ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXV, № 4, 1972 Механика

С. О. САРКИСЯН

О МЕТОДЕ УПРУГИХ РЕШЕНИЙ В ТЕОРИИ ПЛАСТИНОК

Как известно [1], основное уравнение теории малых упруго-пластических деформаций тонкой пластинки представляет собой квази-линейное уравнение эллиптического типа четвертого порядка

$$\nabla^4 w = \frac{q}{D} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\Omega\left(\varkappa_1 + \frac{1}{2}\varkappa_2\right)\right] + \frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}(\Omega\varkappa_{12}) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left[\Omega\left(\varkappa_2 + \frac{1}{2}\varkappa_1\right)\right] \tag{1}$$

где q—поперечная нагрузка на пластинку, D—обычная цилиндрическая жесткость пластинки

$$\Omega = 1 - \frac{J}{D}, \qquad J = \frac{4}{3}\int_{-h/2}^{h/2}\frac{\sigma_i}{e_i}z^2dz \tag{2}$$

σ_i — интенсивность напряжений, e_i—интенсивность деформаций, h—толщина пластинки, $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, $\varkappa_{12}$—изменение кривизн срединной плоскости пластинки

$$\varkappa_1 = w_{xx}, \quad \varkappa_2 = w_{yy}, \quad \varkappa_{12} = w_{xy} \tag{3}$$

w—поперечный прогиб пластинки.

Между σ_i и e_i существует зависимость, которая определяет пластические свойства материала. Этот закон в общем виде можно записать следующим образом [1]:

$$\sigma_i = 3G[1-\omega(e_i)]e_i \tag{4}$$

где G—модуль сдвига материала, ω—функция e_i, определяющая пластические свойства материала и для реальных материалов с упрочнением удовлетворяющая условиям [1, 2]

$$0 \leqslant \omega(e_i) \leqslant \omega(e_i) + \frac{d\omega}{de_i}e_i \leqslant \lambda < 1 \tag{5}$$

Как легко видеть, эти условия равносильны следующим условиям:

$$0 \leqslant \omega(e_i) \leqslant \omega(e_i) + \frac{\omega(e_i) - \omega(e_i')}{e_i - e_i'}e_i' = \frac{d[\omega(e_i^0)e_i^0]}{de_i^0} \leqslant \lambda < 1 \tag{6}$$

Интенсивность деформаций для пластинки имеет следующее выражение:

$$e_i = \frac{2|z|}{3} \sqrt{\varkappa_1^2 + \varkappa_1\varkappa_2 + \varkappa_2^2 + \varkappa_{12}^2} \tag{7}$$

Пусть S—ограниченная область, занятая пластинкой в плане, Γ—граница S. Будем рассматривать следующие граничные задачи.

I. Найти решение (1), если

$$w|_\Gamma = 0, \quad \left.\frac{\partial w}{\partial n}\right|_\Gamma = 0 \tag{8}$$

II. Найти решение (1), если

$$\left(N_1 + \frac{\partial H}{\partial y}\right)_\Gamma = N_1^*, \quad M_1|_\Gamma = M_1^* \tag{9}$$

где n—нормаль к Γ, N_1—перерезывающая сила, M_1—изгибающий момент.

Для решения задач (I), (II) будут использованы следующие специальные функциональные пространства.

1) Пусть C_1—множество функций $w(x, y)$, удовлетворяющих условиям (8) и имеющих интегрируемые с квадратом вторые производные в S. Зададим на C_1 скалярное произведение

$$(w_1, w_2)_{H_{1S}} = D\int_S \left(w_{1xx}w_{2xx} + \frac{1}{2} w_{1xx}w_{2yy} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2} w_{1yy}w_{2xx} + w_{1yy}w_{2yy} + w_{1xy}w_{2xy}\right) dS \tag{10}$$

Замыкание C_1 в норме (10) назовем H_{1S}. Из (10) вытекает

$$\|w\|^2_{H_{1S}} = D\int_S (w_{xx}^2 + w_{xx}w_{yy} + w_{yy}^2 + w_{xy}^2) dS \tag{11}$$

Для дальнейшего удобно для произвольных дважды дифференцируемых функций $w(x, y)$ ввести в точке скалярное произведение и норму по формулам

$$(w_1, w_2) = w_{1xx}w_{2xx} + \frac{1}{2} w_{1xx}w_{2yy} +$$

$$+ \frac{1}{2} w_{1yy}w_{2xx} + w_{1yy}w_{2yy} + w_{1xy}w_{2xy} \tag{12}$$

$$\|w\| = \sqrt{w_{xx}^2 + w_{xx}w_{yy} + w_{yy}^2 + w_{xy}^2} \tag{13}$$

Легко проверить, что при этом выполняются аксиомы скалярного произведения, за исключением одной: из $\|w\| = 0$ не следует $w = 0$, но мы этим свойством в дальнейшем не пользуемся.

Используя (12) и (13), можем записать выражения (10) и (11) соответственно следующим образом:

$$(w_1, w_2)_{H_{1S}} = D \int\limits_S (w_1, w_2)\, dS \tag{14}$$

$$\|w\|^2_{H_{1S}} = D \int\limits_S \|w\|^2\, dS \tag{15}$$

2) Аналогично, пусть C_2—множество функций $w(x, y)$, имеющих в S интегрируемые с квадратом вторые производные, удовлетворяющие условиям

$$\int\limits_S w\,dS = 0, \qquad \int\limits_S \bar{r} \times \bar{w}\,dS = 0 \tag{16}$$

На Γ функции $w(x, y)$ не подчинены никаким условиям. Скалярное произведение на C_2 зададим по-прежнему выражением (14). Замыкая C_2 во введенной норме, получаем гильбертово пространство H_{2S}.

Определение 1. Обобщенным решением задачи (1) назовем функцию $w(x, y) \in H_{1S}$, удовлетворяющую интегральному равенству

$$(w, \varphi)_{H_{1S}} = 4G \int\limits_S \int\limits_{-h/2}^{h/2} \omega(w, \varphi)\, z^2 dS dz + \int\limits_S q\varphi\, dS \tag{17}$$

для любой функции $\varphi \in H_{1S}$.

Определение 2. Решением задачи (II) назовем функцию $w(x, y) \in H_{2S}$, удовлетворяющую интегральному равенству

$$(w, \varphi)_{H_{2S}} = 4G \int\limits_S \int\limits_{-h/2}^{h/2} \omega(w, \varphi)\, z^2 dS dz + \int\limits_S q\varphi\, dS +$$

$$+ \int\limits_\Gamma \left(N_1^* \varphi + M_1^* \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) d\Gamma \tag{18}$$

для любой функции $\varphi \in H_{2S}$.

Заметим, что если функция—обобщенное решение задачи (I) или (II) в смысле принятого определения, то выполнены все условия равновесия пластинки, если их сформулировать с помощью принципа возможных перемещений Лагранжа. Кроме того, обобщенное решение всегда будет классическим, если оно четыре раза непрерывно дифференцируемо. Заметим также, что в задаче (II) необходимые условия равновесия пластинки или необходимые условия разрешимости задачи (II) состоят в том [3], что система внешних сил статически эквивалентна нулю. В последующем в случае задачи (II) мы предполагаем, что выполняются необходимые условия равновесия пластинки. Из результатов работ* [4, 5] известно, что если область S звездна относительно каждой точки некоторого своего круга и $w \in H_{1S}$, то $w \in W_2^{(2)}(S)$. Если использовать теоремы вложения [6], получим, что w_x, $w_y \in L_q(S)$, где $q > 1$ и произвольна, $w \in C^{(0)}(S)$. Кроме того, имеют место неравенства

$$\|w\|_{C^{(0)}(S)} \leqslant m\|w\|_{H_{1S}}, \quad \|w_x\|_{L_q(S)} \leqslant m\|w\|_{H_{1S}}, \quad \|w_y\|_{L_q(S)} \leqslant m\|w\|_{H_{1S}} \tag{19}$$

$$\|w_{xx}\|_{L_2(S)} \leqslant m\|w\|_{H_{1S}}, \quad \|w_{xy}\|_{L_2(S)} \leqslant m\|w\|_{H_{1S}}, \quad \|w_{yy}\|_{L_2(S)} \leqslant m\|w\|_{H_{1S}} \tag{20}$$

Далее, если Γ^* — некоторый кусочно-гладкий контур класса $\Lambda_1(m, 0)$, целиком лежащий в S, то при любом $q > 1$ имеют место соотношения

$$\left(\int_{\Gamma^*}|w_x|^q\, d\Gamma^*\right)^{\frac{1}{q}} \leqslant m(q)\|w\|_{H_{1S}}, \quad \left(\int_{\Gamma^*}|w_y|^q\, d\Gamma^*\right)^{\frac{1}{q}} \leqslant m(q)\|w\|_{H_{1S}} \tag{21}$$

Пусть теперь $w \in H_{2s}$ и область S звездна относительно каждой точки некоторого своего круга, тогда легко убедиться, что имеет место интегральное представление С. Л. Соболева [6], то есть $w \in W_2^{(2)}(S)$, и, следовательно, имеют место все вышеупомянутые теоремы вложения и неравенства (19, 20, 21).

Введем операторы A и B соотношениями

$$(Aw, \varphi)_{H_{1s}} = 4G\int_S\int_{-h/2}^{h/2}\omega(w, \varphi)\, z^2 dS dz + \int_S q\varphi\, dS \tag{22}$$

для любого $\varphi \in H_{1S}$ и

$$(Bw, \varphi)_{H_{2S}} = 4G\int_S\int_{-h/2}^{h/2}\omega(w, \varphi)\, z^2 dS dz + \int_S q\varphi\, dS + $$
$$+ \int_\Gamma\left(N_1^*\varphi + M_1^*\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)d\Gamma \tag{23}$$

для любого $\varphi \in H_{2S}$. Легко показать, что операторы A и B действуют соответственно в пространствах H_{1S} и H_{2S}.

В самом деле, при фиксированном $w \in H_{2S}$, если $q \in L_p(S)$ при $p \geqslant 1$, $N_1^* \in L_p(\Gamma)$ при $p \geqslant 1$, $M_1^* \in L_q(\Gamma)$ при $q > 1$, имеем

$$\left|4G\int_S\int_{-h/2}^{h/2}\omega(w, \varphi)\, z^2 dS dz + \int_S q\varphi\, dS + \int_\Gamma\left(N_1^*\varphi + M_1^*\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)d\Gamma\right| \leqslant$$

$$\leqslant D\lambda\int_S|(w, \varphi)|\, dS + \left|\int_S q\varphi\, dS\right| + \left|\int_\Gamma\left(N_1^*\varphi + M_1^*\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)d\Gamma\right| \leqslant$$

* См. также докторскую диссертацию И. И. Воровича.

$$\leqslant \left\{ D\lambda \left[m_1 \left(\int\limits_S w_{xx}^2 \, dS \right)^{\frac{1}{2}} + m_2 \left(\int\limits_S w_{yy}^2 \, dS \right)^{\frac{1}{2}} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + m_3 \left(\int\limits_S w_{xy}^2 \, dS \right)^{\frac{1}{2}} \right] + m_4 \right\} \|\varphi\|_{H_{2S}}$$

При этом мы использовали условия (5), неравенства Гельдера и неравенства типа (19, 20, 21).

Итак, получили, что функционал в левой части (18) линеен относительно φ в пространстве H_{2S}; используя теорему Рисса, получим (23), где оператор B будет действовать в пространстве H_{2S}. Точно таким же образом можно обосновать (22).

Очевидно, отыскание обобщенного решения краевой задачи (I) эквивалентно решению операторного уравнения

$$w = A(w) \tag{24}$$

а отыскание обобщенного решения краевой задачи (II) эквивалентно решению операторного уравнения

$$w = B(w) \tag{25}$$

Теорема 1. Пусть выполняются условия:

1) $q \in L_p(S)$ при $p \geqslant 1$;

2) $\omega(e_i)$ удовлетворяет условиям (5).

Тогда оператор $A(w)$ есть оператор сжатия во всем пространстве H_{1S}, причем имеет место соотношение

$$\|A(w_1) - A(w_2)\|_{H_{1S}} \leqslant \lambda \|w_1 - w_2\|_{H_{1S}} \quad \text{для любых } w_1, w_2 \in H_{1S}$$

откуда вытекает однозначная разрешимость задачи (I).

Теорема 2. Пусть выполнены все условия теоремы 1; кроме того, на Γ $N_1^* \in L_p(\Gamma)$ при $p > 1$, $M_1^* \in L_q(\Gamma)$ при $q > 1$, $\Gamma \in \Lambda_1(m, 0)$*.

Тогда оператор $B(w)$ есть оператор сжатия во всем пространстве H_{2S}, причем имеет место соотношение

$$\|B(w_1) - B(w_2)\|_{H_{2S}} \leqslant \lambda \|w_1 - w_2\|_{H_{2S}}$$

откуда вытекает однозначная разрешимость задачи (II).

Эти две теоремы доказываются совершенно аналогичным образом, поэтому приведем доказательство только первой теоремы.

Из (22) получим

$$\|A(w_1) - A(w_2)\|_{H_{1S}}^2 = 4G \int\limits_S \int\limits_{-h/2}^{h/2} [\omega(e_i^{(1)})(w_1, Aw_1 - Aw_2) -$$

$$- \omega(e_i^{(2)})(w_2, Aw_1 - Aw_2)] z^2 dS dz$$

---

* Предполагается, что система внешних сил статически эквивалентна нулю.

Обозначая $A(w_1)-A(w_2)=\psi$, используя неравенства Буняковского, неравенства треугольника и (12), (13), (6), получим

$$\|\psi\|^2_{H_{1S}}=4G\int\limits_S\int\limits_{-h/2}^{h/2}\Big\{\omega\,(e_i^{(1)})\,(w_1-w_2,\ \psi)+$$

$$+\frac{\omega\,(e_i^{(1)})-\omega\,(e_i^{(2)})}{e_i^{(1)}-e_i^{(2)}}\,e_i^{(2)}\,\frac{e_i^{(1)}-e_i^{(2)}}{e_i^{(2)}}\,(w_2,\ \psi)\Big\}\times$$

$$\times z^2dSdz\leqslant 4G\int\limits_S\int\limits_{-h/2}^{h/2}\Big\{\omega\,(e_i^{(1)})\,|(w_1-w_2,\ \psi)|+$$

$$+\frac{\omega\,(e_i^{(1)})-\omega\,(e_i^{(2)})}{e_i^{(1)}-e_i^{(2)}}\,e_i^{(2)}\,\frac{|\,\|w_1\|-\|w_2\|\,|}{\|w_2\|}\,|(w_2,\ \psi)|\Big\}\,z^2dSdz\leqslant$$

$$\leqslant 4G\int\limits_S\int\limits_{-h/2}^{h/2}\Big\{\omega\,(e_i^{(1)})\,\|w_1-w_2\|\,\|\psi\|+$$

$$+\frac{\omega\,(e_i^{(1)})-\omega\,(e_i^{(2)})}{e_i^{(1)}-e_i^{(2)}}\,e_i^{(2)}\,\frac{|\,\|w_1\|-\|w_2\|\,|}{\|w_2\|}\,\|w_2\|\,\|\psi\|\Big\}\,z^2\,dSdz\leqslant$$

$$\leqslant 4G\int\limits_S\int\limits_{-h/2}^{h/2}\Big|\,\omega(e_i^{(1)})+\frac{\omega\,(e_i^{(1)})-\omega\,(e_i^{(2)})}{e_i^{(1)}-e_i^{(2)}}\,e_i^{(2)}\Big|\,\|w_1-w_2\|\,\|\psi\|\,z^2dSdz\leqslant$$

$$\leqslant D\lambda\int\limits_S\|w_1-w_2\|\,\|\psi\|\,dS\leqslant D\lambda\left(\int\limits_S\|w_1-w_2\|^2\,dS\right)^{\frac{1}{2}}\times$$

$$\times\left(\int\limits_S\|\psi\|^2\,dS\right)^{\frac{1}{2}}=\lambda\,\|w_1-w_2\|_{H_{1S}}\,\|\psi\|_{H_{1S}}$$

Итак, получим

$\|A(w_1)-A(w_2)\|_{H_{1S}}\leqslant\lambda\,\|w_1-w_2\|_{H_{1S}}$, где $w_1,\ w_2\in H_{1S}$ — любые.

Из теорем 1 и 2 вытекает, что метод упругих решений для рассматриваемых задач теории пластичности будет сходиться в соответствующих пространствах со скоростью геометрической прогрессии со знаменателем λ при любом выборе начального приближения.

Пользуясь случаем, автор выражает глубокую благодарность И. И. Воровичу за ценные советы при выполнении настоящей работы.

Ереванский государственный
университет

Поступила 28 I 1972

Ս. Հ. ՍԱՐԳՍՅԱՆ

ՍԱԼԵՐԻ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՄԵՋ ԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ԼՈՒԾՈՒՄՆԵՐԻ ՄԵԹՈԴԻ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Դիտարկված են սալերի առաձգա-պլաստիկական տեսության երկու հիմնական եզրային խնդիրները։

Սահմանելով նշված խնդիրների ընդհանրացված լուծումները, եզրային խնդիրները բերվում են օպերատորային հավասարումների։ Այնուհետև ապացուցվում է, որ այդ օպերատորները համապատասխան էներգետիկ տարածություններում սեղմվող են։

ON THE METHOD OF ELASTIC SOLUTION IN THE THEORY OF PLATES

S. O. SARKISSIAN

Summary

Two principal boundary problems in the elastic-plastic theory of plates are considered.

The boundary problems are reduced to the operator equations and the latter are shown to be operators of compression in the corresponding energetic spaces.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ильюшин А. А.* Пластичность. Гостехиздат, М., 1948.
2. *Ворович И. И., Красовский Ю. П.* О методе упругих решений. Докл. АН СССР, т. 126, № 4, 1959.
3. *Михлин С. Г.* Проблема минимума квадратичного функционала. ГИТТЛ, М.—Л., 1952.
4. *Ворович И. И.* О существовании решений в нелинейной теории оболочек. Изв. АН СССР, сер. мат., т. 19, № 4, 1956.
5. *Ворович И. И.* О некоторых прямых методах в нелинейной теории пологих оболочек. ПММ, т. 20, вып. 4, 1956.
6. *Соболев С. Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Изд. Ленингр. ун-та, 1950.