ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXV, № 4, 1972 Механика

И. А. ВЕКОВИЩЕВА

ТЕОРИЯ ИЗГИБА ТОНКИХ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ПЛАСТИН

Рассмотрим теорию деформации и поляризации тонких пьезоэлектрических пластин в случае, когда срединная поверхность не остается плоской. Изучаемые пластинки по существу своему являются анизотропными, причем следует сразу исключить из рассмотрения ортотропные пластинки и пластинки с более высокой степенью симметрии, поскольку в указанных случаях принципиально не может существовать пьезоэлектрический эффект. Здесь будем рассматривать пластинку, структурная единица материала которой в каждой точке имеет одну плоскость симметрии, параллельную срединной плоскости, а также некоторые другие элементы симметрии, которыми обладают кристаллографические классы 7, 12, 14, 19, 22, 24, 26, 30. Номера классов, соответствующие работе [1], перечислены в порядке увеличения числа элементов симметрии дополнительно к одной плоскости симметрии.

Теории анизотропных пластин при отсутствии пьезоэффекта в отечественной литературе посвящены монографии С. Г. Лехницкого [2] и С. А. Амбарцумяна [3], главы из книги В. С. Саркисяна [4], а также обширная журнальная литература.

Так же, как в теории упругости, тонкой назовем пластинку, толщина которой мала по сравнению с другими размерами, а прогибы малы по сравнению с толщиной. Рассмотрим упругое равновесие тонкой однородной пьезоэлектрической пластинки постоянной толщины h. Пусть пластинка закреплена по всему краю или по части его и деформируется изгибающей нагрузкой. Изгибающая нагрузка состоит из нагрузки $q(x_1, x_2)$, распределенной по поверхности и нормальной к срединной плоскости в недеформированном состоянии, а также из нагрузок (заданных или реакций), распределенных по краю в виде изгибающих моментов и сил, нормальных к недеформированной срединной поверхности. Объемными силами пренебрегаем.

Примем срединную плоскость недеформированной пластинки за плоскость $x_1 x_2$. Ось x_3 направим в сторону ненагруженной внешней поверхности. Обозначим через $w(x_1, x_2)$ перемещения в направлении оси x_3 точек, принадлежащих срединной поверхности.

В основу приближенной теории изгиба кладутся следующие гипотезы Кирхгофа:

1) гипотезы прямых нормалей, которые при отсутствии растяжения срединной плоскости имеют вид

$$\xi_{11} = - x_3 \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}, \quad \xi_{22} = - x_3 \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}, \quad \xi_{12} = - 2x_3 \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \tag{1}$$

то есть деформации удлинения и сдвига для произвольного слоя жесткой пластинки, лежащего на расстоянии x_3 от срединной поверхности, изменяются по линейному закону.

2) напряжения σ_{33} малы по сравнению с σ_{11}, σ_{22}, σ_{12}.

Введем в рассмотрение функцию двух координат $V(x_1, x_2)$, характеризующую распределение потенциала электрического поля в произвольном слое пластинки, параллельном срединной поверхности. В дополнение к гипотезам Кирхгофа для случая пьезоэлектрических пластин необходимо принять следующую гипотезу:

3)

$$E_1 = - \frac{2}{h} x_3 \frac{\partial V}{\partial x_1}, \quad E_2 = - \frac{2}{h} x_3 \frac{\partial V}{\partial x_2} \tag{2}$$

согласно которой в условиях тонкой пластинки вектор электрического поля для произвольного слоя пластинки, лежащего на расстоянии x_3 от срединной поверхности, изменяется по линейному закону. Причем в срединной поверхности при $x_3 = 0$ электрическое поле, так же, как и деформации, отсутствует.

Общие уравнения для пьезоэлектрической сплошной среды рассмотрены в работе [5]. В данном случае необходимо использовать следующие соотношения (для записи уравнений выберем Международную систему единиц СИ)

$$\begin{aligned} \xi_{ij} &= s^D_{ijkl} \sigma_{kl} - g_{kij} D_k \\ E_k &= g_{kij} \sigma_{ij} + \eta^\sigma_{kj} D_j \end{aligned} \tag{3}$$

Здесь ξ_{ij}, σ_{kl} — компоненты относительной деформации и механического напряжения; E_i, D_k—векторы напряженности электрического поля и индукции; s^D_{ijkl} — компоненты модулей гибкости, измеренных при постоянной индукции; η^σ_{kj} — коэффициенты диэлектрической восприимчивости, измеренной при постоянном механическом напряжении; g_{kij} — пьезоэлектрические модули. Все подстрочные индексы в соотношениях (3) принимают значения 1, 2, 3. Знаки суммирования по дважды повторяющимся индексам в одночленных выражениях опущены. В дальнейшем для сокращения записи надстрочные индексы D и σ будут опущены.

Форма матрицы коэффициентов для класса 7 по отношению к выбранной нами системе координат имеет вид

$$
\left|\begin{array}{c|c} s_{ij} & -g_{kj} \\ \hline g_{kj} & \eta_{kl} \end{array}\right| = \left|\begin{array}{cccccc|ccc}
\bullet & \bullet & \bullet & \cdot & \cdot & \cdot & \bullet & \cdot & \cdot \\
\bullet & \bullet & \bullet & \cdot & \cdot & \cdot & \bullet & \cdot & \cdot \\
\bullet & \bullet & \bullet & \cdot & \cdot & \cdot & \bullet & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \bullet & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \bullet & \cdot & \cdot & \cdot & \bullet \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \bullet & \cdot & \bullet & \cdot \\
\hline
\bullet & \bullet & \bullet & \cdot & \cdot & \cdot & \bullet & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \bullet & \cdot & \bullet & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \bullet & \cdot & \cdot & \cdot & \bullet
\end{array}\right| \qquad (4)
$$

Здесь индексы принимают значения $i, j = 1, 2, \cdots, 6$; $k, l = 1, 2, 3$. Жирной точкой обозначены коэффициенты, отличные от нуля, а бледной точкой—коэффициенты, равные нулю. Таким образом, для класса 7 имеем отличных от нуля 9 модулей гибкости, 3 диэлектрических восприимчивости и 5 пьезомодулей. Решение задачи для остальных из перечисленных кристаллографических классов будет частным случаем рассматриваемой задачи с учетом дополнительных нулей в матрице коэффициентов. Заметим, что форма матрицы коэффициентов s_{ij} (левый верхний угол выражения (4)) совпадает с матрицей упругих коэффициентов для ортотропных материалов, но данный кристаллографический класс не является ортотропным, так как не имеет трех плоскостей симметрии.

Выберем из системы (3) пять уравнений, левые части которых представляют собой (1) и (2):

$$
\begin{aligned}
\xi_1 &= s_{11}\sigma_1 + s_{12}\sigma_2 - g_{11}D_1 \\
\xi_2 &= s_{12}\sigma_1 + s_{22}\sigma_2 - g_{12}D_1 \\
\xi_6 &= s_{66}\sigma_6 - g_{26}D_2 \\
E_1 &= g_{11}\sigma_1 + g_{12}\sigma_2 + \eta_{11}D_1 \\
E_2 &= g_{26}\sigma_6 + \eta_{22}D_2
\end{aligned} \qquad (5)
$$

Решая систему уравнений (5) относительно σ_1, σ_2, σ_6, D_1, D_2 с учетом (1) и (2), получим

$$
\begin{aligned}
\sigma_1 &= -x_3\left(A_{11}\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + A_{12}\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} - \frac{2}{h}A_{14}\frac{\partial V}{\partial x_1}\right) \\
\sigma_2 &= -x_3\left(A_{12}\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + A_{22}\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} - \frac{2}{h}A_{24}\frac{\partial V}{\partial x_1}\right) \\
\sigma_6 &= -x_3\left(2A_{33}\frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{2}{h}A_{35}\frac{\partial V}{\partial x_2}\right) \\
D_1 &= -x_3\left(A_{14}\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + A_{24}\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} + \frac{2}{h}A_{44}\frac{\partial V}{\partial x_1}\right) \\
D_2 &= -x_3\left(2A_{35}\frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{2}{h}A_{55}\frac{\partial V}{\partial x_2}\right)
\end{aligned} \qquad (6)
$$

Постоянные A_{ij} выражаются через элементы матрицы (4):

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} s_{66} & -g_{26} \\ g_{26} & \eta_{22} \end{vmatrix}, \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} s_{11} & s_{12} & -g_{11} \\ s_{12} & s_{22} & -g_{12} \\ g_{11} & g_{12} & \eta_{11} \end{vmatrix}$$

$$A_{11} = \frac{1}{\Delta_2}\begin{vmatrix} s_{22} & -g_{12} \\ g_{12} & \eta_{11} \end{vmatrix}, \qquad A_{14} = \frac{1}{\Delta_2}\begin{vmatrix} s_{12} & s_{22} \\ g_{11} & g_{12} \end{vmatrix} \tag{7}$$

$$A_{12} = -\frac{1}{\Delta_2}\begin{vmatrix} s_{12} & -g_{12} \\ g_{11} & \eta_{11} \end{vmatrix}, \qquad A_{24} = -\frac{1}{\Delta_2}\begin{vmatrix} s_{11} & s_{12} \\ g_{11} & g_{12} \end{vmatrix}$$

$$A_{22} = \frac{1}{\Delta_2}\begin{vmatrix} s_{11} & -g_{11} \\ g_{11} & \eta_{11} \end{vmatrix}, \qquad A_{44} = \frac{1}{\Delta_2}\begin{vmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{12} & s_{22} \end{vmatrix}$$

$$A_{33} = \frac{\eta_{22}}{\Delta_1}, \qquad A_{35} = -\frac{g_{26}}{\Delta_1}, \qquad A_{55} = \frac{s_{66}}{\Delta_1}$$

Для определения σ_4, σ_5 и D_3 используем уравнения

$$\frac{\partial \sigma_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_6}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_5}{\partial x_3} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_6}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_4}{\partial x_3} = 0 \tag{8}$$

$$\frac{\partial D_1}{\partial x_1} + \frac{\partial D_2}{\partial x_2} + \frac{\partial D_3}{\partial x_3} = 0$$

Так как на внешние поверхности свободный заряд Q не наносится, а также к этим поверхностям приложены лишь нормальные напряжения, то есть при $x_3 = \pm \frac{h}{2}$

$$\sigma_4 = \sigma_5 = 0 \quad D_3 = 0$$

то получаем

$$\sigma_5 = \frac{1}{2}\left(x_3^2 - \frac{h^2}{4}\right)\left[A_{11}\frac{\partial^3 w}{\partial x_1^3} + (A_{12} + 2A_{33})\frac{\partial^3 w}{\partial x_1 \partial x_2^2} - \right.$$
$$\left. - \frac{2}{h}A_{14}\frac{\partial^2 V}{\partial x_1^2} - \frac{2}{h}A_{35}\frac{\partial^2 V}{\partial x_2^2}\right]$$

$$\sigma_4 = \frac{1}{2}\left(x_3^2 - \frac{h^2}{4}\right)\left[(A_{12} + 2A_{33})\frac{\partial^3 w}{\partial x_1^2 \partial x_2} + A_{22}\frac{\partial^3 w}{\partial x_2^3} - \right.$$
$$\left. - \frac{2}{h}(A_{24} + A_{35})\frac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial x_2}\right] \tag{9}$$

$$D_3 = \frac{1}{2}\left(x_3^2 - \frac{h^2}{4}\right)\left[A_{14}\frac{\partial^3 w}{\partial x_1^3} + (A_{24} + 2A_{35})\frac{\partial^3 w}{\partial x_1 \partial x_2^2} + \right.$$
$$\left. + \frac{2}{h}A_{44}\frac{\partial^2 V}{\partial x_1^2} + \frac{2}{h}A_{55}\frac{\partial^2 V}{\partial x_2^2}\right]$$

Составим выражения перерезывающих сил N_1 и N_2, изгибающих и скручивающего моментов M_1, M_2, H_{12}, а также величины заряда τ и электрических моментов P_1, P_2, отнесенных к единице длины сечения срединной плоскости

$$N_1 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_5 \, dx_3, \qquad N_2 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_4 \, dx_3, \qquad M_1 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_1 \, x_3 dx_3$$

$$M_2 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_2 \, x_3 dx_3, \qquad H_{12} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_6 \, x_3 dx_3 \tag{10}$$

$$\tau = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} D_3 dx_3, \qquad P_1 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} D_1 x_3 dx_3, \qquad P_2 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} D_2 x_3 dx_3 \tag{11}$$

и выразим их через функции w и V, подставляя в (10) и (11) выражения (6) и (9)

$$N_1 = -\left[B_{11} \frac{\partial^3 w}{\partial x_1^3} + (B_{12} + 2B_{33}) \frac{\partial^3 w}{\partial x_1 \partial x_2^2} - \right.$$
$$\left. - \frac{2}{h} B_{14} \frac{\partial^2 V}{\partial x_1^2} - \frac{2}{h} B_{35} \frac{\partial^2 V}{\partial x_2^2} \right]$$

$$N_2 = -\left[(B_{12} + 2B_{33}) \frac{\partial^3 w}{\partial x_1^2 \partial x_2} + B_{22} \frac{\partial^3 w}{\partial x_2^3} - \frac{2}{h} (B_{24} + B_{35}) \frac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial x_2} \right]$$

$$M_1 = -\left[B_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + B_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} - \frac{2}{h} B_{14} \frac{\partial V}{\partial x_1} \right]$$

$$M_2 = -\left[B_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + B_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} - \frac{2}{h} B_{24} \frac{\partial V}{\partial x_1} \right]$$

$$H_{12} = -\left[2B_{33} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{2}{h} B_{35} \frac{\partial V}{\partial x_2} \right] \tag{12}$$

$$\tau = -\left[B_{14} \frac{\partial^3 w}{\partial x_1^3} + (B_{24} + 2B_{35}) \frac{\partial^3 w}{\partial x_1 \partial x_2^2} + \right.$$
$$\left. + \frac{2}{h} B_{44} \frac{\partial^2 V}{\partial x_1^2} + \frac{2}{h} B_{55} \frac{\partial^2 V}{\partial x_2^2} \right]$$

$$P_1 = -\left[B_{14} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + B_{24} \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} + \frac{2}{h} B_{44} \frac{\partial V}{\partial x_1} \right]$$

$$P_2 = -\left[2B_{35} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{2}{h} B_{55} \frac{\partial V}{\partial x_2} \right]$$

где введено обозначение для постоянных

$$B_{ij} = A_{ij} \frac{h^3}{12} \tag{13}$$

Выделим в пластинке элемент в виде прямоугольного параллелепипеда с ребрами dx_1, dx_2, h. Статические условия равновесного состояния элемента, а также условие его электрической нейтральности имеют вид

$$\frac{\partial N_1}{\partial x_1} + \frac{\partial N_2}{\partial x_2} + q = 0 \quad \frac{\partial M_1}{\partial x_1} + \frac{\partial H_{12}}{\partial x_2} - N_1 = 0 \tag{14}$$

$$\frac{\partial M_2}{\partial x_2} + \frac{\partial H_{12}}{\partial x_1} - N_2 = 0$$

$$\tau = Q = 0, \quad \frac{\partial P_1}{\partial x_1} + \frac{\partial P_2}{\partial x_2} - \tau = 0 \tag{15}$$

Подставляя в первые из уравнений (14) и (15) соответствующие выражения (12) для N_1, N_2, τ, получим систему двух дифференциальных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами относительно двух неизвестных функций w и V

$$B_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x_1^4} + 2(B_{12} + 2B_{33}) \frac{\partial^4 w}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + B_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial x_2^4} -$$

$$- \frac{2}{h} \left[B_{14} \frac{\partial^3 V}{\partial x_1^3} + (B_{24} + 2B_{35}) \frac{\partial^3 V}{\partial x_1 \partial x_2^2} \right] = q \tag{16}$$

$$B_{14} \frac{\partial^3 w}{\partial x_1^3} + (B_{24} + 2B_{35}) \frac{\partial^3 w}{\partial x_1 \partial x_2^2} +$$

$$+ \frac{2}{h} \left(B_{44} \frac{\partial^2 V}{\partial x_1^2} + B_{55} \frac{\partial^2 V}{\partial x_2^2} \right) = 0$$

Вводя обозначения операторов, систему (16) можно записать сокращенно

$$L_1 w - \frac{2}{h} L_3 V = q, \quad L_3 w + \frac{2}{h} L_2 V = 0 \tag{17}$$

Таким образом, задача сводится к решению той же самой математической проблемы, что и в случае плоской задачи для бесконечно длинного пьезоэлектрического стержня, изложенной в работе [6]. Отличие состоит в том, что первое дифференциальное уравнение системы (17) неоднородно. В работе [6] найдено общее решение однородной системы вида (17). Отметим, что при отсутствии пьезоэффекта система (17) сводится к уравнению прогибов ортотропной пластинки, указанному в работах [2 и 3].

Приведем некоторые возможные граничные условия, которым должны удовлетворять искомые функции w и V:

1) пластинка защемлена по всему контуру и на линии защемления функция V равна нулю. Тогда на всем контуре

$$w = 0, \quad \frac{dw}{dn} = 0, \quad V = 0$$

2) контур пластинки шарнирно оперт и от контура отсчитываются значения функции V

$$w = 0, \quad M_n = 0, \quad V = 0$$

Здесь M_n — изгибающий момент на площадке с внешней нормалью n.

Возможны и другие граничные условия, а также любые их сочетания на различных участках контура.

Ленинградский ордена Ленина
политехнический институт
им. М. И. Калинина

Поступила 21 VI 1971

Ի. Ա. ՎԵԿՈՎԻՇՉԵՎԱ

ՊԻԵԶՈԷԼԵԿՏՐԱԿԱՆ ԲԱՐԱԿ ՍԱԼԵՐԻ ԾՌՄԱՆ ՏԵՍՈՒԹՅՈՒՆ

Ամփոփում

Անիզոտրոպ մարմնի առաձգականության տեսության ընդհանուր հավասարումների, էլեկտրաստատիկայի հավասարումների և պիեզոէլեկտրական երևույթի տեսության հավասարումների հիման վրա դիտարկվում է միջին հարթության ուղղահայաց բեռով բարակ պիեզոէլեկտրական սալի ծռման մասին խնդիրը։ Մոտավոր տեսության հիմքում դրված է Կիրխհոֆի հիպոթեզը և առաջարկվում է լրացուցիչ հիպոթեզ քննարկվող դեպքի համար։ Ստացված է երկու դիֆերենցիալ հավասարումների սիստեմ, որ տեսքով նման է հարթ խնդրի դեպքի սիստեմին։ Փնտրվող երկու ֆունկցիաների համար նշված են մի քանի եզրային պայմաններ։

THE THEORY OF BENDING OF PIEZOELECTRIC THIN PLATES

I. A. VEKOVISCHEVA

Summary

The problem on thin piesoelectric plate bending by a load placed normally to the medial plane is considered in terms of the general equations of elasticity for an anisotropic body, of electrostatics and piezoelectricity. The approximation theory is based on Kirchhoff's hypotheses while a supplementary hypothesis is suggested for the case of piezoelectric material. A system of two differential equations identical to those for the case of the plane problem is obtained. Certain boundary conditions for the two functions sought are presented.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Желудев И. С.* Физика кристаллических диэлектриков. Изд-во „Наука", 1968.
2. *Лехницкий С. Г.* Анизотропные пластинки. Гостехиздат, М., 1957.
3. *Амбарцумян С. А.* Теория анизотропных пластин. Изд-во „Наука", 1967.
4. *Саркисян В. С.* Некоторые задачи теории упругости анизотропного тела. Изд-во Ереванского ун-та, 1970.
5. *Вековищева И. А.* Общие уравнения теории упругости анизотропного тела с учетом электрического эффекта. Изв. ВУЗов, физика, № 10, 1970.
6. *Вековищева И. А.* Плоская задача теории упругости анизотропного тела с учетом электрического эффекта. ПМТФ, № 2, 1970.