\varepsilon_2^{(\bar{\varphi})})^2+(\varepsilon_{12}^{(\bar{\varphi})})^2]\,dS\Big\}^{\frac{1}{2}}+m\|\bar{\varphi}\|_{H_2(S^\circ)}=$$

$$=\Big[\lambda\Big(4G\int\limits_S\int\limits_{-h/2}^{h/2}\|b\|^2 dSdz\Big)^{\frac{1}{2}}+m\Big]\|\bar{\varphi}\|_{H_2(S^\circ)}$$

Выше мы использовали условия (7), неравенства Гельдера и (26). Итак, получили, что функционал в левой части (25) линеен относительно $\overline{\varphi}$ в пространстве $H_2(S^\circ)$. Пользуясь теоремой Рисса, получим (28), где оператор B будет действовать в пространстве $H_2(S^\circ)$. Точно таким же образом можно обосновать (27).

Очевидно, отыскание обобщенного решения краевой задачи (I) эквивалентно решению операторного уравнения

$$a = Aa \tag{29}$$

а отыскание обобщенного решения краевой задачи (II) эквивалентно решению операторного уравнения

$$b = Bb \tag{30}$$

Теорема 1. *Пусть выполняются условия:*

1) X, $Y \in L_p(S^\circ)$, $Z \in L_q(S^\circ)$, *где* $1 < p < \infty$, $1 \leqslant q < \infty$,

2) $\omega(e_i)$ *удовлетворяет условиям (7).*

Тогда оператор $A(a)$ *есть оператор сжатия во всем пространстве* $H_1(S^\circ)$, *причем имеет место соотношение*

$$\|A(a_1) - A(a_2)\|_{H_1(S^\circ)} \leqslant \lambda \|a_1 - a_2\|_{H_1(S^\circ)}$$

для любых a_1, $a_2 \in H_1(S^\circ)$, *откуда вытекает однозначная разрешимость задачи (I).*

Теорема 2. *Пусть выполнены все условия теоремы 1, кроме того на* Γ_1 $N_1^* \in L_q(\Gamma_1^\circ)$, M_1^*, S_{12}^*, $T_1^* \in L_p(\Gamma_1^0)$, *где* $1 \leqslant q < \infty$, $1 < p < \infty$*. *Тогда оператор* $B(b)$ *есть оператор сжатия во всем пространстве* $H_2(S^\circ)$, *причем имеет место соотношение*

$$\|B(b_1) - B(b_2)\|_{H_2(S^\circ)} \leqslant \lambda \|b_1 - b_2\|_{H_2(S^\circ)}$$

для любых b_1, $b_2 \in H_2(S^\circ)$, *откуда вытекает однозначная разрешимость задачи (II).*

Эти две теоремы доказываются совершенно аналогичным образом, поэтому приведем доказательство только первой теоремы. Из (27) получим

$$\|A(a_1) - A(a_2)\|_{H_1(S^\circ)} = 4G \int\limits_S \int\limits_{-h/2}^{h/2} [\omega(e_i^{(a_1)})(a_1, Aa_1 - Aa_2) -$$

$$- \omega(e_i^{(a_2)})(a_2, Aa_1 - Aa_2)\, dSdz$$

Обозначая $A(a_1) - A(a_2) = \psi$, используя неравенства Буняковского, неравенства треугольника и (8), (19), (20), получим

$$\|\overline{\psi}\|^2_{H_1(S^\circ)} = 4G \int\limits_S \int\limits_{-h/2}^{h/2} \Big\{ \omega(e_i^{(a_1)})(a_1 - a_2, \overline{\psi}) +$$

* Предполагается, что система внешних сил статически эквивалентна нулю.

$$+\frac{\omega(e_i^{(a_1)})-\omega(e_i^{(a_2)})}{e_i^{(a_1)}-e_i^{(a_2)}}e_i^{(a_2)}\frac{e_i^{(a_1)}-e_i^{(a_2)}}{e_i^{(a_2)}}(a_2,\ \overline{\psi})\Bigg\}dSdz\leqslant$$

$$\leqslant 4G\int\limits_S\int\limits_{-h/2}^{h/2}\Bigg\{\omega(e_i^{(a_1)})|(a_1-a_2,\ \overline{\psi})|+\frac{\omega(e_i^{(a_1)})-\omega(e_i^{(a_2)})}{e_i^{(a_1)}-e_i^{(a_2)}}e_i^{(a_2)}\times$$

$$\times\frac{|\|a_1\|-\|a_2\||}{\|a_2\|}(a_2,\ \overline{\psi})\Bigg\}dSdz\leqslant$$

$$\leqslant 4G\int\limits_S\int\limits_{-h/2}^{h/2}\Bigg\{\omega(e_i^{(a_1)})\|a_1-a_2\|\cdot\|\overline{\psi}\|+\frac{\omega(e_i^{(a_1)}-\omega(e_i^{(a_2)})}{e_i^{(a_1)}-e_i^{(a_2)}}e_i^{(a_2)}\times$$

$$\times\frac{|\|a_1\|-\|a_2\||}{\|a_2\|}\|a_2\|\cdot\|\overline{\psi}\|\Bigg\}dSdz\leqslant$$

$$\leqslant 4G\int\limits_S\int\limits_{-h/2}^{h/2}\Bigg[\omega(e_i^{(a_1)}+\frac{\omega(e_i^{(a_1)}-\omega(e_i^{(a_2)})}{e_i^{(a_1)}-e_i^{(a_2)}}e_i^{(a_2)}\Bigg]\|a_1-a_2\|\cdot\|\overline{\psi}\|dSdz\leqslant$$

$$\leqslant 4G\lambda\int\limits_S\int\limits_{-h/2}^{h/2}\|a_1-a_2\|\cdot\|\overline{\psi}\|dSdz\leqslant 4G\lambda\Bigg(\int\limits_S\int\limits_{-h/2}^{h/2}\|a_1-a_2\|^2dS\,dz\Bigg)^{\frac{1}{2}}\times$$

$$\times\Bigg(\int\limits_S\int\limits_{-h/2}^{h/2}\|\overline{\psi}\|^2dS\,dz\Bigg)^{\frac{1}{2}}=\lambda\|a_1-a_2\|_{H_1(S^\circ)}\cdot\|\overline{\psi}\|_{H_1(S^\circ)}$$

Итак, получили

$$\|A(a_1)-A(a_2)\|_{H_1(S^\circ)}\leqslant\lambda\|a_1-a_2\|_{H_1(S^\circ)}$$

где $a_1,\ a_2\in H_1(S^\circ)$—любые.

Из теорем 1 и 2 вытекает, что метод упругих решений для рассматриваемых задач теории пластичности будет сходиться в соответствующих пространствах со скоростью геометрической прогрессии со знаменателем λ при любом выборе начального приближения.

Пользуясь случаем, автор выражает глубокую благодарность И. И. Воровичу за ценные советы при выполнении настоящей работы.

Ереванский государственный университет

Поступила 28 I 1972

Ս. Հ. ՍԱՐԳՍՅԱՆ

ԳԼԱՆԱՅԻՆ ԹԱՂԱՆԹՆԵՐԻ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՄԵՋ ԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ԼՈՒԾՈՒՄՆԵՐԻ ՄԵԹՈԴԻ ՄԱՍԻՆ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Դիտարկված են գլանային թաղանթների առաձգա-պլաստիկական տեսության երկու հիմնական եզրային խնդիրները։ Սահմանելով նշված խնդիրների ընդհանրացված լուծումները, եզրային խնդիրները բերվում են օպերատորային հավասարումների։ Այնուհետև ապացուցվում է, որ այդ օպերատորները համապատասխան էներգետիկ տարածություններում սեղմվող են։

ON THE METHOD OF ELASTIC SOLUTIONS IN THE THEORY OF CYLINDRICAL SHELLS

S. O. SARKISSIAN

S u m m a r y

Two principal boundary problems in the elastic-plastic theory of cylindrical shells are considered. The boundary problems are reduced to the operator equations and these operators are proved to be operators of compression in the appropriate energetic spaces.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Амбарцумян С. А.* Теория анизотропных оболочек. Физматгиз, М., 1961.
2. *Ильюшин А. А.* Пластичность. Гостехиздат, М., 1948.
3. *Ворович И. И., Красовский Ю. П.* О методе упругих решений. Докл. АН СССР, т. 126, № 4, 1959.
4. *Ворович И. И., Косушкин Г. А.* О разрешимости общей задачи для упругой замкнутой цилиндрической оболочки в нелинейной постановке. ПММ, т. 33, вып. 1, 1969.
5. *Михлин С. Г.* Проблема минимума квадратичного функционала. ГИТТЛ, М.—Л., 1952.
6. *Соболев С. Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Изд. Ленингр. ун-та, 1950.
7. *Никольский С. М.* О теоремах вложения, продолжения и приближения для дифференцируемых функций многих переменных. Успехи матем. наук, т. 16, № 5, 1961, 63—114.