

Г. И. АВАНЕСОВА

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ АНИЗОТРОПНОЙ
 ОБОЛОЧКИ ПОД ДЕЙСТВИЕМ КОЛЬЦЕВОГО УСИЛИЯ С
 УЧЕТОМ ДОКРИТИЧЕСКОГО ПРОГИБА

В данной работе рассматривается устойчивость анизотропной круговой цилиндрической оболочки радиуса R , нагруженной кольцевой обжимающей нагрузкой q_0 . Предполагается, что в каждой точке оболочки имеется лишь одна плоскость упругой симметрии, которая параллельна координатной поверхности.

За координатную поверхность принимается средняя поверхность оболочки; координатные линии направлены: x —по образующей цилиндра, y —по направляющей дуге и z —по радиусу кривизны.

В отношении указанной оболочки принимается гипотеза недеформируемых нормалей, а прогибы считаются сравнимыми с толщиной оболочки h .

В случае, когда оболочка сделана из ортотропного материала и главные физические и геометрические направления не совпадают, оболочка работает как анизотропная. В данной работе определен оптимальный угол φ между главными геометрическими и физическими направлениями для различных случаев сочетания упругих постоянных оболочки.

1. В силу указанных предположений, уравнения устойчивости оболочки с учетом начального докритического прогиба W_0 запишутся в виде [1], [4]

$$L_1(D_{jk})W = \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \frac{\partial^2 W_0}{\partial x^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x} \quad (1.1)$$

$$L_2(A_{jk})\varphi = -\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \frac{d^2 W_0}{dx^2} - \frac{1}{R} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}$$

$$L_1(D_{jk}) = D_{11} \frac{\partial^4}{\partial x^4} + D_{22} \frac{\partial^4}{\partial y^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + 4D_{16} \frac{\partial^4}{\partial x^3 \partial y} + 4D_{26} \frac{\partial^4}{\partial x \partial y^3} \quad (1.2)$$

$$L_2(A_{jk}) = A_{22} \frac{\partial^4}{\partial x^4} + A_{11} \frac{\partial^4}{\partial y^4} + (A_{66} + 2A_{12}) \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} - 2A_{26} \frac{\partial^4}{\partial x^3 \partial y} - 2A_{16} \frac{\partial^4}{\partial x \partial y^3}$$

$W(x, y)$, $\varphi(x, y)$ — возмущения радиального перемещения и силовой функции,

B_{jk} — коэффициент упругости для ортотропной оболочки,

$$B_{11} = \frac{E_1}{1 - \nu_1 \nu_2}, \quad B_{12} = \frac{\nu_2 E_1}{1 - \nu_1 \nu_2} = \frac{\nu_1 E_2}{1 - \nu_1 \nu_2} \quad (1.3)$$

$$B_{22} = \frac{E_2}{1 - \nu_1 \nu_2}, \quad B_{66} = G_{12}, \quad B_{16} = B_{26} = 0$$

Коэффициенты A_{jk} определяются по формулам

$$A_{11} = \frac{C_{22} C_{66} - C_{26}^2}{\Omega}, \quad A_{12} = \frac{C_{16} C_{26} - C_{12} C_{66}}{\Omega} \quad (1.4)$$

$$A_{22} = \frac{C_{11} C_{66} - C_{16}^2}{\Omega}, \quad A_{16} = \frac{C_{12} C_{26} - C_{22} C_{16}}{\Omega}$$

$$A_{66} = \frac{C_{11} C_{22} - C_{12}^2}{\Omega}, \quad A_{26} = \frac{C_{12} C_{16} - C_{11} C_{26}}{\Omega}$$

$$\Omega = (C_{11} C_{22} - C_{12}^2) C_{66} + 2C_{12} C_{16} C_{26} - C_{11} C_{26}^2 - C_{22} C_{16}^2 \quad (1.5)$$

$$C_{jk} = B_{jk} h$$

В случае несовпадения главных физических и геометрических направлений коэффициенты упругости B_{jk} определяются по следующим выражениям:

$$B_{11} = B'_{11} \cos^4 \varphi + 2(B'_{12} + 2B'_{66}) \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi + B'_{22} \sin^4 \varphi \quad (1.6)$$

$$B_{22} = B'_{11} \sin^4 \varphi + 2(B'_{12} + 2B'_{66}) \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi + B'_{22} \cos^4 \varphi$$

$$B_{12} = B'_{12} + [B'_{11} + B'_{22} - 2(B'_{12} + 2B'_{66})] \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi$$

$$B_{66} = B'_{66} + [B'_{11} + B'_{22} - 2(B'_{12} + 2B'_{66})] \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi$$

$$B_{16} = \frac{1}{2} [B'_{22} \sin^2 \varphi - B'_{11} \cos^2 \varphi + (B'_{12} + 2B'_{66}) \cos 2\varphi] \sin 2\varphi$$

$$B_{26} = \frac{1}{2} [B'_{22} \cos^2 \varphi - B'_{11} \sin^2 \varphi - (B'_{12} + 2B'_{66}) \cos 2\varphi] \sin 2\varphi$$

где φ — угол между главными геометрическими и физическими направлениями; B'_{jk} — коэффициент упругости при $\varphi = 0$.

Изучим начальное докритическое состояние. До потери статической устойчивости деформации оболочки будут осесимметричными. Принимая $W_0 = W_0(x)$, $\varphi_0 = \varphi_0(x)$, уравнения (1.1) можно заменить уравнением четвертого порядка

$$\frac{d^4 W_0}{dx^4} + \frac{W_0}{D_{11} A_{22} R^2} = \frac{q_0}{D_{11}} \quad (1.7)$$

$$\frac{d^2 \varphi_0}{dx^2} = -\frac{W_0}{A_{22} R}$$

Введем переменную $\alpha = x/R$ и обозначим $\lambda^4 = \frac{R^2}{4D_{11}A_{22}}$

Тогда уравнение (1.7) можно представить в следующем виде:

$$\frac{d^4 W_0}{d\alpha^4} + 4\lambda^4 W_0 = \frac{q_0 R^4}{D_{11}} \quad (1.8)$$

При рассмотрении бесконечной оболочки принимается, что кольцевая нагрузка q_0 приложена в сечении $\alpha = 0$, тогда

$$W_0 = \frac{q_0 R^3}{8D_{11}\lambda^2} e^{-\lambda\alpha} (\cos \lambda\alpha + \sin \lambda\alpha) \quad (1.9)$$

а усилия вдоль дуги равны

$$P_y = -\frac{W_0}{A_{22}R} = -\frac{q_0 R^2}{8D_{11}A_{22}\lambda^2} e^{-\lambda\alpha} (\cos \lambda\alpha + \sin \lambda\alpha) \quad (1.10)$$

При рассмотрении дальнейшего равновесного состояния оболочки, уже не являющегося осесимметричным, заменим систему уравнений (1.1) разрешающим уравнением восьмого порядка

$$[L_1(D_{jk}) \times L_2(A_{jk})] W + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} = P_y L_2(A_{jk}) \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \quad (1.11)$$

где $L_1(D_{jk})$ и $L_2(A_{jk})$ — уже указанные операторы; P_y — усилия вдоль дуги окружности.

Предполагая оболочку достаточно длинной, представим решение уравнения (1.11) в виде

$$W = W_1(\alpha) e^{-in\beta} \quad (1.12)$$

n — число волн в окружном направлении, $\beta = \frac{y}{R}$ — безразмерная координата

$$[L_1(D_{jk}) \times L_2(A_{jk})] W_1 + R^2 \frac{d^4 W_1}{d\alpha^4} = -P_y n^2 R^2 L_2(A_{jk}) W_1 \quad (1.13)$$

$$\begin{aligned} L_1(D_{jk}) = & D_{11} \frac{d^4}{d\alpha^4} - 4D_{16} \frac{d^3}{d\alpha^3} in - 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{d^2}{d\alpha^2} n^2 + \\ & + 4D_{26} \frac{d}{d\alpha} in^3 + D_{22} n^4 \end{aligned} \quad (1.14)$$

$$\begin{aligned} L_2(A_{jk}) = & A_{22} \frac{d^4}{d\alpha^4} + 2A_{26} \frac{d^3}{d\alpha^3} in - (A_{66} + 2A_{12}) \frac{d^2}{d\alpha^2} n^2 - \\ & - 2A_{16} \frac{d}{d\alpha} in^3 + A_{11} n^4 \end{aligned}$$

Применим преобразование Фурье, учитывая, что трансформанта некоторой функции $W_1^{(s)}$ и ее оригинал $W_1(x)$ связаны соотношениями

$$W_1^{(s)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} W_1(x) e^{isx} dx, \quad W_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} W_1^{(s)} e^{-isx} ds \quad (1.15)$$

уравнение трансформанты получаем в виде

$$(L_1^{(s)} \times L_2^{(s)} + R^2 s^4) W_1^{(s)} = - \frac{n^2 L_2^{(s)}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} P_y W_1 e^{isx} dx \quad (1.16)$$

$$L_1^{(s)} = D_{11} s^4 - 4D_{16} s^3 n + 2(D_{12} + 2D_{66}) s^2 n^2 - 4D_{26} s n^3 + D_{22} n^4 \quad (1.17)$$

$$L_2^{(s)} = A_{22} s^4 + 2A_{26} s^3 n + (A_{66} + 2A_{12}) s^2 n^2 + 2A_{16} s n^3 + A_{11} n^4$$

Интеграл правой части уравнения (1.16) может быть заменен следующим образом:

$$\int_{-\infty}^{\infty} P_y W_1 e^{isx} dx = \int_0^{\infty} W_1^{(p)} (P_y^{(s-p)} + P_y^{(s+p)}) dp \quad (1.18)$$

$P_y^{(s-p)}$, $P_y^{(s+p)}$ — трансформанты функции P_y

Учтя (1.10), можно записать

$$P_y^{(s-p)} + P_y^{(s+p)} = - \frac{q_0 R^2}{\sqrt{2\pi} A_{22} D_{11}} \left[\frac{1}{(s-p)^4 + 4\lambda^4} + \frac{1}{(s+p)^4 + 4\lambda^4} \right] \quad (1.19)$$

Обозначая

$$V^{(s)} = \sqrt{\frac{L_1^{(s)} \times L_2^{(s)} + R^2 s^4}{L_2^{(s)}}} W_1^{(s)} \quad (1.20)$$

получим однородные интегральные уравнения Фредгольма второго рода с симметричным ядром

$$V^{(s)} = q_0 \int_0^{\infty} K(s, p) V^{(p)} dp \quad (1.21)$$

$$K(s, p) = \frac{1}{\pi} n^2 R^2 \sqrt{\frac{L_2^{(s)}}{L_1^{(s)} \times L_2^{(s)} + R^2 s^4}} \sqrt{\frac{L_2^{(p)}}{L_1^{(p)} \times L_2^{(p)} + R^2 p^4}} \quad (1.22)$$

Искомая нагрузка входит в данное уравнение в качестве независимого параметра, то есть мы имеем задачу о собственных значениях уравнения (1.21). Для определения первой критической нагрузки можно воспользоваться теорией симметричных интегральных уравнений, в которой для определения характеристического числа в первом приближении применяют выражение

$$q_0^2 = \frac{1}{S_2}, \quad S_2 = \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} K^2(s, p) ds dp \quad (1.23)$$

Верхняя критическая нагрузка может быть определена по формуле

$$\frac{1}{q_0} = \frac{1}{\pi} \frac{n^2 R^2}{Eh} \int_0^{\pi} \frac{EhL_2^{(s)} ds}{L_1^{(s)} \times L_2^{(s)} + R^2 s^4} \quad (1.24)$$

В случае изотропной оболочки

$$\frac{1}{q_0} = \frac{12(1-\nu^2)R^2 n^2}{\pi Eh^3} \int_0^{\pi} \frac{(s^2 + n^2)^2 ds}{(s^2 + n^2)^4 + 4h^4 s^4} \quad (1.25)$$

$$\frac{1}{q_0} = \frac{12(1-\nu^2)R^2}{\pi Eh^2 n} \frac{\sqrt{\sqrt{4 + \frac{h^4}{n^4}} + 2}}{\sqrt{4 + \frac{h^4}{n^4}}} \quad (1.26)$$

Полученное выражение совпадает с результатом, приведенным в работе [2], то есть при указанном подходе к решению задачи устойчивости учет докритического прогиба не влияет на величину критической нагрузки. Это обстоятельство не противоречит результатам работ [4, 5], в которых указывается на зависимость критической нагрузки от краевых условий на торцах цилиндра, поскольку в данной задаче рассматривается цилиндр бесконечной длины.

2. Для иллюстрации вышесказанного ниже приведены значения критической нагрузки $\bar{q}_{кр} = \frac{q_{кр}}{Eh}$, вычисленные на ЭВМ для оболочек со следующими сочетаниями упругих постоянных при $\nu = 0$ (табл. 1).

Таблица 1

$N \backslash B_{jk}$	B_{11}	B_{22}	B_{33}
I	E	E	$0.5E$
II	$2E$	E	$0.5E$
III	$10E$	E	$0.5E$

Для определения $n_{кр}$ сравниваются значения $\bar{q}_{кр}$ при различных n для указанных случаев I, II, III при $\nu = 0$ (табл. 2).

В табл. 3 приведены значения критической нагрузки при различных ν для II и III случая сочетания упругих постоянных.

Таблица

$N \backslash n$	5	6	7	8	9	10
I	$10^{-3} \cdot 0.395784$	$10^{-3} \cdot 0.387871$	$10^{-3} \cdot 0.384708$	$10^{-3} \cdot 0.387214$	$10^{-3} \cdot 0.395456$	$10^{-3} \cdot 0.40894$
II	$10^{-3} \cdot 0.452232$	$10^{-3} \cdot 0.43869$	$10^{-3} \cdot 0.431481$	$10^{-3} \cdot 0.431551$	$10^{-3} \cdot 0.438778$	$10^{-3} \cdot 0.45235$
III	$10^{-3} \cdot 0.598511$	$10^{-3} \cdot 0.568646$	$10^{-3} \cdot 0.552806$	$10^{-3} \cdot 0.550669$	$10^{-3} \cdot 0.560414$	$10^{-3} \cdot 0.57969$

Таблица 3

$n_{\text{кр}}$	$N \backslash \varphi$	0	30°	45°	60°	90°
7	II	$10^{-3} \cdot 0.43148$	$10^{-3} \cdot 0.443153$	$10^{-3} \cdot 0.416612$	$10^{-3} \cdot 0.371393$	$10^{-3} \cdot 0.293830$
8	III	$10^{-3} \cdot 0.550669$	$10^{-3} \cdot 0.655796$	$10^{-3} \cdot 0.675157$	$10^{-3} \cdot 0.576155$	$10^{-3} \cdot 0.174139$

Оптимальный угол φ ориентации физических и геометрических направлений меняется в зависимости от соотношения B_{11}/B_{22} . При увеличении последнего он сдвигается к $\frac{\pi}{2}$; при уменьшении — к нулю.

При $B_{11} > B_{22}$ $\min \bar{q}_{кр}$ достигается при $\varphi = \frac{k\pi}{2}$ (1, 3, 5, ...). Величина $(\max \bar{q}_{кр} - \min \bar{q}_{кр})$ растёт при увеличении B_{11}/B_{22} .

Գ. Ի. ԱՎԱՆԵՍՈՎԱ

ՕՂԱԿԱԶԵՎ ԲԵՌԻ ԱԶԳԵՑՈՒԹՅԱՆ ՏԱԿ ԳՏՆՎՈՂ ԱՆԻՉՈՏՐՈՂ ԳԻՆԱՅԻՆ
ԹԱՂԱՆԹԻ ԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ՝ ՄԻՆԶԻԹԵՏԻԿԱԿԱՆ
ՃԿՎԱՄՔԻ ՀԱՇՎԱՌՈՒՄՈՎ

Ա մ փ ո փ ո ս մ

Աշխատանքում դիտարկվում է օղակաձև սեղմող ուժերի ազդեցության տակ անիզոտրոպ շրջանային կորվածքով զլանային անվերջ թաղանթի կայունության խնդիրը: Վերջինս բերվում է ինտեգրալ հավասարման:

Անիզոտրոպությունը պայմանավորված է օրթոտրոպ թաղանթի ֆիզիկական և երկրաչափական գլխավոր ուղղությունների շեղման հետ:

Աշխատանքում որոշվում է նշված ուղղությունների միջև կազմված օպտիմալ անկյունը:

ON STABILITY OF A CYLINDRICAL ANISOTROPIC SHELL

G. I. AVANESOVA

S u m m a r y

The work deals with a problem of stability of an infinite anisotropic cylindrical shell under circular squeezing stresses. The problem is reduced to solving an integral equation.

Anisotropy is stipulated by non-coincidence of the principal physical and geometric directions of the orthotropic shell.

The optimum angle between the specified directions is determined.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Амбарцумян С. А. Теория анизотропных оболочек. Физматгиз, М., 1961.
2. Вольмир А. С. Устойчивость упругих систем. Физматгиз, М., 1963.
3. Снеддон И. Преобразования Фурье. ИЛ, М., 1955.
4. Багдасарян Г. Е., Гнуни В. Ц. Динамическая устойчивость анизотропной цилиндрической оболочки. Докл. АН Арм.ССР, т. XI, № 5, 1965.
5. Мяченков В. И. Устойчивость ортотропных оболочек вращения, находящихся под действием осесимметричных нагрузок. Инж. ж., МТТ, № 1, 1968.