

Г. А. МОВСИСЯН

К УСТОЙЧИВОСТИ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ПЛАСТИН ПРИ  
 СМЕШАННЫХ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ

Решению различных задач для прямоугольных пластин со смешанными граничными условиями посвящены работы [1], [2], [3]. В частности, в [3] определяются критические усилия потери устойчивости прямоугольных пластин, равномерно сжатых в одном направлении, при следующих граничных условиях: кромки, к которым приложены усилия, свободно оперты, а на двух других кромках заданы смешанные условия.

Настоящая работа также посвящена определению критических значений усилий потери устойчивости равномерно сжатых в одном направлении прямоугольных пластин, когда имеются следующие граничные условия: кромки, в направлении которых происходит сжатие, оперты, а на двух других кромках заданы смешанные условия.

Взяв формы выпучивания пластин в виде рядов Фурье и удовлетворив граничным условиям, для постоянных интегрирования получим парные ряды—уравнения, которые приводятся к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений. Критические значения усилий определим путем приравнивания нулю определителя этой системы. Доказывается сходимость процесса итераций, что дает основание рассматривать укороченную систему уравнений.

1. Сохранив обозначения [4], дифференциальное уравнение устойчивости пластины берем в виде

$$D \nabla^2 \nabla^2 w + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \tag{1.1}$$

Согласно определению граничные условия будут (фиг. 1)

$$w = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad \text{при } y = \pm b \tag{1.2}$$

$$\left. \begin{aligned} w = \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad \text{при } -c \leq y \leq c \\ w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad \text{при } \begin{matrix} -b \leq y < -c \\ c < y \leq b \end{matrix} \end{aligned} \right\} \quad \text{при } x = \pm a \tag{1.3}$$

Решение (1.1) разыскиваем в виде

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} f_m(x) \sin \frac{m\pi}{2b} (y+b) \quad (1.4)$$

удовлетворяющем условиям (1.2). Для наглядности представим  $w$  в виде

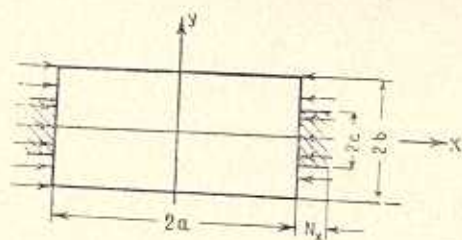
$$w = w_1 + w_2 \quad (1.5)$$

где

$$w_1 = \sum_{m=1}^{\infty} f_m(x) \sin \frac{m\pi}{b} y \quad (1.6)$$

$$w_2 = \sum_{m=0}^{\infty} f_m(x) \cos \frac{(2m+1)\pi}{2b} y \quad (1.7)$$

Отметим, что (1.6) представляет антисимметричный случай потери устойчивости по отношению оси  $x$ , а (1.7)—симметричный. Каждый из этих возможных случаев будем рассматривать в отдельности.



Фиг. 1

2. Антисимметричный случай. Подставив (1.6) в уравнение (1.1), для  $f_m(x)$  получим следующее дифференциальное уравнение:

$$f_m^{IV}(x) - \left[ 2 \left( \frac{m\pi}{b} \right)^2 - \frac{N_x}{D} \right] f_m''(x) + \left( \frac{m\pi}{b} \right)^4 f_m(x) = 0 \quad (2.1)$$

откуда получим

$$f_m(x) = C_m^{(1)} \operatorname{ch} k_1 x + C_m^{(2)} \cos k_2 x + C_m^{(3)} \operatorname{sh} k_1 x + C_m^{(4)} \sin k_2 x \quad (2.2)$$

где

$$k_1 = \sqrt{\sqrt{\left( \frac{N_x}{2D} \right)^2 - \frac{N_x}{D} \left( \frac{m\pi}{b} \right)^2} + \left( \frac{m\pi}{b} \right)^2} - \frac{N_x}{2D} \quad (2.3)$$

$$k_2 = \sqrt{\sqrt{\left( \frac{N_x}{2D} \right)^2 - \frac{N_x}{D} \left( \frac{m\pi}{b} \right)^2} - \left( \frac{m\pi}{b} \right)^2} + \frac{N_x}{2D}$$

Удовлетворив условиям (1.3), для коэффициентов  $C_m^{(2)}$  и  $C_m^{(4)}$  получим следующие парные ряды:

$$\sum_{m=1}^{\infty} C_m^{(2)} (k_1 \cos k_2 a \operatorname{th} k_1 a + k_2 \sin k_2 a) \sin \frac{m\pi}{b} y = 0 \quad (0 \leq y \leq c) \quad (2.4)$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} C_m^{(2)} (k_1^2 + k_2^2) \cos k_2 a \sin \frac{m\pi}{b} y = 0 \quad (c < y \leq b)$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} C_m^{(4)} (k_2 \cos k_2 a - k_1 \sin k_2 a \operatorname{cth} k_1 a) \sin \frac{m\pi}{b} y = 0 \quad (0 \leq y \leq c)$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} C_m^{(4)} (k_1^2 + k_2^2) \sin k_2 a \sin \frac{m\pi}{b} y = 0 \quad (c < y \leq b)$$
(2.5)

а коэффициенты  $C_m^{(1)}$  и  $C_m^{(3)}$  определяются следующим образом:

$$C_m^{(1)} = -C_m^{(2)} \frac{\cos k_2 a}{\operatorname{ch} k_1 a}; \quad C_m^{(3)} = -C_m^{(4)} \frac{\sin k_2 a}{\operatorname{sh} k_1 a}$$
(2.6)

Учитывая, что наименьшее значение  $N_x$  получается в случае симметрии по отношению оси  $y$  [3], в дальнейшем будем исследовать систему (2.4). Отметим, что совершенно аналогичным образом можно исследовать и систему (2.5).

Заменяя в системе (2.4)

$$k_1^2 + k_2^2 = 2 \sqrt{\left(\frac{N_x}{2D}\right)^2 - \frac{N_x}{D} \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2}$$
(2.7)

и введя обозначение

$$Y_m = \frac{1}{m} C_m^{(2)} \sqrt{\left(\frac{N_x}{2D}\right)^2 - \frac{N_x}{D} \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2}$$
(2.8)

$$\varphi = \frac{\pi}{b} y, \quad \beta = \frac{\pi}{b} c$$

получим парные ряды

$$\sum_{m=1}^{\infty} m Y_m \frac{k_1 \operatorname{th} k_1 a + k_2 \operatorname{tg} k_2 a}{\sqrt{\left(\frac{N_x}{2D}\right)^2 - \frac{N_x}{D} \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2}} \sin m \varphi = 0 \quad (0 \leq \varphi \leq \beta)$$
(2.9)

$$\sum_{m=1}^{\infty} m Y_m \sin m \varphi = 0 \quad (\beta < \varphi \leq \pi)$$

которые путем некоторых преобразований приведем к виду

$$\sum_{m=1}^{\infty} Y_m (1 - N_m^{(1)}) \sin m \varphi = 0 \quad (0 \leq \varphi \leq \beta)$$
(2.10)

$$\sum_{m=1}^{\infty} m Y_m \sin m \varphi = 0 \quad (\beta < \varphi \leq \pi)$$



где

$$N_m^{(1)} = 1 - \frac{m(k_1 \operatorname{th} k_1 a + k_2 \operatorname{tg} k_2 a)}{\sqrt{\left(\frac{N_x}{2D}\right)^2 - \frac{N_x}{D} \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2}} \frac{\pi}{b} \quad (2.11)$$

Учитывая, что  $\operatorname{tg} ix = i \operatorname{th} x$ , можно показать, что при  $m \rightarrow \infty$   $N_m^{(1)}$  имеет порядок

$$N_m^{(1)} = \frac{\beta}{m^2} + O\left(\frac{1}{m^3}\right) \quad (2.12)$$

где

$$\beta = \frac{1}{8} \frac{N_x}{D} \frac{b^2}{\pi^2} \quad (2.13)$$

Выполнив преобразования, подобные [3], парные ряды-уравнения (2.10) приведем к виду

$$\sum_{m=1}^{\infty} m Y_m (1 - N_m^{(1)}) y_m (\cos \theta) = 0 \quad (0 \leq \theta \leq \beta) \quad (2.14)$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} m Y_m y_m (\cos \theta) = 0 \quad (\beta < \theta \leq \pi)$$

Отсюда для определения коэффициентов  $Y_m$  согласно [5] получим следующую бесконечную систему линейных алгебраических уравнений:

$$Y_n = \sum_{m=1}^{\infty} b_{nm} Y_m \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (2.15)$$

где

$$b_{nm} = \frac{m N_m^{(1)}}{2} \frac{ny_m(\cos \beta) z_n(\cos \beta) - my_n(\cos \beta) z_m(\cos \beta)}{n^2 - m^2}$$

$$b_{nn} = \frac{N_n^{(1)}}{4} \left\{ 2 - 2P_{n-1}(\cos \beta) P_n(\cos \beta) + P_{n-1}^2(\cos \beta) - P_n^2(\cos \beta) - \right.$$

$$\left. - 4 \sum_{k=1}^{n-1} P_k(\cos \beta) [\cos \beta P_k(\cos \beta) - P_{k+1}(\cos \beta)] \right\} \quad (2.16)$$

Заметим, что функции  $y_n(x)$  и  $z_n(x)$  являются линейными комбинациями полиномов Лежандра.

Для существования ненулевых решений, необходимо, чтобы определитель системы уравнений

$$Y_n - \sum_{m=1}^{\infty} b_{nm} Y_m = 0 \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (2.17)$$

равнялся нулю. Критические значения  $N_x$  определим из этого условия. Сходимость процесса итераций можно доказать аналогично доказательству [2], произведенному для такой же системы.

3. *Симметричный случай.* Подставив (1.7) в (1.1), для  $f_m(x)$  получим следующее выражение:

$$f_m(x) = D_m^{(1)} \operatorname{ch} s_1 x + D_m^{(2)} \cos s_2 x + D_m^{(3)} \operatorname{sh} s_1 x + D_m^{(4)} \sin s_2 x \quad (3.1)$$

где

$$s_1 = \sqrt{\sqrt{\left(\frac{N_x}{2D}\right)^2 - \frac{N_x}{D} \left|\frac{(2m+1)\pi}{2b}\right|^2} + \left|\frac{(2m+1)\pi}{2b}\right|^2} - \frac{N_x}{2D} \quad (3.2)$$

$$s_2 = \sqrt{\sqrt{\left(\frac{N_x}{2D}\right)^2 - \frac{N_x}{D} \left|\frac{(2m+1)\pi}{2b}\right|^2} - \left|\frac{(2m+1)\pi}{2b}\right|^2} + \frac{N_x}{2D}$$

Удовлетворяя граничным условиям (1.3), для коэффициентов  $D_m^{(i)}$  ( $i=1, 2, 3, 4$ ) получим системы уравнений, подобные полученным для аналогичного случая [3]. Здесь также, как и в предыдущем случае, будем рассматривать случай симметрии по отношению оси  $y$ .

Обозначив через

$$A_m = \frac{2}{2m+1} D_m^{(2)} \sqrt{\left(\frac{N_x}{2D}\right)^2 - \frac{N_x}{D} \left|\frac{(2m+1)\pi}{2b}\right|^2} \cos s_2 a$$

$$\varphi = \frac{\pi}{b} y, \quad \beta = \frac{\pi}{b} c \quad (3.3)$$

$$N_m^{(2)} = 1 - \frac{\left(m + \frac{1}{2}\right) (s_1 \operatorname{th} s_1 a + s_2 \operatorname{tg} s_2 a)}{\sqrt{\left(\frac{N_x}{2D}\right)^2 - \frac{N_x}{D} \left|\frac{(2m+1)\pi}{2b}\right|^2}} \frac{\pi}{b}$$

систему относительно коэффициентов  $D_m^{(2)}$  приведем к следующему виду:

$$\sum_{m=0}^{\infty} A_m \left(1 - N_m^{(2)}\right) \cos\left(m + \frac{1}{2}\right) \varphi = 0 \quad (0 \leq \varphi \leq \beta) \quad (3.4)$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} \left(m + \frac{1}{2}\right) A_m \cos\left(m + \frac{1}{2}\right) \varphi = 0 \quad (\beta < \varphi \leq \pi)$$

Заметим, что  $N_m^{(2)}$  будет иметь такой же порядок, что и  $N_m^{(1)}$ , то есть

$$N_m^{(2)} = \frac{\beta}{m^2} + O\left(\frac{1}{m^3}\right) \quad (3.5)$$

Парные ряды-уравнения (3.4) совершенно подобны полученным в [3] уравнениям для симметричного случая. Следовательно, аналогичным образом получим следующую бесконечную систему

$$A_n = -\frac{2n+1}{2} \sum_{m=0}^{\infty} a_{nm} A_m \quad (n=0, 1, 2, \dots) \quad (3.6)$$



где

$$a_{nm} = N_m^{(2)} \int_0^{\beta} P_n(\cos \theta) P_m(\cos \theta) d \cos \theta + \\ + (-1)^{n+m} \int_0^{\pi-\beta} P_n(\cos \theta) P_{-1/2}(\cos \theta) d \cos \theta \quad (3.7)$$

Для вычисления данных интегралов от полиномов Лежандра можно применить формулы, приведенные в [3]. Критические значения  $N_x$  определяются из условия существования ненулевых значений коэффициентов  $A_n$ . Учитывая, что  $N_m^{(2)}$  также имеет порядок  $O(1/m^2)$  аналогично [3], можно доказать сходимость процесса итераций.

4. Определим критические значения усилий потери устойчивости прямоугольной пластины, когда имеются следующие граничные условия (фиг. 2):

$$w = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \text{ при } y = 0 \text{ и } y = b \quad (4.1)$$

$$\left. \begin{aligned} w = \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \text{ при } 0 \leq y \leq c \\ w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \text{ при } c < y \leq b \end{aligned} \right\} \text{ при } x = \pm a \quad (4.2)$$

Решение, которое будем искать в виде

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} f_m(x) \sin \frac{m\pi}{b} y \quad (4.3)$$

будет содержать в себе все возможные формы потери устойчивости пластины. Следовательно, ход решения данной задачи полностью будет совпадать с решением первой задачи в случае антисимметрии относительно оси  $x$ . Критические значения  $N_x$  определяются также из определителя системы (2.17).

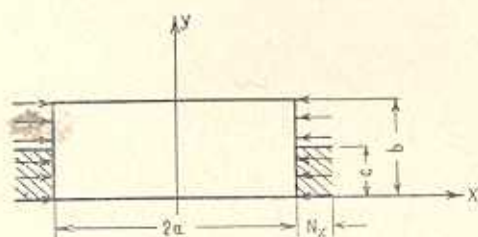
Для пластин, у которых отношение  $h/b = 200$ , при различных отношениях сторон  $a/b$  и  $\beta = \frac{\pi}{b} c$  на ЭВМ „Раздан-3“ были решены определители восьмого и десятого порядков.

В табл. 1 приводятся значения безразмерной величины  $N_x \frac{h^2}{D} 10^6$ , полученные из определителя восьмого порядка, с которыми полностью совпадают значения, полученные из определителя десятого порядка.

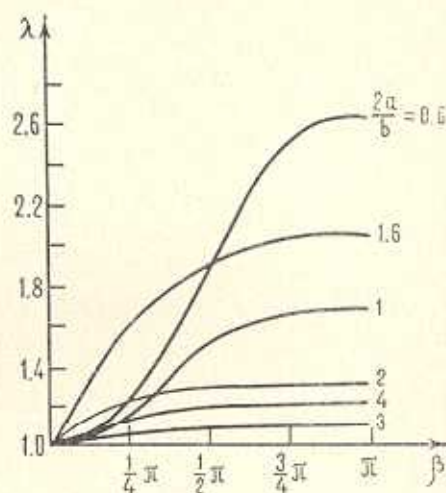
Таблица 1

| $2a/b \backslash \beta$ | 0    | $\frac{1}{4} \pi$ | $\frac{1}{2} \pi$ | $\frac{3}{4} \pi$ | $\pi$ |
|-------------------------|------|-------------------|-------------------|-------------------|-------|
| 0.6                     | 1266 | 1543              | 2359              | 3227              | 3302  |
| 0.8                     | 1036 | 1253              | 1787              | 2126              | 2154  |
| 1                       | 987  | 1156              | 1495              | 1652              | 1664  |
| 1.6                     | 1037 | 1577              | 1979              | 2167              | 2180  |
| 2                       | 987  | 1223              | 1285              | 1300              | 1302  |
| 2.5                     | 1019 | 1078              | 1151              | 1175              | 1177  |
| 3                       | 987  | 1031              | 1075              | 1086              | 1087  |
| 4                       | 987  | 1126              | 1187              | 1201              | 1202  |

Заметим, что все приведенные в таблице значения при  $\beta = 0$  и  $\beta = \pi$  совпадают с [4], кроме случая, когда  $\beta = \pi$ , а  $2a/b = 1.6$ . Для наглядности построим кривые изменения критических усилий в зависимости от отношения сторон пластинки и от участка защемления (фиг. 3). По оси абсцисс отложены  $\beta$ , а по оси ординат — безразмер-



Фиг. 2



Фиг. 3

ные параметры  $\lambda$  — отношение критического усилия  $N_x$  для данного  $\beta$  к  $N_x$ , когда стороны  $x = \pm a$  полностью оперты ( $\beta = 0$ ). Как видно из фиг. 3, для малых значений  $a/b$  значения  $N_x$  увеличиваются вместе с увеличением  $\beta$ , а, начиная со значения  $a/b = 1$ , изменение происходит медленнее и в основном до значения  $\beta = \frac{1}{2} \pi$ , то есть когда защемлена половина кромки. Таким образом, как и отмечено в [4], влияние заделки краев на величину  $N_x$  уменьшается с увеличением отношения  $a/b$ .



Գ. Ա. ՄՈՎՍԻՍԻԱՆ

ԽԱՌԸ ԵԶՐԱՅԻՆ ՊԱՅՄԱՆՆԵՐՈՎ ՈՒՂՂԱՆԿՅՈՒՆ ՍԱՂԻ ԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅԱՆ  
ՇՈՒՐՋԸ

Ա մ փ ա փ ու մ

Աշխատանքում դիտարկվում է ուղղանկյուն սաղի կայունության խնդիրը, երբ նրա երկու կողմերը ազատ հենված են, իսկ մյուս երկու կողմերի վրա, որտեղ կիրառված են ուժերը, տրված են խառը պայմաններ: Սաղի կայունության կորցնելու ձևերը վերցվում են ֆուրիեի շարքերի տեսքով: Ինտեգրման հաստատունների համար եզրային պայմաններից ստացվում են դույզ շարք-հավասարումներ, որոնք բերվում են գծային հանրահաշվական հավասարումների անվերջ սիստեմի: Ճիգերի կրիտիկական արժեքները որոշվում են այդ սիստեմի որոշիչ դրո լինելու պայմանից: Բերվում է թվային օրինակ:

ON STABILITY OF A RECTANGULAR PLATE UNDER  
MIXED BOUNDARY CONDITIONS

G. A. MOVSISIAN

S u m m a r y

In this paper the critical values of stability loss forces for a rectangular plate with mixed boundary conditions are determined. The forces are assumed to be applied to those two opposite sides on which mixed boundary conditions are specified while the other two sides are thought of as freely supported. The forms of buckling are taken in Fourier's series. For the integration constants dual trigonometric series are obtained from the boundary conditions; these series are reduced to the infinite sets of linear algebraic equations. The values of critical forces are defined by equating the determinant of the set to zero. The process of iteration is proved to converge. A numerical example is given.

## Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Минасян Р. С. Об одной смешанной задаче изгиба прямоугольной пластинки. Докл. АН Арм.ССР, т. 22, № 1, 1956.
2. Мовсисян Г. А. К определению частот собственных колебаний прямоугольной пластины при смешанных граничных условиях. Изв. АН Арм.ССР, Механика, т. 24, № 5, 1971.
3. Мовсисян Г. А. К определению критических усилий потери устойчивости прямоугольных пластин при смешанных граничных условиях. Изв. АН Арм.ССР, Механика, т. 24, № 6, 1971.
4. Тимошенко С. П. Устойчивость упругих систем. ГИТТЛ, М.—Л., 1946.
5. Бабляня А. А. Решение некоторых парных уравнений. ПММ, т. 31, в. 4, 1967.