ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXV, № 4, 1972 Механика

Р. Е. МКРТЧЯН

БОЛЬШИЕ УПРУГИЕ ДЕФОРМАЦИИ ИЗГИБА И УДЛИНЕНИЯ ЧАСТИ ТРУБЫ ИЗ МАТЕРИАЛА, РАЗНОСОПРОТИВЛЯЮЩЕГОСЯ ДЕФОРМАЦИЯМ РАСТЯЖЕНИЯ И СЖАТИЯ

Рассматривается задача симметричного изгиба и простого растяжения части круглой цилиндрической трубы из сжимаемого упругого материала, разносопротивляющегося деформациям растяжения и сжатия, при больших деформациях. Отдельно исследуется случай, когда часть трубы выпрямляется до прямоугольного параллелепипеда.

В качестве примера рассматривается задача выпрямления полной трубы до прямоугольного параллелепипеда, когда его деформации находятся в пределах справедливости соотношений теории упругости второго порядка.

Работа основывается на общей нелинейной теории упругости [1] и на соотношениях, выведенных в [2] для материала, разносопротивляющегося деформациям растяжения и сжатия. Эти соотношения выражают упругие свойства материала полнее, чем соответствующие соотношения, полученные из единой функции энергии деформаций для всех деформированных состояний.

Чистый изгиб прямоугольной пластинки и круглого стержня, изготовленных из разномодульного материала, в случае малых деформаций рассмотрен в работах [3, 4].

Принимается, что если материал деформированного тела растягивается (сжимается) по всем направлениям, то его упругие свойства по всем направлениям одинаковы и отличаются от упругих свойств того же тела при сжатии (растяжении) его со всех сторон. Тогда функция энергии деформации материала W зависит только от инвариантов деформации $W = W^{+}(I_1, I_2, I_3)$ и $W = W^{-}(I_1, I_2, I_3)$ при растяжении и сжатии материала со всех сторон соответственно.

Если в какой-то точке деформированного тела материал растягивается (сжимается) по главному направлению деформаций $\overline{y}_s$ $(s=1, 2, 3)$ и сжимается (растягивается) по всем перпендикулярным к нему направлениям, то W имеет вид [2]

$$W = W^{+}_{(s)}(I_1, I_2, I_3, \gamma_{(ss)}) \tag{1}$$

$$W = W^{-}_{(s)}(I_1, I_2, I_3, \gamma_{(ss)})$$

где

$$\gamma_{(ss)} = \frac{\overline{\gamma}_{ss}}{\overline{g}_{ss}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\overline{G}_{ss}}{\overline{g}_{ss}} - 1\right) \tag{2}$$

(по индексу s не суммировать)

$\overline{G}_{ss}$ и $\overline{g}_{ss}$ — компоненты ковариантных метрических тензоров деформированного и недеформированного состояний относительно ортогональной системы координат $\overline{\theta}_s$, которая в каждой точке деформированного тела совпадает с главными направлениями деформаций $\overline{y}_s$.

Функциям W^+, W^-, $W^{'}_{(s)}$ и $W^{''}_{(s)}$ соответствуют контрвариантные компоненты напряжений [2]

$$\begin{gathered}\tau^{ij}_{+} = \Phi^+ g^{ij} + \Psi^+ B^{ij} + p^+ G^{ij} \\ \tau'^{ij}_{(s)} = \Phi'_{(s)} g^{ij} + \Psi'_{(s)} B^{ij} + p'_{(s)} G^{ij} + \Theta'_{(s)} M^{ij}_{(ss)}\end{gathered} \tag{3}$$

где

$$\begin{gathered}\Phi'_{(s)} = \frac{2}{\sqrt{I_3}} \frac{\partial W'_{(s)}}{\partial I_1}, \quad \Psi'_{(s)} = \frac{2}{\sqrt{I_3}} \frac{\partial W'_{(s)}}{\partial I_2}, \quad p'_{(s)} = 2\sqrt{I_3} \frac{\partial W'_{(s)}}{\partial I_3} \\ \Theta'_{(s)} = \frac{1}{\sqrt{I_3}} \frac{\partial W'_{(s)}}{\partial \gamma_{(ss)}}, \quad M^{ij}_{(ss)} = \frac{\partial \theta^i}{\partial \overline{\theta}^s} \frac{\partial \theta^j}{\partial \overline{\theta}^s} \Big/ \overline{g}_{ss} \\ B^{ij} = I_1 g^{ij} - g^{ir} g^{jk} G_{rk}\end{gathered} \tag{4}$$

G_{ij}, G^{ij}, g_{ij}, g^{ij} — ковариантные и контрвариантные компоненты метрических тензоров деформированного и недеформированного состояний соответственно относительно подвижной системы координат θ^i $(i = 1, 2, 3)$.

τ^{ij}_{-} и $\tau''^{ij}_{(s)}$ определяются аналогичными выражениями.

Когда деформации тела находятся в пределах справедливости соотношений теории упругости второго порядка, функция энергии деформации определяется выражениями [2]

$$\begin{gathered}W^+ = A_1^+ J_2 + A_2^+ J_1^2 + A_3^+ J_1 J_2 + A_4^+ J_1^3 + A_5^+ J_3 \\ W^- = A_1^- J_2 + A_2^- J_1^2 + A_3^- J_1 J_2 + A_4^- J_1^3 + A_5^- J_3 \\ W'_{(s)} = W^- + A_6 \gamma^2_{(ss)} + A_7 \gamma^3_{(ss)} + A_8 J_1 \gamma^2_{(ss)} + A_9 J_2 \gamma_{(ss)} \\ W''_{(s)} = W^+ - A_6 \gamma^2_{(ss)} - A_7 \gamma^3_{(ss)} - A_8 J_1 \gamma^2_{(ss)} - A_9 J_2 \gamma_{(ss)}\end{gathered} \tag{5}$$

где A_1^+, $A_2^+, \cdots$, A_5^- — упругие постоянные

$$\begin{gathered}A_6 = 4(A_2^+ - A_2^-) \\ A_7 = 8(A_4^+ - A_4^-) + 4(A_3^+ - A_3^-) + 4(A_5^+ - A_5^-) \\ A_8 = 2(A_3^- - A_3^+) + 2(A_5^- - A_5^+) \\ A_9 = 6(A_4^+ - A_4^-) + 3(A_3^+ - A_3^-) + A_3^+ - A_3^-\end{gathered} \tag{6}$$

причем

$$A_1^+ + 2A_2^+ = A_1^- + 2A_2^- \tag{7}$$

$$J_1 = I_1 - 3, \quad J_2 = I_2 - 2I_1 + 3, \quad J_3 = I_3 - I_2 + I_1 - 1 \tag{8}$$

В рамках линейной теории упругости

$$W^{+} = -\frac{1}{2}\mu^{+}J_2 + \frac{1}{8}(\lambda + 2\mu^{+}), \quad W^{-} = -\frac{1}{2}\mu^{-}J_2 + \frac{1}{8}(\lambda + 2\mu^{-})$$

$$\overset{*}{W}_{(s)} = W^{-} + (\mu^{+} - \mu^{-})\gamma^2_{(ss)}, \quad \overset{*}{W}_{(s)} = W^{+} - (\mu^{+} - \mu^{-})\gamma^2_{(ss)} \tag{9}$$

где

$$\lambda^{+} = \lambda^{-} = \lambda \tag{10}$$

λ^{+}, μ^{+}, λ^{-} и μ^{-}—постоянные Лямэ, соответствующие функциям W^{+} и W^{-} соответственно.

1. Пусть часть круглой цилиндрической трубы из рассматриваемого материала в системе цилиндрических координат ρ, ϑ, x_3 в недеформированном состоянии ограничена цилиндрическими поверхностями $\rho = \rho_1$, $\rho = \rho_2$ и плоскостями $\vartheta = \pm\vartheta_0$, $x_3 = \pm L$.

Рассматриваемое тело испытывает простое растяжение и цилиндрический изгиб, определяемые соотношениями

$$r = r(\rho), \quad \theta = a\vartheta, \quad y_3 = bx_3 \tag{1.1}$$

где $(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = (r, \theta, y_3)$—цилиндрические координаты, определяющие деформированное тело, a и b—постоянные.

Известным способом [1] определяем метрические тензоры относительно системы r, θ, y_3

$$G_{11} = G^{11} = G_{33} = G^{33} = 1, \quad G_{22} = r^2, \quad G^{22} = \frac{1}{r^2}$$

$$G_{ij} = G^{ij} = 0 \quad (i \neq j) \tag{1.2}$$

$$g_{11} = \frac{1}{r_\rho^2}, \quad g_{22} = \frac{\rho^2}{a^2}, \quad g_{33} = \frac{1}{b^2}$$

$$g^{11} = r^2, \quad g^{22} = \frac{a^2}{\rho^2}, \quad g^{33} = b^2 \tag{1.3}$$

$$g_{ij} = g^{ij} = 0 \quad (i \neq j)$$

Здесь $r_\rho = \dfrac{dr}{d\rho}$.

Определяя по формуле $\gamma_{ij} = \dfrac{1}{2}(G_{ij} - g_{ij})$ ковариантные компоненты деформаций, убеждаемся, что система (r, θ, y_3) в каждой точке деформированного тела совпадает с главными направлениями деформации (так как $\gamma_{ij} = 0$ при $i \neq j$) и, следовательно, $g_{ij} = \bar{g}_{ij}$, $g^{ij} = \bar{g}^{ij}$, $G_{ij} = \bar{G}_{ij}$, $\gamma_{ij} = \bar{\gamma}_{ij}$ и т. д. Тогда из (2) находим

$$\gamma_{(11)} = \frac{1}{2}(r_\rho^2 - 1), \quad \gamma_{(22)} = \frac{1}{2}\left(\frac{a^2r^2}{\rho^2} - 1\right), \quad \gamma_{(33)} = \frac{1}{2}(b^2 - 1) \tag{1.4}$$

Если материал деформированного тела растягивается по направлению θ_s $(\theta_1 = r,\ \theta_2 = \theta,\ \theta_3 = y_3)$ и сжимается по перпендикулярным к нему направлениям, то из (3) с помощью (4), (1.2) и (1.3) определяем

$$\tau'^{11}_{(s)} = r_\rho^2 \Phi'_{(s)} + r_\rho^2 \left(\frac{a^2 r^2}{\rho^2} + b^2 \right) \Psi'_{(s)} + p'_{(s)} + r_\rho^2 \Theta'_{(s)} \delta_{1s}$$

$$r^2 \tau'^{22}_{(s)} = \frac{a^2 r^2}{\rho^2} \Phi'_{(s)} + \left(\frac{a^2 r^2 r_\rho^2}{\rho^2} + \frac{a^2 b^2 r^2}{\rho^2} \right) \Psi'_{(s)} + p'_{(s)} + \frac{a^2 r^2}{\rho^2} \Theta'_{(s)} \delta_{2s} \quad (1.5)$$

$$\tau'^{33}_{(s)} = b^2 \Phi'_{(s)} + \left(b^2 r_\rho^2 + \frac{a^2 b^4 r^2}{\rho^2} \right) \Psi'_{(s)} + p'_{(s)} + b^2 \Theta'_{(s)} \delta_{3s}$$

где δ_{ij} — символы Кронекера.

Аналогичные выражения могут быть получены и для случая, когда материал сжимается только по направлению δ_s. Тогда в выражениях (1.5) вместо величин с одним штрихом будут фигурировать аналогичные величины с двумя штрихами. Если материал растягивается или сжимается по всем направлениям, то вместо указанных величин будут аналогичные величины с индексом (+) или (—). В этом случае последние члены (1.5), содержащие функцию $\Theta_{(s)}$, будут отсутствовать.

Уравнения равновесия в данном случае приводятся к одному

$$\frac{d}{dr}(r \tau^{11}) = r^2 \tau^{22} \qquad (1.6)$$

где τ^{11} и τ^{22} символизируют те напряжения, которые имеются в деформированном теле в каждом конкретном случае.

Для решения задачи принимаем, что известны: постоянные a и b, радиус одной из граничных цилиндрических поверхностей деформированного тела и нормальная равномерно распределенная нагрузка, действующая на этой поверхности, то есть

$$\rho = \rho_1: \quad r = r_1, \quad \tau^{11} = P_1 \qquad (1.7)$$

или

$$\rho = \rho_2: \quad r = r_2, \quad \tau^{11} = P_2 \qquad (1.8)$$

На основании (1.7) из (1.4) определяются $\gamma_{(33)}$ для всего тела и $\gamma_{(22)}$ на поверхности $r = r_1$.

Для определения вида напряженного состояния у граничной поверхности $r = r_1$ нужно определить также $\gamma_{(11)}$ при $r = r_1$. Принимая $\gamma_{(11)}|_{\rho=\rho_1} > 0$, подставляем в равенство $\tau^{11}|_{\rho=\rho_1} = P_1$ выражение τ^{11}, соответствующее знакам $\gamma_{(ss)}$, откуда определяем $r_\rho|_{\rho=\rho_1}$, а из (1.4) — $\gamma_{(11)}|_{\rho=\rho_1}$. Если $\gamma_{(11)}|_{\rho=\rho_1} < 0$, повторяем указанные вычисления, подставляя вместо $\tau^{11}|_{\rho=\rho_1}$ выражение, соответствующее отрицательному $\gamma_{(11)}$.

Таким образом, получаем необходимые граничные условия для решения (1.6), которое после подстановки выражений τ^{11} и τ^{22}, соответствующих определенным знакам $\gamma_{(11)}$, $\gamma_{(22)}$ и $\gamma_{(33)}$, приводятся к нелинейному дифференциальному уравнению второго порядка относительно функции $r(\rho)$

$$\rho = \rho_1: \quad r = r_1, \quad r_\rho = r_\rho|_{\rho=\rho_1}$$

Уравнение (1.6) интегрируем в пределах всего тела и из (1.4) определяем функции $\gamma_{(11)}$ и $\gamma_{(22)}$ ($\gamma_{(33)} = \text{const}$). Если они в пределах тела не меняют своего знака, то найденное решение (функции $r(\rho)$ и и r_ρ) будет искомое. Если $\gamma_{(11)}$ и $\gamma_{(22)}$ или один из них в пределах трубы меняет свой знак, то найденное решение справедливо только для участка, где $\gamma_{(11)}$ и $\gamma_{(22)}$ сохраняют свои знаки. Радиус разделяющей поверхности этого участка r_3 (соответствующий $\gamma_{(11)} = 0$) либо r_4 (соответствующий $\gamma_{(22)} = 0$) находим из полученных решений и из равенства $r^2_{\rho}\big|_{r=r_3} = 1$ либо $r_4^2 = \dfrac{\rho^2}{a^2}$.

Для следующего участка, начинающегося с разделяющей поверхности, интегрируем (1.6), заранее подставляя туда выражения τ^{11} и τ^{22}, соответствующие новым знакам $\gamma_{(ss)}$, а граничные условия получаем из предыдущих решений. Затем продолжаем аналогичным образом.

Подставляя найденные значения $r(\rho)$ и r_ρ для каждого участка в соответствующие выражения напряжений τ^{ij}, находим напряженное состояние рассматриваемого тела.

Заметим, что при нахождении разделяющих поверхностей указанных участков и для проверки может пригодиться также условие равенства соответствующих напряжений примыкающих участков на их разделяющей поверхности.

Из рассматриваемой задачи в частном случае, когда $\vartheta_0 = \pi$ и $a = 1$, получаем случай растяжения и симметричного расширения круглой цилиндрической трубы, но изложенный метод не позволяет рассмотреть случай, когда часть трубы выпрямляется до прямоугольного параллелепипеда. Этот случай рассматривается отдельно в следующем пункте.

2. Пусть рассматриваемая часть трубы после деформации преобразуется в прямоугольный параллелепипед.

Для определения деформированного тела выберем прямоугольные декартовы координаты (y_1, y_2, y_3) так, что $y = y_1 = f(\rho)$, $y_2 = c\vartheta$; $y_3 = dx_3$.

Тогда координаты точки ρ, ϑ, x_3 недеформированного состояния выражаются соотношениями

$$\rho = \rho(y_1), \quad \vartheta = \frac{y_2}{c}, \quad x_3 = \frac{y_3}{d} \tag{2.1}$$

Тогда метрические тензоры определятся выражениями

$$G_{ij} = G^{ij} = \delta_{ij}$$

$$g_{11} = \frac{1}{y_\rho^2}, \quad g_{22} = \frac{\rho^2}{c^2}, \quad g_{33} = \frac{1}{d^2} \tag{2.2}$$

$$g^{11} = y_\rho^2, \quad g^{22} = \frac{c^2}{\rho^2}, \quad g^{33} = d^2$$

$$g_{ij} = g^{ij} = 0 \quad (i \neq j), \text{ где } y_\rho = \frac{dy}{d\rho}$$

Здесь направления системы (y_1, y_2, y_3) в каждой точке параллелепипеда совпадают с главными направлениями деформации (так как $\gamma_{ij} = 0$ при $i \neq j$). Компоненты $\gamma_{(ss)}$ будут

$$\gamma_{(11)} = \frac{1}{2}(y_\rho^2 - 1), \quad \gamma_{(22)} = \frac{1}{2}\left(\frac{c^2}{\rho^2} - 1\right), \quad \gamma_{(33)} = \frac{1}{2}(d^2 - 1) \quad (2.3)$$

Когда материал параллелепипеда растягивается по одному из направлений y_s $(s = 1, 2, 3)$, а по перпендикулярным к нему направлениям сжимается, из (3), (4) и (2.2) определяем физические компоненты напряжения $\sigma'_{(s)ij}$, которые в данном случае (в прямоугольных декартовых координатах) совпадают с тензором $\tau'^{ij}_{(s)}$

$$\sigma'_{(s)11} = y_\rho^2 \Phi'_{(s)} + y_\rho^2\left(\frac{c^2}{\rho^2} + d^2\right)\Psi'_{(s)} + p'_{(s)} + y_\rho^2\,\Theta'_{(s)}\delta_{1s}$$

$$\sigma'_{(s)22} = \frac{c^2}{\rho^2}\Phi'_{(s)} + \left(\frac{y_\rho^2 c^2}{\rho^2} + \frac{c^2 d^2}{\rho^2}\right)\Psi'_{(s)} + p'_{(s)} + \frac{c^2}{\rho^2}\Theta'_{(s)}\delta_{2s} \quad (2.4)$$

$$\sigma'_{(s)33} = d^2\Phi'_{(s)} + \left(y_\rho^2 d^2 + \frac{c^2 d^2}{\rho^2}\right)\Psi'_{(s)} + p'_{(s)} + d^2\,\Theta'_{(s)}\delta_{3s}$$

$$\sigma'_{(s)ij} = 0 \quad (i \neq j)$$

Если материал параллелепипеда сжимается по направлению y_s и растягивается по перпендикулярным к нему направлениям, то $\sigma''_{(s)11}$ определяются аналогичными (2.4) выражениями, где величины с одним штрихом заменяются соответствующими величинами с двумя штрихами. В выражения σ^+_{ij} или σ^-_{ij} (соответствующие растяжению или сжатию материала по всем направлениям) вместо указанных величин должны входить соответствующие величины с индексом $(+)$ или $(-)$.

Как видно из полученных уравнений, деформированное и напряженное состояния зависят от постоянных c, d и от y_ρ (от y непосредственно не зависят). Следовательно, начало координат системы (y_1, y_2, y_3) можно выбрать в любой точке линии $(y_2 = 0, \; y_3 = 0)$. Для простоты его возьмем на грани параллелепипеда, соответствующей граничной цилиндрической поверхности $\rho = \rho_1$ недеформированного состояния, то есть $y = Y_1 = 0$ при $\rho = \rho_1$.

Уравнения равновесия в данном случае приводятся

$$\frac{d\sigma_{11}}{dy} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{d\sigma_{11}}{d\rho} = 0 \quad (2.5)$$

откуда следует

$$\sigma_{11} = \text{const} = P \tag{2.6}$$

Здесь σ_{11} символизирует то напряжение $(\sigma'_{(s)11}, \sigma''_{(s)11}, \sigma^+_{11}, \sigma^-_{11})$, которое соответствует знакам $\gamma_{(11)}, \gamma_{(22)}$ и $\gamma_{(33)}$.

Предположим, известны постоянные c, d и равномерно распределенная нормальная нагрузка P на одной из граней $y = Y_1 = 0$ или $y = Y_2$ (соответствующей цилиндрической поверхности ρ_1 или ρ_2).

Из (2.3) определяем $\gamma_{(22)}$ и $\gamma_{(33)} = \text{const}$. Затем из (6), подставляя туда выражение σ_{11}, соответствующее знакам $\gamma_{(22)}, \gamma_{(33)}$ при $\rho = \rho_1$ и интуитивно выбранному знаку $\gamma_{(11)}$, получим алгебраическое уравнение относительно функции y_ρ. Из этого уравнения и из (2.3) определяем значения y_ρ и $\gamma_{(11)}$ при $\rho = \rho_1$. Если знак полученного $\gamma_{(11)}$ не совпадает с выбранным знаком $\gamma_{(11)}$, то повторяем указанные действия для уточненного знака $\gamma_{(11)}$.

Из указанного алгебраического уравнения для зоны, начинающейся из грани $y = Y_1 = 0$, где $\gamma_{(11)}$ и $\gamma_{(22)}$ не меняют своего знака, получаем

$$y_\rho = f(\rho) \tag{2.7}$$

откуда

$$y = \int_{\rho_1}^{\rho_k} f(\rho)\, d\rho \tag{2.8}$$

где ρ_k совпадает с ρ_2, если $\gamma_{(11)}$ и $\gamma_{(22)}$ в пределах параллелепипеда сохраняют свой знак. В противном случае ρ_k совпадает с радиусом ρ_3 соответствующей разделяющей плоскости $y = Y_3$, где $\gamma_{(11)} = 0$, или с радиусом ρ_4 соответствующей плоскости $y = Y_4$, где $\gamma_{(22)} = 0$.

Радиус $\rho_4 = c$ определяем из (2.3), принимая $\gamma_{(22)} = 0$, а ρ_4—из уравнения (2.6), подставляя туда $y_\rho = 1$.

Указанным способом для каждой зоны определяем функции y_ρ и $y(\rho)$, которые подставляя в (2.4), определяем напряжения.

Более подробно этот случай рассматривается в следующем пункте на примере.

3. Предположим, рассматриваемая часть трубы изготовлена из материала, для которого упругие постоянные теории упругости второго порядка, входящие в выражения W (5), определяются следующим образом:

$$A_1^+ = -\frac{1}{2}\mu^+ \qquad A_1^- = -\frac{1}{2}\mu^-$$

$$A_2^+ = \frac{1}{8}(\lambda + 2\mu^+) \qquad A_2^- = \frac{1}{8}(\lambda + 2\mu^-)$$

$$A_3^+ = -\frac{3}{8}(\lambda + 3\mu^+) \qquad A_3^- = -\frac{3}{8}(\lambda + 3\mu^-) \tag{3.1}$$

$$A_4^+ = \frac{3}{16}(\lambda + 2\mu^+) \qquad A_4^- = \frac{3}{16}(\lambda + 2\mu^-)$$

$$A_5^+ = \frac{9}{8}\mu^+ \qquad A_5^- = \frac{9}{8}\mu^-$$

где λ, μ^+ и μ^- — постоянные Ламэ (см. (9) и (10)).

Приведенные постоянные выбраны по результатам работы [5].

Из (6) и (3.1) определяем

$$A_6 = \mu^+ - \mu^-, \quad A_7 = 3(\mu^+ - \mu^-) \tag{3.2}$$

Тогда для случая, когда материал тела растягивается по всем направлениям, из (4), (2.4) и (3.1), произведя предварительно соответствующие изменения в (2.4), получаем

$$\sigma_{11}^+ = \frac{y_\rho \rho}{4cd}\Big(4.5\lambda y_\rho^4 + 9\mu^+ y_\rho^4 - 19\lambda y_\rho^2 - 32\mu^+ y_\rho^2 + 3\lambda d^2 y_\rho^2 + $$
$$+ 3\lambda \frac{c^2 y_\rho^2}{\rho^2} + 59\mu^+ + 25.5\lambda - 10\lambda d^2 - 18\mu^+ d^2 + 1.5\lambda d^4 +$$
$$+ 1.5\lambda \frac{c^4}{\rho^4} - 10\lambda \frac{c^2}{\rho^2} - 18\mu^+ \frac{c^2}{\rho^2}\Big) = P$$

$$\sigma_{22}^+ = \frac{c}{4y_\rho \rho d}\Big(1.5\lambda y_\rho^4 - 10\lambda y_\rho^2 - 18\mu^+ y_\rho^2 + 3\lambda \frac{y_\rho^2 c^2}{\rho^2} + 59\mu^+ +$$
$$+ 25.5\lambda - 19\lambda \frac{c^2}{\rho^2} - 32\mu^+ \frac{c^2}{\rho^2} - 10\lambda d^2 - 18\mu^+ d^2 + \tag{3.3}$$
$$+ 3\lambda \frac{c^2 d^2}{\rho^2} + 4.5\lambda \frac{c^4}{\rho^4} + 9\mu \frac{c^4}{\rho^4} + 1.5\lambda d^4\Big)$$

$$\sigma_{33}^+ = \frac{\rho d}{4y_\rho c}\Big(1.5\lambda y_\rho^4 - 10\lambda y_\rho^2 - 18\mu^+ y_\rho^2 + 3\lambda d^2 y_\rho^2 + 59\mu^+ +$$
$$+ 25.5\lambda - 10\lambda \frac{c^2}{\rho^2} - 18\mu^+ \frac{c^2}{\rho^2} - 19\lambda d^2 - 32\mu^+ d^2 +$$
$$+ 3\lambda \frac{c^2 d^2}{\rho^2} + 1.5\lambda \frac{c^4}{\rho^4} + 4.5\lambda d^4 + 9\mu^+ d^4\Big)$$

$$\sigma_{ij}^+ = 0 \quad (i \neq j)$$

Когда материал сжимается по всем направлениям, для σ_{ij}^- получаем аналогичные выражения, где вместо μ^+ фигурирует μ^-. Для остальных случаев деформированного состояния имеем

$$\sigma'_{(s)kk} = \sigma_{kk}^- + \varphi_{(k)} \delta_{ks} \tag{3.4}$$

$$\sigma'_{(s)kk} = \sigma^{+}_{kk} - \varphi_{(k)}\delta_{ks} \quad (k = 1,\ 2,\ 3) \tag{3.5}$$

(по индексам k и s не суммировать)

Здесь

$$\varphi_{(1)} = \frac{y_\rho \rho}{4bc}(9y_\rho^4 - 14y_\rho^2 + 5)(\mu^+ - \mu^-)$$

$$\varphi_{(2)} = \frac{c}{4y_\rho \rho^2 b}\left(9\frac{c^4}{\rho^4} - 14\frac{c^2}{\rho^2} + 5\right)(\mu^+ - \mu^-) \tag{3.6}$$

$$\varphi_{(3)} = \frac{d^2}{4y_\rho bc}(9d^4 - 14d^2 + 5)(\mu^+ - \mu^-)$$

Пусть круглая цилиндрическая труба из рассматриваемого материала, для которого $\lambda = 3100\ кг/см^2$, $\mu^+ = 776\ кг/см^2$, $\mu^- = 345\ кг/см^2$, в системе цилиндрических координат ρ, θ, x_3 определяется цилиндрическими поверхностями $\rho_1 = 20\ см$, $\rho_2 = 24\ см$ и плоскостями $x_3 = \pm 15\ см$, $\vartheta = \pm\pi$ (в этом месте стенка трубы разрезана). Труба деформируется в прямоугольный параллелепипед так, что $c = 23$, $d = 0.952$, а его грани $y = Y_1 = 0$ и $y = Y_2$ свободны от напряжений ($P = 0$), то есть $\sigma_{11} = 0$.

Из (2.3) определяем

$$\gamma_{(22)} = \frac{264.5}{\rho^2} - \frac{1}{2}, \quad \gamma_{(33)} = -0.041$$

Принимая $\gamma_{(11)} < 0$ и подставляя в $\sigma_{11} = 0$ выражение $\sigma'_{(2)11}$ из (3.4), соответствующее $\gamma_{(22)} > 0$, $\gamma_{(33)} < 0$, для $\rho = 20\ см$ находим $r_\rho = 0.8952$. Следовательно, у грани $y = Y_1 = 0$ действительно $\gamma_{(11)} < 0$, и напряжения $\sigma'_{(2)ij}$ определяем из (3.4).

Из уравнения $\sigma'_{(2)11} = 0$, подставляя туда значение $y_\rho = 1$ (соответствующее $\gamma_{(11)} = 0$), получаем $\rho_3 = 22\ см$, а из равенства $\gamma_{(22)} = 0$ определяем радиус $\rho_4 = 23\ см$.

Таким образом, в параллелепипеде получаем три зоны: в зоне $20 \leqslant \rho \leqslant 22$ $\gamma_{(11)} \leqslant 0$, $\gamma_{(22)} > 0$, $\gamma_{(33)} < 0$ и $\sigma_{ij} = \sigma'_{(2)ij}$, в зоне $22 \leqslant \rho \leqslant 23$ имеем $\gamma_{(11)} \geqslant 0$, $\gamma_{(22)} \geqslant 0$, $\gamma_{(33)} < 0$ и $\sigma_{ij} = \sigma'_{(3)ij}$, в зоне $23 \leqslant \rho \leqslant 24$ $\gamma_{(11)} > 0$, $\gamma_{(22)} \leqslant 0$, $\gamma_{(33)} < 0$ и $\sigma_{ij} = \sigma'_{(1)ij}$.

Из уравнений $\sigma'_{(2)11} = 0$, $\sigma'_{(3)11} = 0$ и $\sigma'_{(1)11} = 0$, подставляя туда соответствующие выражения σ_{11} из (3.4), (3.5) и значения постоянных, получаем

$$y_\rho = \sqrt{1.803 - 144\frac{1}{\rho^2} - \sqrt{634\frac{1}{\rho^2} - 55530\frac{1}{\rho^4} - 0.827}}$$

где $20 \leqslant \rho \leqslant 22$

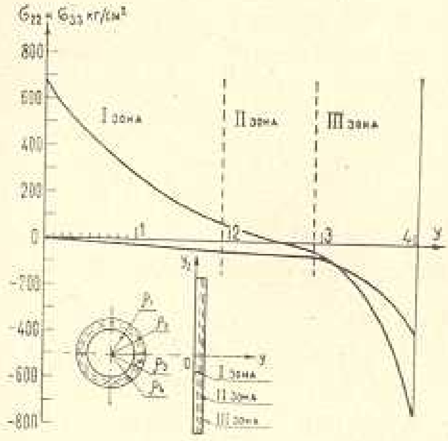
$$y_\rho = \sqrt{1.803 - 117\frac{1}{\rho^2} - \sqrt{713\frac{1}{\rho^2} - 48360\frac{1}{\rho^4} - 0.950}}$$

где $22 \leqslant \rho \leqslant 23$

$$y_\rho = \sqrt{1.614 - 117\frac{1}{\rho^2} - \sqrt{561\frac{1}{\rho^2} - 48360\frac{1}{\rho^4} - 0.827}}$$

где $23 \leqslant \rho \leqslant 24$

Из этих уравнений определяем функции y_ρ для каждой зоны. Затем из (3.4) и (3.5) с помощью (3.6) определяем напряжения каждой зоны. Результаты вычислений приведены на фиг. 1.



Фиг. 1

Нормальные нагрузки, действующие на гранях параллелепипеда, $y_2 = \pm c\vartheta_0 = \pm 72.2$ *см* и $y_3 = \pm dL = \pm 14.3$ *см* эквивалентны результирующим силам $N_2 = 9180$ *кг* и $N_3 = 9230$ *кг* и результирующим моментам $M_2 = 366$ *кгм* и $M_3 = 90$ *кгм* относительно осей y_3 и y_2 соответственно.

Институт механики АН Армянской ССР

Поступила 31 V 1971

Թ. Ե. ՄԿՐՏՉՅԱՆ

ՁԳՄԱՆ ԵՎ ՍԵՂՄՄԱՆ ԴԵՖՈՐՄԱՑԻԱՆԵՐԻՆ ՏԱՐԲԵՐ ԴԻՄԱԴՐՈՂ ՆՅՈՒԹԻՑ ՊԱՏՐԱՍՏՎԱԾ ԽՈՂՈՎԱԿԻ ՄԱՍԻ ԾՌՄԱՆ ԵՎ ԵՐԿԱՐԱՑՄԱՆ ՄԵԾ ԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ԴԵՖՈՐՄԱՑԻԱՆԵՐԸ

Ամփոփում

Մեծ դեֆորմացիաների առկայության դեպքում դիտարկվում է ձգման և սեղմման դեֆորմացիաներին տարբեր դիմադրություն ցույց տվող առաձգական սեղմելի նյութից պատրաստված կլոր խողովակի գլանային սեկտորի տեսքով մասի սիմետրիկ ծռման խնդիրը։ Այն դեպքը, երբ խողովակի մասը

ուղղվում է մինչև ուղղանկյուն զուգահեռանիստ դառնալը, ուսումնասիրվում է առանձին։

Որպես օրինակ դիտարկվում է լրիվ խողովակի մինչև ուղղանկյուն զուգահեռանիստի վիճակը ուղղվելու խնդիրը, երբ դեֆորմացիաները գտնվում են երկրորդ կարգի առաձգականության տեսության առնչությունների կիրառելիության սահմաններում։

LARGE ELASTIC DEFORMATIONS OF FLEXURE AND EXTENSION OF A TUBE SECTION HETERORESISTANT TO TENSION AND COMPRESSION

R. E. MKRTCHIAN

S u m m a r y

The problem on symmetric flexure and extention of a tube section in the form of a cylindrical sector of compressible elastic material heteroresistant to tension and compression under large deformations is considered. The case of a tube section, straightened to a cuboid, is examined separately.

The problem of straightening the whole tube to a cuboid, where its deformations are within the limits of correctness of the elasticity theory relations of the second order, is presented as an example.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Грин А., Адкинс Дж.* Большие упругие деформации и нелинейная механика сплошной среды. Изд. „Мир", М., 1965.
2. *Мкртчян Р. Е.* Об одной модели материала, разносопротивляющегося деформациям растяжения и сжатия. Изв. АН Арм.ССР, Механика, т. XXIII, № 5, 1970.
3. *Хачатрян А. А.* Чистый изгиб прямоугольной пластинки, изготовленной из разномодульного материала. Изв. АН Арм.ССР, Механика, т. XXV, № 1, 1972.
4. *Мкртчян Дж. З.* Чистый изгиб круглого стержня, изготовленного из разномодульного материала. Изв. АН Арм.ССР, Механика, т. XXII, № 4, 1969.
5. *Зволинский Н. В., Риз П. П.* О некоторых задачах нелинейной теории упругости. ПММ, т. II, вып. 4, 1939.