

М. С. САРКИСЯН

К ТЕОРИИ ИДЕАЛЬНОЙ ПЛАСТИЧНОСТИ ТЕЛ,
 МАТЕРИАЛ КОТОРЫХ ПО-РАЗНОМУ СОПРОТИВЛЯЕТСЯ
 РАСТЯЖЕНИЮ И СЖАТИЮ

В технических приложениях часто встречаются тела, материал которых по-разному сопротивляется растяжению и сжатию. К ним относятся многие естественные и искусственные материалы. В последние годы появились многочисленные работы, посвященные развитию теории упругости таких разносопротивляющихся тел [1—3]. Решения частных задач идеально-пластических тел, обладающих различными пределами текучести при растяжении и сжатии, рассматривались в работах [4—6]. При этом кусочно-линейные отрезки, принятые в качестве функции текучести, подходящим образом выбраны для частных задач и не следуют из общего условия пластичности.

В настоящей работе для изотропных материалов, обладающих различными пределами текучести при растяжении и сжатии, предлагается обобщение классических условий пластичности Мизеса и Треска-Сен-Венана. На основе этих обобщений приводятся основные уравнения и соотношения теории идеально-пластичности разносопротивляющегося тела.

1. При построении модели идеально-пластического тела важное значение имеет выбор формы условия текучести. Для изотропных тел это условие должно быть функцией главных напряжений, то есть инвариантов тензора напряжений. Использование того экспериментального факта, что влияние среднего давления на текучесть пренебрежимо мало, приводит к заметному упрощению. Таким образом, если принимается, что свойства материала не зависят от среднего давления, то для изотропных тел условие текучести в общем случае представляется в виде

$$f(\sigma'_1, \sigma'_2, \sigma'_3) = c^2 \quad (1.1)$$

где $\sigma'_1, \sigma'_2, \sigma'_3$ — главные компоненты девиатора тензора напряжений

$$\sigma'_i = \sigma_i - \frac{1}{3} \sigma, \quad \sigma = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \quad (1.2)$$

c — константа материала, связанная с пределами текучести.

Если воспользоваться геометрической интерпретацией напряженного состояния, то в пространстве главных напряжений условие текучести (1.1) будет уравнением цилиндрической поверхности с образующими,

параллельными прямой $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$. Для определения условия пластичности (1.1) достаточно рассмотреть свойства кривой текучести—следа этой цилиндрической поверхности на девиаторной плоскости $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0$. Свойства изотропии материала приводят к тому, что эта кривая должна быть симметрична относительно главных осей и состоять из шести одинаковых дуг с центральным углом 60° . Кроме того, если материал одинаково сопротивляется пластическому растяжению и сжатию, то кривая текучести должна состоять из двенадцати одинаковых дуг с центральным углом 30° . Отметим также, что кривая текучести должна удовлетворять требованию выпуклости, вытекающему из постулата Друкера [7].

Простейшее предположение о виде функции (1.1) может быть, что она—квадратичная форма от σ'_{ij} , поэтому примем

$$f(\sigma'_{ij}) \equiv \frac{1}{2} c_{ij} \sigma'_i \sigma'_j = c^2 \quad (1.3)$$

где c_{ij} — постоянные коэффициенты, подлежащие экспериментальному определению. Здесь и в дальнейшем принято правило сокращенной записи, где по повторяющемуся индексу проводится суммирование.

Если рассматриваемый материал тела—обычный изотропный, то есть одинаково сопротивляется растяжению и сжатию, то следует принять, что

$$c_{11} = c_{22} = c_{33}, \quad c_{12} = c_{13} = c_{23} \quad (1.4)$$

и выражение (1.3) примет следующий вид:

$$f(\sigma'_{ij}) = \frac{1}{2} c_{11} (\sigma_1'^2 + \sigma_2'^2 + \sigma_3'^2) + c_{12} (\sigma_1' \sigma_2' + \sigma_2' \sigma_3' + \sigma_3' \sigma_1') \quad (1.5)$$

Принимая во внимание, что

$$\sigma_1' + \sigma_2' + \sigma_3' = 0 \quad (1.6)$$

(1.5) представляется в виде

$$f(\sigma'_{ij}) = \frac{1}{2} (c_{11} - c_{12}) (\sigma_1'^2 + \sigma_2'^2 + \sigma_3'^2) = c^2 \quad (1.7)$$

Для определения постоянной величины $(c_{11} - c_{12})/c^2$, входящей в (1.7), достаточно провести один эксперимент на одноосное растяжение или сжатие. Определяя эту постоянную, мы получаем условие постоянства интенсивности касательных напряжений—условие пластичности Мизеса

$$\frac{3}{2\sigma_s^2} (\sigma_1'^2 + \sigma_2'^2 + \sigma_3'^2) = 1 \quad (1.8)$$

где σ_s — предел текучести материала при простом растяжении и сжатии.

2. Аналогичными рассуждениями можно получить и условие пластичности для изотропных тел, имеющих различные пределы текучести при растяжении и сжатии. При независимости условия пластичности от среднего давления следует, что в этом случае функция текучести (1.3) должна зависеть уже от знаков главных компонент девятиатора напряжений.

Нетрудно видеть, что, в зависимости от знаков σ_i^j , в данной точке возможны следующие два вида напряженных состояний:

$$D^- \{ \sigma_1^j > 0, \sigma_2^j \leq 0, \sigma_3^j < 0 \}, \quad D^+ \{ \sigma_1^j > 0, \sigma_2^j \geq 0, \sigma_3^j < 0 \} \quad (2.1)$$

Здесь и в дальнейшем принято, что $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$.

Принимая функцию текучести в форме (1.3), необходимо учесть, что коэффициенты c_{ij} для напряженных состояний вида D^- и D^+ будут различными, поэтому приводим их значения в отдельности.

Для напряженных состояний D^-

$$c_{11} = c^+, \quad c_{22} = c_{33} = c^-, \quad c_{23} = c_{23}^+, \quad c_{12} = c_{13} = c_{12}^- \quad (2.2)$$

Для напряженных состояний D^+

$$c_{11} = c_{22} = c^+, \quad c_{33} = c^-, \quad c_{12} = c_{12}^+, \quad c_{13} = c_{23} = c_{23}^- \quad (2.3)$$

Из условия непрерывности функции (1.3) и ее производных при $\sigma_2 = 0$, то есть на границе между областями D^- и D^+ , следует, что в обеих областях должно быть

$$c_{12} = c_{13} = c_{23} \quad (2.4)$$

Таким образом, согласно (2.2)–(2.4) получим следующие выражения функции текучести (1.3):

для напряженных состояний D^-

$$f(\sigma_{ij}^j) \equiv \frac{1}{2} c^- (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) + c_{12} (\sigma_1^j \sigma_2^j + \sigma_2^j \sigma_3^j + \sigma_3^j \sigma_1^j) + \\ + \frac{1}{2} (c^+ - c^-) \sigma_1^2 = c^2$$

или, принимая во внимание (1.6),

$$\frac{1}{2} (c^- - c_{12}) (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) + \frac{1}{2} (c^+ - c^-) \sigma_1^2 = c^2 \quad (2.5)$$

для напряженных состояний D^+

$$\frac{1}{2} (c^+ - c_{12}) (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) + \frac{1}{2} (c^- - c^+) \sigma_3^2 = c^2 \quad (2.6)$$

Выражения (2.5), (2.6) будут условиями пластичности, если путем простого эксперимента найти постоянные, фигурирующие в них. Нетрудно видеть, что для этого достаточно провести только испытание образца на одноосное растяжение и сжатие. В действительности, в

случае простого растяжения, когда $\sigma_1 = k$, $\sigma_2 = 0$, $\sigma_3 = 0$, главные компоненты девиатора будут

$$\sigma_1^i = \frac{2}{3} k, \quad \sigma_2^i = -\frac{1}{3} k, \quad \sigma_3^i = -\frac{1}{3} k \quad (2.7)$$

а в случае простого сжатия, когда $\sigma_1 = 0$, $\sigma_2 = 0$, $\sigma_3 = -s$,

$$\sigma_1^i = \frac{1}{3} s, \quad \sigma_2^i = \frac{1}{3} s, \quad \sigma_3^i = -\frac{2}{3} s \quad (2.8)$$

где k и s — пределы текучести материала соответственно при простом растяжении и сжатии. Подставляя (2.7) в (2.5), а (2.8) в (2.6), получим

$$\begin{aligned} k^2 \left[\frac{1}{3} (c^- - c_{12}) + \frac{2}{9} (c^+ - c^-) \right] &= c^2 \\ s^2 \left[\frac{1}{3} (c^+ - c_{12}) + \frac{2}{9} (c^- - c^+) \right] &= c^2 \end{aligned} \quad (2.9)$$

откуда определяются следующие величины:

$$\begin{aligned} c^- - c_{12} &= 3c^2 \left(\frac{2}{s^2} - \frac{1}{k^2} \right), & c^+ - c_{12} &= 3c^2 \left(\frac{2}{k^2} - \frac{1}{s^2} \right) \\ c^+ - c^- &= 9c^2 \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{s^2} \right) \end{aligned} \quad (2.10)$$

Таким образом, подставляя (2.10) в (2.5), (2.6), получим условие пластичности для изотропных материалов, имеющих различные пределы текучести при растяжении и сжатии. Для напряженных состояний вида D^- оно представляется в виде

$$\frac{3}{2} \left(\frac{2}{s^2} - \frac{1}{k^2} \right) (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) + \frac{9}{2} \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{s^2} \right) \sigma_1^2 = 1 \quad (2.11)$$

а для напряженных состояний вида D^+ —

$$\frac{3}{2} \left(\frac{2}{k^2} - \frac{1}{s^2} \right) (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) + \frac{9}{2} \left(\frac{1}{s^2} - \frac{1}{k^2} \right) \sigma_3^2 = 1 \quad (2.12)$$

3. Рассмотрим следующую геометрическую интерпретацию условия пластичности (2.11), (2.12). Представим главные компоненты девиатора напряжений в следующем тригонометрическом виде:

$$\begin{aligned} \sigma_1^i &= \frac{2\sqrt{3}}{3} I_2 \sin \left(\omega + \frac{2}{3} \pi \right), & \sigma_2^i &= \frac{2\sqrt{3}}{3} I_2 \sin \omega \\ \sigma_3^i &= \frac{2\sqrt{3}}{3} I_2 \sin \left(\omega - \frac{2}{3} \pi \right) \end{aligned} \quad (3.1)$$

где ω — угол вида напряженного состояния

$$\omega = -\frac{1}{3} \arcsin \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{I_3}{I_2^3} \right), \quad -\frac{\pi}{6} \leq \omega \leq \frac{\pi}{6} \quad (3.2)$$

I_2 и I_3 — инварианты девиатора

$$I_2^2 = \frac{1}{2} \sigma'_{ij} \sigma'_{ij}, \quad I_3 = \frac{1}{3} \sigma'_{ij} \sigma'_{jk} \sigma'_{ki} \quad (3.3)$$

Сравнивая (2.1) с (3.1), (3.2), видим, что для напряженных состояний D^- угол ω изменяется в интервале $-\frac{\pi}{6} \leq \omega \leq 0$, а для D^+

он изменяется в интервале $0 \leq \omega \leq \frac{\pi}{6}$. Таким образом, напряженные состояния вида (2.1) на девиаторной плоскости выделяют две секторальные области: $D^- \left\{ -\frac{\pi}{6} \leq \omega \leq 0 \right\}$ и $D^+ \left\{ 0 \leq \omega \leq \frac{\pi}{6} \right\}$, а граница между ними определяется из условия $\omega = 0$. Принимая во внимание (3.1), две ветви кривой текучести (2.11), (2.12) можно представить в виде

$$3I_2^2 \left[\frac{1}{k^2} + 2 \left(\frac{1}{s^2} - \frac{1}{k^2} \right) \cos^2 \left(\omega + \frac{2}{3} \pi \right) \right] = 1, \quad -\frac{\pi}{6} \leq \omega \leq 0 \quad (3.4)$$

$$3I_2^2 \left[\frac{1}{s^2} + 2 \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{s^2} \right) \cos^2 \left(\omega - \frac{2}{3} \pi \right) \right] = 1, \quad 0 \leq \omega \leq \frac{\pi}{6} \quad (3.5)$$

На девиаторной плоскости кривые (3.4), (3.5) удобно относить к полярной системе координат, где полярным радиусом может служить интенсивность касательных напряжений I_2 , а полярным углом — угол ω :

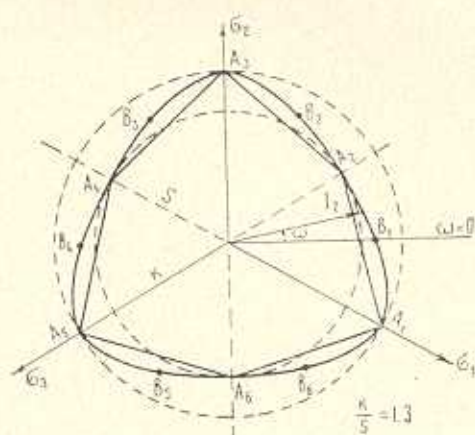
$$I_2 = \frac{ks}{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{s^2 + 2(k^2 - s^2) \cos^2 \left(\omega + \frac{2}{3} \pi \right)}}, \quad -\frac{\pi}{6} \leq \omega \leq 0 \quad (3.6)$$

$$I_2 = \frac{ks}{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{k^2 + 2(s^2 - k^2) \cos^2 \left(\omega - \frac{2}{3} \pi \right)}}, \quad 0 \leq \omega \leq \frac{\pi}{6} \quad (3.7)$$

Рассматривая (3.6) и (3.7) как функции от угла ω , убеждаемся, что при $\omega = 0$ значения этих функций и первых производных совпадают, а вторые производные не совпадают. Таким образом, на кривой текучести точка $\omega = 0$ является точкой сопряжения для кривых (3.6), (3.7). Условие выпуклости кривой текучести требует, чтобы кривизна ее сохранила знак в интервале изменения угла ω . Поэтому из формулы кривизны плоской кривой следует, что необходимо выполнение условия

$$I_2^2 + 2I_2'^2 - I_2 I_2'' \geq 0 \quad (3.8)$$

Вычисления показывают, что для любых точек на кривых (3.6), (3.7) условие (3.8) будет выполнено, если $k/s < \sqrt{2}$ и $s/k < \sqrt{2}$. Как видно из (3.6) и (3.7), в этом случае они представляются уравнениями дуг эллипсов, имеющих различные эксцентриситеты. Таким образом, если отбросить ограничение $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$, то есть $-\frac{\pi}{6} \leq \omega \leq \frac{\pi}{6}$, относящееся к изменению угла ω , то кривая текучести будет состоять из дуг двух различных эллипсов (3.6) и (3.7), сопряженных в точках B_1, B_2, \dots, B_6 (фиг.1). Приведенное условие пластичности является гладким в пространстве главных напряжений и его можно рассматривать как обобщение условия пластичности Мизеса.



Фиг. 1

В теории пластичности широко пользуются условием пластичности Треска-Сен-Венана, являющимся в пространстве главных напряжений кусочно-линейной аппроксимацией условия пластичности Мизеса. Рассмотрим теперь аналогичную аппроксимацию, обобщающую условие пластичности Треска-Сен-Венана и для кривых пластичности (3.6), (3.7). Таким обобщением является условие пластичности, интерпретирующееся в пространстве главных напряжений шестигранной призмой, грани которой перпендикулярны к девиаторной плоскости, а ребра проходят через экспериментальные точки A_1, A_2, \dots, A_6 , соответствующие пределам текучести при растяжении и сжатии [8]. Уравнения граней этой призмы представляются в следующем виде (фиг. 1):

$$\begin{aligned} \frac{1}{k} (\sigma_1 - \sigma_2) - \frac{1}{s} (\sigma_3 - \sigma_2) &= \pm 1, & (A_1A_2), (A_4A_5) \\ \frac{1}{k} (\sigma_2 - \sigma_1) - \frac{1}{s} (\sigma_3 - \sigma_1) &= \pm 1, & (A_2A_3), (A_5A_6) \\ \frac{1}{k} (\sigma_2 - \sigma_3) - \frac{1}{s} (\sigma_1 - \sigma_3) &= \pm 1, & (A_3A_4), (A_6A_1) \end{aligned} \quad (3.9)$$

а если воспользоваться тригонометрическими представлениями (3.1), то в форме

$$\begin{aligned} 2I_2 \left[\frac{1}{k} \cos \left(\omega + \frac{1}{3} \pi \right) + \frac{1}{s} \cos \left(\omega - \frac{1}{3} \pi \right) \right] &= \pm 1 \\ 2I_2 \left[\frac{1}{s} \cos \omega - \frac{1}{k} \cos \left(\omega + \frac{1}{3} \pi \right) \right] &= \pm 1 \\ 2I_2 \left[\frac{1}{k} \cos \left(\omega - \frac{1}{3} \pi \right) - \frac{1}{s} \cos \omega \right] &= \pm 1 \end{aligned} \quad (3.10)$$

4. Обратимся теперь к определению закона пластического течения. Согласно ассоциированному закону течения, принимая (2.11) и (2.12) в качестве пластических потенциалов, для скоростей пластических деформаций $\dot{\varepsilon}_{ij}^p$ получим следующие выражения:

для напряженных состояний вида D^-

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \lambda \left[\left(\frac{2}{s^2} - \frac{1}{k^2} \right) \sigma'_{ij} + 3 \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{s^2} \right) \sigma'_1 \left(l_i l_j - \frac{1}{3} \delta_{ij} \right) \right] \quad (4.1)$$

для напряженных состояний вида D^+

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \lambda \left[\left(\frac{2}{k^2} - \frac{1}{s^2} \right) \sigma'_{ij} + 3 \left(\frac{1}{s^2} - \frac{1}{k^2} \right) \sigma'_3 \left(n_i n_j - \frac{1}{3} \delta_{ij} \right) \right] \quad (4.2)$$

Здесь λ — положительный неопределенный множитель, δ_{ij} — единичный тензор, l_i , m_i , n_i — направляющие косинусы главных направлений относительно некоторой фиксированной ортогональной системы координат x_i , определяемые из формул [9]

$$l_i l_j = \frac{\partial \sigma_1}{\partial \sigma_{ij}}, \quad m_i m_j = \frac{\partial \sigma_2}{\partial \sigma_{ij}}, \quad n_i n_j = \frac{\partial \sigma_3}{\partial \sigma_{ij}} \quad (4.3)$$

В законе течения (4.1), (4.2) главные напряжения и направляющие косинусы следует выразить через составляющие тензора напряжений. Используя формулы [9]

$$\begin{aligned} l_i l_j &= \frac{1}{3} \delta_{ij} + \frac{\sqrt{3}}{3} \frac{\sigma'_{ij}}{I_2} \sin \left(\omega + \frac{2}{3} \pi \right) - \frac{\sqrt{3} \cos \left(\omega + \frac{2}{3} \pi \right)}{3I_2^2 \cos 3\omega} \Omega_{ij} \\ m_i m_j &= \frac{1}{3} \delta_{ij} + \frac{\sqrt{3}}{3} \frac{\sigma'_{ij}}{I_2} \sin \omega - \frac{\sqrt{3} \cos \omega}{3I_2^2 \cos 3\omega} \Omega_{ij} \\ n_i n_j &= \frac{1}{3} \delta_{ij} + \frac{\sqrt{3}}{3} \frac{\sigma'_{ij}}{I_2} \sin \left(\omega - \frac{2}{3} \pi \right) - \frac{\sqrt{3} \cos \left(\omega - \frac{2}{3} \pi \right)}{3I_2^2 \cos 3\omega} \Omega_{ij} \end{aligned} \quad (4.4)$$

где Ω_{ij} — следующий тензор

$$\Omega_{ij} = \sigma'_{ij} I_2 \sin 3\omega + \sqrt{3} \left(\sigma'_{ik} \sigma'_{kl} - \frac{2}{3} \delta_{ij} I_2^2 \right) \quad (4.5)$$

и подставляя (3.1), (4.4) в (4.1), (4.2), получаем закон течения в следующем виде:

для напряженных состояний вида D^-

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_{ij}^p = \lambda \left\{ \left[\frac{1}{k^2} + 2 \left(\frac{1}{s^2} - \frac{1}{k^2} \right) \cos^2 \left(\omega + \frac{2}{3} \pi \right) \right] \sigma'_{ij} + \right. \\ \left. + \left(\frac{1}{s^2} - \frac{1}{k^2} \right) \frac{\sin 2 \left(\omega + \frac{2}{3} \pi \right)}{I_2 \cos 3\omega} \Omega_{ij} \right\} \end{aligned} \quad (4.6)$$

для напряженных состояний вида D^+

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_{ij}^p = \lambda \left\{ \left[\frac{1}{s^2} + 2 \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{s^2} \right) \cos^2 \left(\omega - \frac{2}{3} \pi \right) \right] \sigma'_{ij} + \right. \\ \left. + \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{s^2} \right) \frac{\sin 2 \left(\omega - \frac{2}{3} \pi \right)}{I_2 \cos 3\omega} \Omega_{ij} \right\} \end{aligned} \quad (4.7)$$

Нетрудно видеть, что λ определяется с помощью диссипативной функции. Используя закон течения (4.1), (4.2) и соответствующие условия пластичности (3.4), (3.5), получаем

$$\dot{W} = \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}^p = \frac{2}{3} \lambda \quad (4.8)$$

Принимая во внимание

$$\dot{W} = 2I_2 \Gamma_2 \cos(\omega - \psi) \quad (4.9)$$

будем иметь

$$\lambda = 3I_2 \Gamma_2 \cos(\omega - \psi) \quad (4.10)$$

где Γ_2 и ψ — инварианты девиатора тензора $\dot{\varepsilon}_{ij}^p$, аналогичные (3.2), (3.3)

$$\Gamma_2 = \frac{1}{2} \dot{\varepsilon}_{ij}^p \dot{\varepsilon}_{ij}^p, \quad \psi = -\frac{1}{3} \arcsin \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{\Gamma_3}{\Gamma_2^3} \right) \quad (4.11)$$

Как видно из (4.6), (4.7) и (4.10), вследствие неподобия девиаторов напряжений и скоростей деформаций в закон течения входят углы видов напряженных и деформированных состояний, что довольно осложняет характер связей этих девиаторов.

Нередко полезным может оказываться использование кусочно-линейного условия текучести (3.9). Поэтому рассмотрим закон течения, соответствующий одной из граней или ребер призмы текучести (3.9).

Предельным напряженным состояниям, когда $-\frac{\pi}{6} \leq \omega \leq \frac{\pi}{6}$, бу-

дет соответствовать грань A_1A_2 , уравнение которой есть

$$\frac{1}{k} (\sigma_1 - \sigma_2) - \frac{1}{s} (\sigma_3 - \sigma_2) = 1 \quad (4.12)$$

Принимая его в качестве пластического потенциала, согласно (4.3) будем иметь

$$\dot{\epsilon}_{ij}^p = \lambda \left[\frac{1}{k} (l_i l_j - m_i m_j) - \frac{1}{s} (n_i n_j - m_i m_j) \right] \quad (4.13)$$

После подстановки (4.4) и (4.13) закон течения представляется в следующем виде:

$$\dot{\epsilon}_{ij}^p = \frac{\lambda}{I_2} \left\{ \left[\frac{1}{k} \cos\left(\omega + \frac{\pi}{3}\right) + \frac{1}{s} \cos\left(\omega - \frac{\pi}{3}\right) \right] \sigma'_{ij} + \left[\frac{1}{k} \sin\left(\omega + \frac{\pi}{3}\right) + \frac{1}{s} \sin\left(\omega - \frac{\pi}{3}\right) \right] \frac{\Omega_{ij}}{I_2 \cos 3\omega} \right\} \quad (4.14)$$

Как следует из (3.1), при $\omega = \frac{\pi}{6}$ имеем: $\sigma'_1 = \sigma'_2 = \frac{\sqrt{3}}{3} I_2$, $\sigma'_3 = -\frac{2\sqrt{3}}{3} I_2$, а при $\omega = -\frac{\pi}{6}$ имеем: $\sigma'_1 = -\frac{2\sqrt{3}}{3} I_2$, $\sigma'_2 = \sigma'_3 = -\frac{\sqrt{3}}{3} I_2$, то есть совпадают значения двух главных напряжений.

В этих случаях значения направляющих косинусов (4.4) оказываются неопределенными, поэтому следует, что [9]

$$\Omega_{ij} = 0, \quad \sqrt{3} (\sigma'_{ik} \sigma'_{kj} - \frac{2}{3} \delta_{ij} I_2^2) \pm \sigma'_{ij} I_2 = 0 \quad (4.15)$$

Компоненты девиатора напряжений связываются двумя независимыми соотношениями следующего вида:

$$\begin{aligned} f_1(\sigma'_{ij}) &\equiv \left(\sigma'_{11} \pm \frac{\sqrt{3}}{3} I_2 \right) \left(\sigma'_{22} \pm \frac{\sqrt{3}}{3} I_2 \right) - \sigma_{12}^2 = 0 \\ f_2(\sigma'_{ij}) &\equiv \left(\sigma'_{22} \pm \frac{\sqrt{3}}{3} I_2 \right) \left(\sigma'_{33} \pm \frac{\sqrt{3}}{3} I_2 \right) - \sigma_{23}^2 = 0 \\ f_3(\sigma'_{ij}) &\equiv \left(\sigma'_{33} \pm \frac{\sqrt{3}}{3} I_2 \right) \left(\sigma'_{11} \pm \frac{\sqrt{3}}{3} I_2 \right) - \sigma_{13}^2 = 0 \end{aligned} \quad (4.16)$$

полученными из (4.15). Предельным напряжениям при $\omega = \pm \frac{\pi}{6}$

соответствуют ребра A_1 и A_2 призмы текучести и, как следует из (4.14), скорости деформаций в этом случае превращаются в неопределенность. Тогда, определяя значения I_2 из условия пластичности (4.12) соответственно: при $\omega = \frac{\pi}{6}$, $I_2 = s\sqrt{3}$, при $\omega = -\frac{\pi}{6}$,

$I_2 = k\sqrt{3}$ и подставляя в (4.16), получаем три независимые связи между компонентами девиатора напряжений. Используя условие экстремальности диссипативной функции, закон течения в этом случае можно представить в виде

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial \sigma_{ij}} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial \sigma_{ij}} + \lambda_3 \frac{\partial f_3}{\partial \sigma_{ij}} \quad (4.17)$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ —множители Лагранжа. Окончательное выражение (4.17) будет аналогичным с законом течения, получаемым из условия Треска-Сен-Венана [10–11].

Отметим, что при рассмотрении упруго-пластических задач предполагается, что полная деформация состоит из упругих и пластических частей

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij}^e + \dot{\varepsilon}_{ij}^p \quad (4.18)$$

Скорости упругих деформаций $\dot{\varepsilon}_{ij}^e$ определяются из обобщенного закона Гука [3] и связаны напряжениями, направляющими косинусами и скоростями их. При сложных нагружениях выражения их получаются довольно сложными и громоздкими. Однако при простых нагружениях, когда направления главных осей не изменяются:

$$\dot{l}_i = \dot{m}_i = \dot{n}_i = 0 \quad (4.19)$$

достигается значительное упрощение и $\dot{\varepsilon}_{ij}^e$ будут связаны со скоростями напряжений и направляющими косинусами [3].

5. По схеме жестко-пластического тела рассмотрим плоское деформированное состояние, когда

$$\dot{\varepsilon}_{13} = \dot{\varepsilon}_{23} = \dot{\varepsilon}_{33} = 0 \quad (5.1)$$

а остальные отличные от нуля компоненты скорости деформации не зависят от координаты x_3 . Тогда, согласно (5.1) и (4.4), направляющие косинусы главных направлений представятся в следующем виде:

$$\begin{aligned} l_1 = \cos \varphi, \quad l_2 = \sin \varphi, \quad n_1 = -\sin \varphi, \quad n_2 = \cos \varphi, \quad m_3 = 1, \\ l_3 = n_3 = m_1 = m_2 = 0 \end{aligned} \quad (5.2)$$

где φ —угол между первым главным направлением и осью x_1 .

Из условия изотропии следует, что $\sigma_{13} = \sigma_{23} = 0$, а σ_{33} —среднее главное напряжение. Компоненты напряжения на основании известных формул преобразования принимают следующий вид:

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= \frac{1}{2} (\sigma_1 + \sigma_3) + \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_3) \cos 2\varphi \\ \sigma_{22} &= \frac{1}{2} (\sigma_1 + \sigma_3) - \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_3) \cos 2\varphi \\ \sigma_{12} &= \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_3) \sin 2\varphi, \quad \sigma_{33} = \sigma_2\end{aligned}\quad (5.3)$$

Допустим, что напряженное состояние относится к типу D^- , тогда из закона течения (4.1) получим

$$\begin{aligned}\dot{\varepsilon}_{11} &= \lambda \left[\left(\frac{2}{s^2} - \frac{1}{k^2} \right) \sigma'_{11} + 3\sigma'_1 \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{s^2} \right) \left(\cos^2 \varphi - \frac{1}{3} \right) \right] \\ \dot{\varepsilon}_{22} &= \lambda \left[\left(\frac{2}{s^2} - \frac{1}{k^2} \right) \sigma'_{22} + 3\sigma'_1 \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{s^2} \right) \left(\sin^2 \varphi - \frac{1}{3} \right) \right] \\ \dot{\varepsilon}_{12} &= \lambda \left[\left(\frac{2}{s^2} - \frac{1}{k^2} \right) \sigma'_{12} + 3\sigma'_1 \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{s^2} \right) \sin \varphi \cos \varphi \right] \\ \dot{\varepsilon}_{33} &= \lambda \left[\left(\frac{2}{s^2} - \frac{1}{k^2} \right) \sigma'_{33} - \sigma'_1 \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{s^2} \right) \right] = 0\end{aligned}\quad (5.4)$$

Из последнего уравнения (5.4) следует

$$\sigma'_{33} = \frac{s^2 - k^2}{2k^2 - s^2} \sigma'_1 \quad (5.5)$$

Принимая во внимание (1.6), (5.5), для главных значений девиатора напряжений будем иметь

$$\sigma'_1 = \frac{2k^2 - s^2}{3k^2 - s^2} (\sigma_1 - \sigma_3), \quad \sigma'_2 = \frac{s^2 - k^2}{3k^2 - s^2} (\sigma_1 - \sigma_3), \quad \sigma'_3 = -\frac{k^2}{3k^2 - s^2} (\sigma_1 - \sigma_3) \quad (5.6)$$

Среднее главное напряжение σ_2 определяется следующим образом:

$$\sigma_2 = \sigma_{33} = \frac{1}{2} (\sigma_1 + \sigma_3) + \frac{3(s^2 - k^2)}{2(3k^2 - s^2)} (\sigma_1 - \sigma_3), \quad -\frac{\pi}{6} \leq \omega \leq 0 \quad (5.7)$$

Согласно (5.3)–(5.6) закон течения можно представить в виде

$$\begin{aligned}\dot{\varepsilon}_{11} &= \lambda \frac{2k^2 - s^2}{k^2 (3k^2 - s^2)} (\sigma_1 - \sigma_3) \cos 2\varphi \\ \dot{\varepsilon}_{22} &= -\lambda \frac{2k^2 - s^2}{k^2 (3k^2 - s^2)} (\sigma_1 - \sigma_3) \cos 2\varphi \\ \dot{\varepsilon}_{12} &= \lambda \frac{2k^2 - s^2}{k^2 (3k^2 - s^2)} (\sigma_1 - \sigma_3) \sin 2\varphi\end{aligned}\quad (5.8)$$

Условие пластичности (2.11) принимает следующий вид:

$$\sigma_1 - \sigma_3 = k \sqrt{\frac{2(3k^2 - s^2)}{3(2k^2 - s^2)}} \quad (5.9)$$

Из (5.6) и (3.1) можно определить угол вида напряженного состояния

$$\operatorname{tg} \omega = \frac{\sqrt{3}(s^2 - k^2)}{3k^2 - s^2}, \quad -\frac{\pi}{6} \leq \omega \leq 0 \quad (5.10)$$

Теперь, предполагая, что напряженное состояние относится к типу D^+ , получаем формулы, аналогичные (5.4)–(5.10). Из закона течения (4.2) следует, что

$$\sigma_2' = \frac{k^2 - s^2}{2s^2 - k^2} \sigma_3' \quad (5.11)$$

и главные значения диватора напряжений будут

$$\sigma_1' = \frac{s^2}{3s^2 - k^2} (\sigma_1 - \sigma_3), \quad \sigma_2' = \frac{s^2 - k^2}{3s^2 - k^2} (\sigma_1 - \sigma_3), \quad \sigma_3' = \frac{k^2 - 2s^2}{3s^2 - k^2} (\sigma_1 - \sigma_3) \quad (5.12)$$

Среднее главное напряжение σ_2 будет

$$\sigma_2 = \sigma_{33} = \frac{1}{2} (\sigma_1 + \sigma_3) + \frac{3(s^2 - k^2)}{2(3s^2 - k^2)} (\sigma_1 - \sigma_3) \quad (5.13)$$

Закон течения представляется в виде

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_{11} &= \lambda \frac{2s^2 - k^2}{s^2(3s^2 - k^2)} (\sigma_1 - \sigma_3) \cos 2\varphi \\ \dot{\varepsilon}_{22} &= -\lambda \frac{2s^2 - k^2}{s^2(3s^2 - k^2)} (\sigma_1 - \sigma_3) \cos 2\varphi \\ \dot{\varepsilon}_{12} &= \lambda \frac{2s^2 - k^2}{s^2(3s^2 - k^2)} (\sigma_1 - \sigma_3) \sin 2\varphi \end{aligned} \quad (5.14)$$

а условие пластичности (2.12) принимает вид

$$\sigma_1 - \sigma_3 = s \sqrt{\frac{2(3s^2 - k^2)}{3(2s^2 - k^2)}} \quad (5.15)$$

Угол вида напряженного состояния определяется по формуле

$$\operatorname{tg} \omega = \frac{\sqrt{3}(s^2 - k^2)}{3s^2 - k^2}, \quad 0 \leq \omega \leq \frac{\pi}{6} \quad (5.16)$$

Полученные формулы (5.3), (5.9) и (5.15) подсказывают, что если ввести обозначения

$$p = \frac{1}{2} (\sigma_1 + \sigma_3), \quad \sigma_1 - \sigma_3 = 2k_s$$

то для обоих случаев напряженных состояний D^- и D^+ из уравнения равновесия получаем следующую нелинейную систему уравнений относительно неизвестных функций $p = p(x_1, x_2)$ и $\varphi = \varphi(x_1, x_2)$:

$$\frac{\partial p}{\partial x_1} - 2k_s \left(\sin 2\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} - \cos 2\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \right) = 0 \quad (5.17)$$

$$\frac{\partial p}{\partial x_2} + 2k_s \left(\cos 2\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + \sin 2\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \right) = 0$$

Из (5.8) и (5.14) следует, что система уравнений относительно скоростей v_1, v_2 имеет следующий вид:

$$2 \frac{\partial v_1}{\partial x_1} - \operatorname{ctg} 2\varphi \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) = 0 \quad (5.18)$$

$$2 \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \operatorname{ctg} 2\varphi \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) = 0$$

Заметим, что системы уравнений (5.17) и (5.18), описывающие поля напряжений и скоростей деформаций разносопротивляющегося тела в условиях плоской деформации, совпадают с уравнениями для обычных изотропных тел [12]. Однако, по-разному определяются напряжение σ_{33} : (5.7), (5.13) и значения коэффициента k_s . При заданных значениях характеристик материала k и s сначала необходимо из (5.10) и (5.15) определить угол вида напряженного состояния ω , затем из (5.9) или (5.14) определяется соответствующее значение k_s .

Ереванский политехнический институт
им. К. Маркса

Поступила 7 VI 1971

Մ. Ս. ՍԱՐԳՍՅԱՆ

ՄԱՐՄԻՆՆԵՐԻ ԻԳԵԱԼԱԿԱՆ ՊԼԱՍՏԻԿՈՒԹՅԱՆ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՎԵՐԱՔԵՐՅԱԼ
ՈՐՈՆՅ ՆՅՈՒԹԸ ՏԱՐՔԵՐ ՁԵՎՈՎ Է ԴԻՄԱԳՐՈՒՄ ՉԳՄԱՆԸ ԵՎ ՍԵՂՄՄԱՆԸ

Ա մ ֆ ո ֆ ու մ

Աշխատանքում դիտարկված են ձգման և սեղմման հոսունության տարբեր սահմաններ ունեցող մարմինների իզոպլական պլաստիկության տեսության մի բանի հարցեր: Իզոպլական պլաստիկության տեսության սովորական ենթադրությունների դեպքում, ընդունելով որ հոսունության ֆունկցիան հանդիսանում է բառակուսային ֆունկցիա լարումների դեկատորի գլխավոր արժեքներից, ստացված է Միլեսի պայմանն ընդհանրացնող պլաստիկության պայման:

Ցույց է տրված, որ դեկատորային հարթության վրա հոսունության կորը կազմված է իրար հետ լծորդված երկու էլիպսների աղեղներից: Ձուգորդված

Հասունութեան օրենքի հիման վրա ստացված են տարադիմադրող մարմինների իդեալական պլաստիկութեան տեսութեան հիմնական հավասարումները և անշտիտները:

ON THE THEORY OF IDEAL PLASTICITY OF SOLIDS WHOSE MATERIAL IS HETERORESISTANT TO EXTENSION AND COMPRESSION

M. S. SARKISSIAN

S u m m a r y

Some aspects of the ideal plasticity theory of solids with different yielding limits in extension and compression are considered. Under the familiar assumptions of the ideal plasticity theory, and taking the yield function to be a quadratic function of principal values of the stress deviator, the plasticity criterion, generalizing that of Mises, is obtained. The yield curve, plotted on the deviation plane, is shown to consist of two conjugated arches of two different ellipses. On the basis of the associated flow rule the major equations and relations of the ideal plasticity theory of solids, heteroresistant to extension and compression, are derived.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Амбарцумян С. А., Хачатрян А. А. Основные уравнения теории упругости для материалов, разносопротивляющихся растяжению и сжатию. Инж. журн. Механика твердого тела, № 2, 1966.
2. Амбарцумян С. А., Хачатрян А. А. К разномодульной теории упругости. Инж. журн. Механика твердого тела, № 6, 1966.
3. Саркисян М. С. К теории упругости изотропных тел, материал которых по-разному сопротивляется растяжению и сжатию. Инж. журн. Механика твердого тела, № 5, 1971.
4. Venkatraman B. and Sankaranarayanan R. Collapse Loads of Orthotropic Cylindrical Shells under Radial Pressures. Jour. of the Franklin Inst., v. 278, № 3, 1964.
5. Листрова Ю. П., Мокшова Н. И. О предельном равновесии конструкций, выполненных из материала с различными пределами текучести при растяжении и сжатии. Инж. журн. Механика твердого тела, № 6, 1967.
6. Лелик Ю. Р. Предельное равновесие кольцевых пластин, материал которых имеет различные пределы текучести при растяжении и сжатии. Инж. журн. Механика твердого тела, № 1, 1970.
7. Качанов Л. М. Основы теории пластичности. Изд. „Наука“, М., 1969.
8. Ивлев Д. Д. К теории идеальной пластической анизотропии. Приклад. математ. и механика, вып. 6, 1959.
9. Саркисян М. С. К вопросу о связи между неподобными девиаторами. Инж. журн. Механика твердого тела, № 4, 1972.

10. *Ивлев Д. Д.* О выводе уравнений, определяющих пластическое течение при условии полной пластичности. Изв. ОТН, Мех. и маш., № 3, 1959.
11. *Розенблюм В. И.* Об условии полной пластичности для идеально пластической среды. Инж. журн. Механика твердого тела, № 4, 1969.
12. *Соколовский В. В.* Теория пластичности. Высшая школа, 1969.