ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

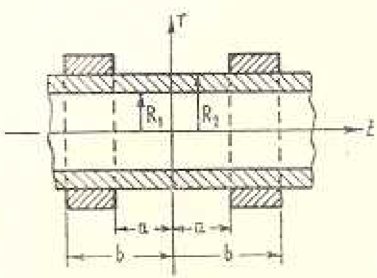
Մեխանիկա XXV, № 5, 1972 Механика

А. П. МЕЛКОНЯН

ОСЕСИММЕТРИЧНАЯ ЗАДАЧА ПОЛОГО БЕСКОНЕЧНОГО ЦИЛИНДРА С ДВУМЯ НАСАЖЕННЫМИ ДИСКАМИ

Осесимметричная контактная задача теории упругости для сплошных и полых цилиндров в случае, когда на поверхности цилиндра насажен диск или насажены равноудаленные друг от друга диски, рассмотрена в работах [1—4] и других.

В настоящей работе получено решение смешанной осесимметричной задачи для бесконечного полого цилиндра с двумя жесткими, гладкими дисками заданной формы, насаженными по внешней поверхности, когда по внутренней поверхности и части внешней поверхности вне дисков приложены радиальные нагрузки. Для простоты предполагаем, что касательные напряжения на поверхности цилиндра отсутствуют. Решение рассматриваемой задачи представлено в виде интеграла Фурье. Для определения неизвестных функций, входящих в интеграл Фурье, получены тройные интегральные уравнения, решение которых, следуя [5], сведено к парным рядам-уравнениям по тригонометрическим функциям. Далее задача сводится к решению квази-вполне регулярных бесконечных систем линейных алгебраических уравнений, свободные члены которых стремятся к нулю.



Фиг. 1

Получены также формулы для контактных напряжений с выделенными особенностями.

1. Предположим, что граничные условия рассматриваемой здесь задачи (фиг. 1) симметричны относительно плоскости $z = 0$. В силу симметрии достаточно рассмотреть деформацию части цилиндра в интервале $0 \leqslant z < \infty$.

Граничные условия для рассматриваемой части цилиндра имеют вид

$$\sigma_r(R_1, z) = f_1(z) = \int_0^\infty t(\alpha)\cos\alpha z\, d\alpha \qquad 0 \leqslant z < \infty$$

$$\tau_{rz}(R_1, z) = \tau_{rz}(R_2, z) = 0 \qquad 0 \leqslant z < \infty \tag{1.1}$$

где
$$t(\alpha) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty f_1(z)\cos\alpha z\, dz$$

$$\sigma_r(R_2, z) = f_2(z) \quad 0 \leqslant z < a, \quad b < z < \infty$$
$$u_z(R_2, z) = \eta(z) \qquad a < z < b \tag{1.2}$$

Полагаем, что $f_1(z)$, $f_2(z)$—кусочно-непрерывные функции, а $\eta(z)$—непрерывная функция с кусочно-непрерывной производной.

Условия симметрии по сечению $z = 0$ запишутся в виде

$$u_z(r, 0) = \tau_{rz}(r, 0) = 0 \qquad R_1 \leqslant r \leqslant R_2 \tag{1.3}$$

В соответствии с (1.3) бигармоническую функцию А. Лява для рассматриваемой задачи представим в виде

$$\Phi(r, z) = \int_0^\infty \{A_1(\alpha) I_0(\alpha r) + A_2(\alpha) K_0(\alpha r) + $$
$$+ \alpha r [A_3(\alpha) I_1(\alpha r) + A_4(\alpha) K_1(\alpha r)]\} \sin\alpha z d\alpha \tag{1.4}$$

где $I_i(x)$, $K_i(x)$—модифицированные цилиндрические функции соответственно первого и второго рода, $A_i(\alpha)$—неизвестные функции.

Напряжения и перемещения в силу (1.4) представятся в виде

$$\sigma_r = -\int_0^\infty \alpha^3 \left\{ A_1(\alpha)\left[I_0(\alpha r) - \frac{I_1(\alpha r)}{\alpha r}\right] + A_2(\alpha)\left[K_0(\alpha r) + \frac{K_1(\alpha r)}{\alpha r}\right] + \right.$$
$$+ A_3(\alpha)[(1-2\nu) I_0(\alpha r) + \alpha r I_1(\alpha r)] - A_4(\alpha)[(1-2\nu) K_0(\alpha r) -$$
$$\left. - \alpha r K_1(\alpha r)]\right\} \cos\alpha r\, d\alpha$$

$$\sigma_z = \int_0^\infty \alpha^3 \left\{ A_1(\alpha) I_0(\alpha r) + A_2(\alpha) K_0(\alpha r) + A_3(\alpha)[2(2-\nu) I_0(\alpha r) + \right.$$
$$\left. + \alpha r I_1(\alpha r)] - A_4(\alpha)[2(2-\nu) K_0(\alpha r) - \alpha r K_1(\alpha r)]\right\} \cos\alpha z d\alpha$$

$$\sigma_\varphi = -\int_0^\infty \alpha^3 \left\{ A_1(\alpha)\frac{I_1(\alpha r)}{\alpha r} - A_2(\alpha)\frac{K_1(\alpha r)}{\alpha r} + (1-2\nu)[A_3(\alpha) I_0(\alpha r) - \right.$$
$$\left. - A_4(\alpha) K_0(\alpha r)]\right\} \cos\alpha z d\alpha \tag{1.5}$$

$$\tau_{rz}=\int_0^\infty \alpha^3\{A_1(\alpha)I_1(\alpha r)-A_2(\alpha)K_1(\alpha r)+A_3(\alpha)[2(1-\nu)I_1(\alpha r)+$$

$$+\alpha r I_0(\alpha r)]+A_4(\alpha)[2(1-\nu)K_1(\alpha r)-\alpha r K_0(\alpha r)]\}\sin\alpha z d\alpha$$

$$u_r=-\frac{1}{2G}\int_0^\infty \alpha^2\{A_1(\alpha)I_1(\alpha r)-A_2(\alpha)K_1(\alpha r)+$$

$$+A_3(\alpha)\alpha r I_0(\alpha r)-A_4(\alpha)\alpha r K_0(\alpha r)\}\cos\alpha z d\alpha$$

$$u_z=\frac{1}{2G}\int_0^\infty \alpha^2\{A_1(\alpha)I_0(\alpha r)+A_2(\alpha)K_0(\alpha r)+A_3(\alpha)[4(1-\nu)I_0(\alpha r)+$$

$$+\alpha r I_1(\alpha r)]-A_4(\alpha)[4(1-\nu)K_0(\alpha r)-\alpha r K_1(\alpha r)]\}\sin\alpha z d\alpha$$

где G—модуль сдвига, ν—коэффициент Пуассона.

Введя обозначение

$$X(\alpha)=-\alpha^2\left\{A_1(\alpha)\left[I_0(\gamma)-\frac{I_1(\gamma)}{\gamma}\right]+A_2(\alpha)\left[K_0(\gamma)+\frac{K_1(\gamma)}{\gamma}\right]+\right.$$

$$\left.+A_3(\alpha)[(1-2\nu)I_0(\gamma)+\gamma I_1(\gamma)]-A_4(\alpha)[(1-2\nu)K_0(\gamma)-\gamma K_1(\gamma)]\right\} \quad (1.6)$$

и далее решая относительно $A_i(\alpha)$ $(i=1, 2, 3, 4)$ систему алгебраических уравнений, из (1.6) и уравнений, получаемых из граничных условий (1.1), получим

$$A_i(\alpha)=\frac{\Delta_i}{\Delta} \quad (i=1, 2, 3, 4) \quad (1.7)$$

где

$$\Delta(\alpha)=\frac{4(1-\nu)}{\beta\gamma}+\frac{\beta^2+\gamma^2}{\beta\gamma}+\beta\gamma S_1^2-$$

$$-\gamma\left[\frac{2(1-\nu)}{\beta}+\beta\right]S_2^2-\beta\left[\frac{2(1-\nu)}{\gamma}+\gamma\right]S_3^2+$$

$$+\left[\frac{2(1-\nu)}{\beta}+\beta\right]\left[\frac{2(1-\nu)}{\gamma}+\gamma\right]S_4^2 \quad (1.8)$$

$$\Delta_i=\frac{X(\alpha)}{\alpha^2}q_i+\frac{t(\alpha)}{\alpha^3}q_i^* \quad (i=1, 2, 3, 4) \quad (1.9)$$

$$q_1(\beta, \gamma)=2(1-\nu)\frac{\gamma}{\beta}K_0(\gamma)-\left[\frac{2(1-\nu)}{\beta}+\beta\right]K_1(\gamma)-\beta\gamma K_0(\beta)S_1+$$

$$+\gamma\left[\frac{2(1-\nu)}{\beta}+\beta\right]K_1(\beta)S_2(\beta, \gamma)-2(1-\nu)\beta K_0(\beta)S_3(\beta, \gamma)+$$

$$+2(1-\nu)\left[\frac{2(1-\nu)}{\beta}+\beta\right]K_1(\beta)\,S_4(\beta,\ \gamma)$$

$$q_2(\beta,\ \gamma)=-2(1-\nu)\frac{\gamma}{\beta}I_0(\gamma)-\left[\frac{2(1-\nu)}{\beta}+\beta\right]I_1(\gamma)+$$

$$+\beta\gamma\,S_1(\beta,\ \gamma)\,I_0(\beta)+\gamma\left[\frac{2(1-\nu)}{\beta}+\beta\right]I_1(\beta)\,S_2(\beta,\ \gamma)+$$

$$+2(1-\nu)\,\beta\,I_0(\beta)\,S_3(\beta,\ \gamma)+2(1-\nu)\left[\frac{2(1-\nu)}{\beta}+\beta\right]I_1(\beta)\,S_4(\beta,\ \gamma) \quad (1.10)$$

$$q_3(\beta,\ \gamma)=-\frac{\gamma}{\beta}K_0(\gamma)+\beta\,K_0(\beta)\,S_3(\beta,\ \gamma)-$$

$$-\left[\frac{2(1-\nu)}{\beta}+\beta\right]K_1(\beta)\,S_4(\beta,\ \gamma)$$

$$q_4(\beta,\ \gamma)=-\frac{\gamma}{\beta}I_0(\gamma)+\beta\,I_0(\beta)\,S_3(\beta,\ \gamma)+$$

$$+\left[\frac{2(1-\nu)}{\beta}+\beta\right]I_1(\beta)\,S_4(\beta,\ \gamma)$$

$$q_i^*(\beta,\ \gamma)=q_i(\gamma,\ \beta)\quad(i=1,\ 2,\ 3,\ 4) \quad (1.11)$$

$$S_1(\beta,\ \gamma)=I_0(\gamma)\,K_0(\beta)-K_0(\gamma)\,I_0(\beta)$$
$$S_2(\beta,\ \gamma)=I_0(\gamma)\,K_1(\beta)+K_0(\gamma)\,I_1(\beta) \quad (1.12)$$
$$S_3(\beta,\ \gamma)=I_1(\gamma)\,K_0(\beta)+K_1(\gamma)\,I_0(\beta)$$
$$S_4(\beta,\ \gamma)=I_1(\gamma)\,K_1(\beta)-K_1(\gamma)\,I_1(\beta)$$

$$\beta=\alpha R_1,\qquad \gamma=\alpha R_2 \quad (1.13)$$

Подставив (1.5) и полученные выражения (1.7)—(1.12) для $A_i(\alpha)$ в первое и третье из граничных условий (1.2), окончательно получим следующие тройные интегральные уравнения относительно $X(\alpha)$:

$$\int_0^\infty \alpha X(\alpha)\cos\alpha z d\alpha=f_2(z)\qquad 0<z<a$$

$$\int_0^\infty[1-N(\alpha)]X(\alpha)\cos\alpha z d\alpha=H(z)\qquad a<z<b \quad (1.14)$$

$$\int_0^\infty \alpha X(\alpha)\cos\alpha z d\alpha=f_2(z)\qquad b<z<\infty$$

где

$$N(\alpha)=1+\frac{1}{\Delta(\alpha)}\left\{\frac{1}{\beta}-\beta S_3^2+\left[\frac{2(1-\nu)}{\beta}+\beta\right]S_4^2\right\}$$

$$N(0) = 1 \tag{1.15}$$

$$H(z) = \frac{G}{1-\nu}\gamma(z) + \int_0^\infty \frac{t(\alpha)}{\alpha\Delta(\alpha)}\left[\frac{\beta}{\gamma}S_3 - S_2\right]\cos\alpha z d\alpha$$

Таким образом, неизвестные функции $A_i(\alpha)$, выражаемые формулами (1.7), будут определены, если будет найдена $X(\alpha)$ из тройных интегральных уравнений (1.14). Далее могут быть найдены компоненты напряжений и перемещения в любой точке цилиндра.

Если в вышеприведенных выражениях положить

$$A_2(\alpha) = A_4(\alpha) = 0, \quad R_1 = 0, \quad f_1(z) = 0 \quad (t(\alpha) = 0),$$

то предельным переходом получим выражения, соответствующие задаче бесконечного сплошного вала радиуса R_2, определяемые граничными условиями (1.2). Решение этой задачи для сплошного вала также сводится к решению уравнений (1.14), в которых, однако, следует положить

$$H(z) = \frac{G}{1-\nu}\gamma(z)$$

$$N(\alpha) = 1 - \frac{I_1^2(\gamma)}{\gamma I_0^2(\gamma) - \left[\frac{2(1-\nu)}{\gamma} + \gamma\right] I_1^2(\gamma)} \tag{1.16}$$

а функции $A_1(\alpha)$ и $A_3(\alpha)$ определяются через $X(\alpha)$ следующими формулами:

$$A_1(\alpha) = -\frac{X(\alpha)}{\alpha^2}\frac{2(1-\nu)I_1(\gamma) + \gamma I_0(\gamma)}{\gamma I_0^2(\gamma) - \left[\frac{2(1-\nu)}{\gamma} + \gamma\right] I_1^2(\gamma)}$$

$$A_3(\alpha) = \frac{X(\alpha)}{\alpha^2}\frac{I_1(\gamma)}{\gamma I_0^2(\gamma) - \left[\frac{2(1-\nu)}{\gamma} + \gamma\right] I_1^2(\gamma)} \tag{1.17}$$

Приведем асимптотическое разложение для выражений $N(\alpha)$, определяемых формулами (1.15) и (1.16), при больших значениях α

$$N(\alpha) = \frac{1-2\nu}{R_2}\frac{1}{\alpha} + \frac{1-32\nu-32\nu^2}{8R_2^2}\frac{1}{\alpha^2} + 0\left(\frac{1}{\alpha^3}\right) \tag{1.18}$$

Таким образом, функция $N(\alpha)$ ограничена сверху и при возрастании аргумента стремится к нулю, как $0\left(\frac{1}{\alpha}\right)$.

2. Для решения полученных тройных интегральных уравнений методом Трантера [5] представим (1.14) в виде

$$\int_0^\infty \alpha X(\alpha)\cos\alpha z d\alpha = f_2(z) \qquad (0 < z < a)$$

$$\int_0^\infty [1-N(\alpha)]X(\alpha)(\cos\alpha z-1)\,d\alpha = H(z)-H(0)=H^*(z) \quad (a<z<b) \tag{2.1}$$

$$\int_0^\infty \alpha X(\alpha)\cos\alpha z\,d\alpha = f_2(z) \qquad (b<z<\infty)$$

Отметим, что при таком представлении возможно теряется свободный член при $H(z)$.

Пользуясь значениями интегралов

$$\int_0^\infty J_{2n}(b\alpha)\cos\alpha z\,d\alpha = \begin{cases} \dfrac{\cos\left[2n\arcsin\dfrac{z}{b}\right]}{\sqrt{b^2-z^2}} & (z<b) \\ 0 & (z>b) \end{cases} \tag{2.2}$$

$$\int_0^\infty \frac{J_{2n}(b\alpha)\cos\alpha z}{\alpha}\,d\alpha = \begin{cases} \dfrac{1}{2n}\cos\left[2n\arcsin\dfrac{z}{b}\right] & (z\leqslant b) \\ \dfrac{(-1)^n b^{2n}}{2n\left(z+\sqrt{z^2-b^2}\right)^{2n}} & (z\geqslant b) \end{cases} \tag{2.3}$$

где $J_i(x)$—функция Бесселя i-го порядка первого рода с действительным аргументом, решение (2.1) представим в виде [5]

$$\alpha X(\alpha)=\sum_{n=0}^\infty c_n J_{2n}(b\alpha)+\frac{2}{\pi}\int_b^\infty f_2(z)\cos\alpha z\,dz \tag{2.4}$$

Благодаря выбору (2.4), в силу (2.2) нетрудно убедиться, что третье уравнение (2.1) удовлетворяется тождественно, а из первых двух уравнений (2.1) с учетом (2.2) и (2.3) для определения неизвестных коэффициентов c_n получим следующие парные ряды-уравнения:

$$\begin{cases} c_0+\sum\limits_{n=1}^\infty c_n\cos n\varphi = b\cos\dfrac{\varphi}{2}f_2\left(b\sin\dfrac{\varphi}{2}\right) \quad (0<\varphi<\varphi_0) \\ \sum\limits_{n=1}^\infty c_n\dfrac{\cos n\varphi-1}{n} = 2\sum\limits_{n=0}^\infty c_n\displaystyle\int_0^\infty N(\alpha)\left[\cos\left(\alpha b\sin\dfrac{\varphi}{2}\right)-\right. \\ \qquad \left.-1\right]\dfrac{J_{2n}(b\alpha)}{\alpha}\,d\alpha+2T\left(b\sin\dfrac{\varphi}{2}\right) \quad (\varphi_0<\varphi<\pi) \end{cases} \tag{2.5}$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$z=b\sin\frac{\varphi}{2}, \qquad a=b\sin\frac{\varphi_0}{2} \tag{2.6}$$

$$T(z)=H^*(z)-\frac{2}{\pi}\int_b^\infty f_2(y)\ln\frac{y}{\sqrt{|y^2-z^2|}}\,dy+$$

$$+\frac{2}{\pi}\int_b^\infty f_3(y)\,dy\int_0^\infty N(\alpha)\frac{(\cos\alpha z-1)\cos\alpha y\,d\alpha}{\alpha} \tag{2.7}$$

Применив методы решения парных рядов-уравнений, предложенные в работах [6, 7], к решению (2.5), для определения неизвестных c_n получим следующую бесконечную систему линейных алгебраических уравнений

$$c_k=\sum_{n=0}^{\infty}\gamma_{nk}c_n+\omega_k \quad (k=1,\ 2,\cdots) \tag{2.8}$$

где

$$\gamma_{0k}=-Z_k(\cos\varphi_0)+\frac{k}{2}\int_{\varphi_0}^{\pi}Y_k(\cos\theta)\,\mathrm{tg}\frac{\theta}{2}\,d\theta\int_0^\infty N(\alpha)R(\alpha,\theta)J_0(b\alpha)\,d\alpha$$

$$\gamma_{nk}=\frac{k}{2}\int_{\varphi_0}^{\pi}Y_k(\cos\theta)\,\mathrm{tg}\frac{\theta}{2}\,d\theta\int_0^\infty N(\alpha)R(\alpha,\theta)J_{2n}(b\alpha)\,d\alpha$$

$$\omega_k=\frac{k}{2}\left|\int_0^{\varphi_0}F_1(\theta)Y_k(\cos\theta)\,\mathrm{tg}\frac{\theta}{2}\,d\theta+\int_{\varphi_0}^{\pi}F_2(\theta)Y_k(\cos\theta)\,\mathrm{tg}\frac{\theta}{2}\,d\theta\right| \tag{2.9}$$

$$R(\alpha,\theta)=\frac{2\sqrt{2}\,b}{\pi}\int_\theta^\pi\frac{\cos^2\frac{\varphi}{2}\sin\left(\alpha b\sin\frac{\varphi}{2}\right)d\varphi}{(\cos\theta-\cos\varphi)^{1/2}}$$

$$F_1(\theta)=\frac{2\sqrt{2}\,b}{\pi}\int_0^\theta\frac{\cos^2\frac{\varphi}{2}f_3\left(b\sin\frac{\varphi}{2}\right)d\varphi}{(\cos\varphi-\cos\theta)^{1/2}}$$

$$F_2(\theta)=\frac{4\sqrt{2}}{\pi}\int_\theta^\pi\frac{dT}{d\varphi}\,\frac{\cos\frac{\varphi}{2}\,d\varphi}{(\cos\theta-\cos\varphi)^{1/2}}$$

$$Y_k(x)=P_{k-1}(x)+P_k(x),\qquad Z_k(x)=P_{k-1}(x)-P_k(x),$$

$P_k(x)$ — полиномы Лежандра.

Отметим, что при решении (1.14) второе уравнение заменялось вторым уравнением (2.1) и при этом возможно терялось постоянное слагаемое, вследствие чего (1.14) и (2.1) могут быть не эквивалентны. Для того, чтобы полученное решение (2.4) и (2.8) удовлетворяло уравнениям (1.14), постоянную c_0 найдем из второго уравнения (1.14).

Подставив (2.4) во второе уравнение (1.14), получим при фиксированном значении $z=z_0\in[a,\ b]$ следующее уравнение для определения неизвестной c_0:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n D_n(z_0)+\int_b^{\infty} f_2(x)\, B(x,\ z_0)=H(z_0) \tag{2.10}$$

где

$$D_n(z)=\int_0^{\infty}\frac{1-N(\alpha)}{\alpha} J_{2n}(b\alpha)\cos\alpha z\, d\alpha \tag{2.11}$$

$$B(x,\ z)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{1-N(\alpha)}{\alpha}\cos\alpha x\cos\alpha z d\alpha$$

Таким образом, выражая из бесконечной системы (2.8) все неизвестные c_k $(k=1,\ 2,\cdots)$ через c_0 и далее подставляя их в уравнение (2.10), найдем c_0.

Докажем теперь, что полученная система (2.8) квази-вполне регулярна. Покажем, что $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|\gamma_{nk}|$ стремится к нулю при возрастании k.

Пользуясь интегральным представлением функций Бесселя

$$J_{2n}(z)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos 2n\theta\cos(z\sin\theta)\, d\theta \tag{2.12}$$

и выражением

$$\pi\delta(2\theta)=\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\cos 2n\theta \tag{2.13}$$

где $\delta(x)$—дельта-функция Дирака, а также неравенствами [7]

$$|Y_k(x)|<\frac{2}{\sqrt{k}},\qquad |Z_k(x)|<\frac{2}{\sqrt{k}}$$

для суммы модулей коэффициентов при неизвестных будем иметь

$$\sum_{n=0}^{\infty}|\gamma_{nk}|\leqslant|Z_k(\cos\varphi_0)|+\frac{k}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left|\int_{\varphi_0}^{\pi} Y_k(\cos\theta)\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\, d\theta\times\right.$$

$$\left.\times\int_0^{\infty} N(\alpha)\, R(\alpha,\ \theta)\, J_2(b\alpha)\, d\alpha\right|\leqslant\left|Z_k(\cos\varphi_0)\right|+$$

$$+\frac{k}{4}\left|\int_{\varphi_0}^{\pi}\chi(\theta)\, Y_k(\cos\theta)\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\, d\theta\right| \tag{2.14}$$

где

$$\chi(\theta) = \int_0^\infty N(\alpha) R(\alpha, \theta) \left[\frac{1}{2} + J_0(b\alpha) \right] d\alpha \tag{2.15}$$

Интегрируя (2.15) по частям и учитывая, что $\chi(\theta)$—дифференцируемая функция и обращается в нуль при $\theta = \pi$ (что следует из (2.9) и (2.15)), будем иметь

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\gamma_{nk}| < |Z_k(\cos\varphi_0)| + \frac{1}{4} \Big| \chi(\varphi_0) Z_k(\cos\varphi_0) +$$

$$+ \int_{\varphi_0}^{\pi} \chi'(\theta) Z_k(\cos\theta) d\theta \Big| < \frac{1}{2\sqrt{k}} \left[4 + |F(\varphi_0)| + \int_{\varphi_0}^{\pi} |F'(\theta)| d\theta = \frac{m}{\sqrt{k}} \right. \tag{2.16}$$

то есть при больших значениях k сумма $\sum_{n=0}^{\infty} |\gamma_{nk}|$ стремится к нулю как $O\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$, следовательно, бесконечная система (2.8) квази-вполне регулярна. Функции $F_1(\theta)$ и $F_2(\theta)$ непрерывны, следовательно, свободный член ω_k в (2.8) имеет порядок $O(k^{-1/2})$, значит систему (2.8) можно решать методом последовательных приближений.

Вычислим контактные напряжения, то есть найдем значение первого интеграла из (1.14) в области $a < z < b$. Подставляя значение $X(\alpha)$ по (2.4) в первый интеграл (1.14), при $z < b$ получим

$$\sigma_r(R_2, z) = \frac{D(z)}{\sqrt{b^2 - z^2}}, \quad 0 < z < b \tag{2.17}$$

где

$$D(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \cos k\varphi, \qquad \varphi = 2 \arcsin \frac{z}{b} \tag{2.18}$$

Для выделения особенности в окрестности точки $z = a$ подставим значение c_k из бесконечной системы (2.8) в (2.17) и, пользуясь значением суммы [7]

$$\sum_{k=1}^{\infty} Y_k(\cos\theta) \sin k\varphi = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{2} \cos \frac{\varphi}{2}}{(\cos\theta - \cos\varphi)^{1/2}}, & (\varphi > \theta) \\ 0 & (\varphi < \theta) \end{cases} \tag{2.19}$$

для $z > a$, $\varphi_0 < \varphi < \pi$ окончательно получим

$$\sigma_r(R_2, z) = \frac{z}{\sqrt{b^2 - z^2}} \left[\frac{M}{\sqrt{z^2 - a^2}} + \Omega(z) \right] \quad \begin{matrix} (a < z < b) \\ (\varphi_0 < \varphi < \pi) \end{matrix} \tag{2.20}$$

где

$$M=\frac{1}{2}\left[\;2c_0+\sum_{n=0}^{\infty}c_nQ_n(\varphi_0)+F_2(\varphi_0)-F_1(\varphi_0)\right]$$

$$\Omega(z)=\frac{1}{\sqrt{2b}}\left[\int\limits_0^{\varphi}\frac{F_1'(\theta)\,d\theta}{\sqrt{\cos\theta-\cos\varphi}}+\right.$$

$$\left.+\int\limits_{\varphi_0}^{\varphi}\frac{F_2'(\theta)+\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_nQ_n'(\theta)}{\sqrt{\cos\theta-\cos\varphi}}\,d\theta\right]\Bigg|_{\varphi=2\arcsin\frac{z}{b}}$$

$$Q_n(\theta)=\int\limits_0^{\infty}N(\alpha)\,R(\alpha,\theta)\,J_{2n}(b\alpha)\,d\alpha$$

Институт механики
АН Армянской ССР

Поступила 29 II 1972

Ա. Պ. ՄԵԼՔՈՆՅԱՆ

ԵՐԿՈՒ ՀԱԳՑՎԱԾ ՍԿԱՎԱՌԱԿՆԵՐՈՎ ՍՆԱՄԵՋ ԱՆՎԵՐՋ ԳԼԱՆԻ ԱՌԱՆՑՔԱՍԻՄԵՏՐԻԿ ԽՆԴԻՐԸ

Ամփոփում

Ստացված է սնամեջ անվերջ գլանի խառը խնդրի լուծումը, երբ գլանի արտաքին մակերևույթի վրա հագցված են երկու միանման կոշտ սկավառակներ։ Գլանի ներքին և սկավառակների միջև ընկած արտաքին մակերևույթների վրա կիրառված են ուժեր, որոնք ազդում են մակերևույթների նորմալի ուղղությամբ։

Անհայտ ֆունկցիաների որոշման համար ստացված են եռակի ինտեգրալ հավասարումներ, որոնց լուծումները, Տրանտերի մեթոդի օգտագործմամբ, բերվում են եռանկյունաչափական ֆունկցիաներով զույգ շարք-հավասարումների։

Այնուհետև խնդրի լուծումը բերվում է քվազի-լիովին ռեգուլյար գծային հանրահաշվական հավասարումների անվերջ սիստեմի լուծմանը։

Ստացված են բանաձևեր կոնտակտային լարումների համար, որոնցում անջատված են եզակիությունները։

AXISYMMETRIC PROBLEM FOR A HOLLOW INFINITE CYLINDER WITH TWO DISKS FITTED ON

A. P. MELKONIAN

S u m m a r y

A solution is abtained of the axisymmetric mixed problem for an infinite hollow cylinder with two identical rigid smooth disks of a given shape fitted on the external surface. To the internal surface and to a part of the external surface out of the disks a radial pressure is applied. For determination of unknown functions the tripple integral equations are derived, and their solution, following Tranter's method, is reduced to the dual series-equations by trigonometric functions. Later the problem is reduced to the solution of a quasi-quite regular infinite system of linear algebraic equations.

The formulas for the contact stresses with separated singularities are presented.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Александров В. М.* Осесимметричная контактная задача для упругого бесконечного цилиндра. Известия АН СССР, ОТН, „Механика и машиностроение", № 5, 1962.
2. *Александров В. М.* К решению некоторых контактных задач теории упругости. ПММ, т. XVII, № 5, 1963.
3. *Хилл А. Р., Кэкмак А. С., Марк Р.* Горячая посадка на толстостенный цилиндр при наличии контактных усилий сдвига. „Прикладная механика", Тр. американского общества инженеров-механиков (русск. пер.), т. 35, серия Е, № 4, 1968.
4. *Баблоян А. А., Мелконян А. П.* Осесимметричная задача полого бесконечного цилиндра с периодически насаженными на него дисками. Известия АН Арм. ССР, Механика, т. XXI, № 1, 1968.
5. *Tranter C. J.* The opening of a pair of coplanar Griffith cracks under internal pressure. The quarterly journal of mechanics and applied mathematics, v. XIV, part 3, 1961.
6. *Srivastav R. P.* III. Dual relations involving trigonometric series. Proceedings Royal Society Edinburgh. Section A, Vol. 66, Part III, 1964, p 173—184.
7. *Баблоян А. А.* Решение некоторых парных рядов-уравнений, встречающихся в задачах теории упругости. ПММ, т. 31, № 4, 1967.