

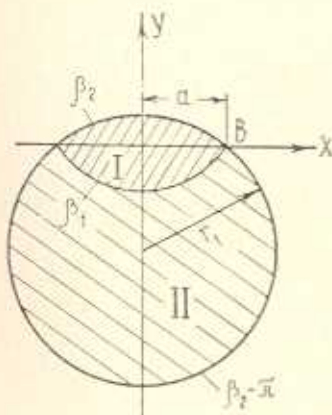
А. А. АРУТЮНЯН, К. С. ЧОБАНЯН

КРУЧЕНИЕ КРУГЛОГО СОСТАВНОГО СТЕРЖНЯ

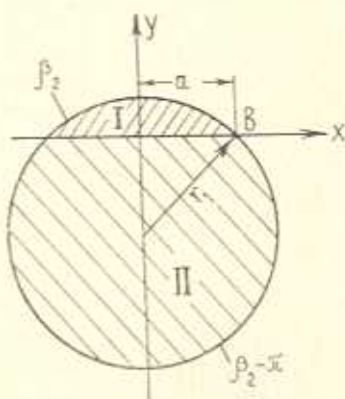
Решения ряда конкретных задач упругого кручения составных стержней в постановке Мухелишвили приведены в [1, 2]. Там же имеются обзоры работ по этим задачам.

В настоящей заметке получено замкнутое решение задачи о кручении составного круглого стержня с линией раздела между областями поперечного сечения, соответствующими различным материалам, являющейся дугой окружности. Эта задача может быть рассмотрена как обобщение задачи Вебера [3].

На численном примере доказано, что при одном и том же крутящем моменте максимальное касательное напряжение скручиваемого составного стержня при определенных сочетаниях соединяемых материалов будет меньше соответствующего напряжения однородного стержня таких же размеров.



Фиг. 1



Фиг. 2

Исследовано поведение напряжений в окрестности точки пересечения линии раздела с контуром поперечного сечения скручиваемого стержня для предельного значения угла между его боковой поверхностью и поверхностью раздела.

1. Составной круглый стержень с поперечным сечением, изображенным на фиг. 1, с линией раздела областей, являющейся дугой окружности, подвергается кручению моментами, приложенными к торцам стержня. Каждая часть стержня однородна и изотропна.

Функцию напряжений удобно определять в биполярной системе координат (α, β) , связанной с прямоугольной системой (x, y) зависимостями [4]

$$\alpha = \lg \sqrt{(\alpha + x)^2 + y^2} - \lg \sqrt{(\alpha - x)^2 + y^2} \quad (1.1)$$

$$\beta = \arctg \frac{y}{\alpha + x} - \arctg \frac{y}{x - \alpha} + \pi$$

Граница и линия раздела области поперечного сечения рассматриваемого стержня являются координатными линиями.

Для радиуса r_1 дуги $\beta = \beta_2$ имеем

$$r_1 = \frac{\alpha}{|\sin \beta_2|} \quad (1.2)$$

Так как биполярные координаты получаются из прямоугольных координат конформным преобразованием, то гармонический оператор от какой-либо функции преобразуется в биполярных координатах в оператор

$$\nabla^2 U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = g^2 \left(\frac{\partial^2 U}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial \beta^2} \right) \quad (1.3)$$

где g характеризует масштаб преобразования и дается формулой

$$g = \frac{\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta}{\alpha} \quad (1.4)$$

В биполярных координатах функция напряжений при кручении в области поперечного сечения стержня удовлетворяет уравнению

$$\nabla^2 U_i = -2G_i \theta \quad (i = 1, 2) \quad (1.5)$$

На контуре поперечного сечения функции $U_i(\alpha, \beta)$ должны удовлетворять граничным условиям

$$U_1(\alpha, \beta_2) = 0; \quad U_2(\alpha, \beta_2 - \pi) = 0 \quad (1.6)$$

и условиям сопряжения [5] на линии раздела $\beta = \beta_1$

$$U_1(\alpha, \beta_1) = U_2(\alpha, \beta_1); \quad \frac{1}{G_1} \frac{\partial U_1}{\partial \beta} \Big|_{\beta=\beta_1} = \frac{1}{G_2} \frac{\partial U_2}{\partial \beta} \Big|_{\beta=\beta_1} \quad (1.7)$$

Между материалами принимается полное зацепление без начальных напряжений.

Функции $U_i(\alpha, \beta)$ ($i = 1, 2$) ищем в виде

$$U_i(\alpha, \beta) = \frac{1}{2} G_i a^2 \left\{ \Phi_i(\alpha, \beta) + \left[1 - \left(\frac{r}{a} \right)^2 \right] \right\} \quad (1.8)$$

Для безразмерной функции $\Phi_i(\alpha, \beta)$ получаем гармоническое уравнение

$$\frac{\partial^2 \Phi_i(\alpha, \beta)}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 \Phi_i(\alpha, \beta)}{\partial \beta^2} = 0 \quad (i = 1, 2) \quad (1.9)$$

С учетом четности функции $U_i(\alpha, \beta)$ по переменной α ищем решение уравнения (1.9) в виде интегралов Фурье

$$\Phi_1(\alpha, \beta) = \int_0^{\infty} [A_1(z) \operatorname{sh} z(\beta - \beta_1) + B_1(z) \operatorname{sh} z(\beta_2 - \beta)] \cos z\alpha \, dz \quad (1.10)$$

$$(0 < \alpha < \infty; \beta_1 < \beta < \beta_2)$$

$$\Phi_2(\alpha, \beta) = \int_0^{\infty} [A_2(z) \operatorname{sh} z(\beta_2 - \pi - \beta) + B_2(z) \operatorname{sh} z(\beta_1 - \beta)] \cos z\alpha \, dz \quad (1.11)$$

$$(0 < \alpha < \infty; \beta_2 - \pi < \beta < \beta_1)$$

Удовлетворив условиям (1.6) и (1.7), получим выражения A_i, B_i ($i = 1, 2$). Подставив значения этих коэффициентов в (1.10) и (1.11), после ряда преобразований получим следующие выражения для функций $\Phi_i(\alpha, \beta)$ ($i = 1, 2$):

$$\Phi_1(\alpha, \beta) = 4 \int_0^{\infty} \left\{ -\operatorname{ctg} \beta_2 \frac{\operatorname{sh} z \beta_2 \operatorname{sh} z(\beta - \beta_1)}{\operatorname{sh} z \pi \operatorname{sh} z(\beta_2 - \beta_1)} - \frac{\operatorname{sh} z \beta_1}{D} \left[\frac{G_2 \operatorname{ctg} \beta_2}{\operatorname{sh} z(\beta_2 - \beta_1)} - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{\operatorname{ctg} \beta_1 \operatorname{ch} z(\beta_2 - \pi - \beta_1)}{\operatorname{sh} z \pi} (G_2 - G_1) \right] \operatorname{sh} z(\beta_2 - \beta) \right\} \cos z\alpha \, dz \quad (1.12)$$

$$(0 < \alpha < \infty; \beta_1 < \beta < \beta_2)$$

$$\Phi_2(\alpha, \beta) = 4 \int_0^{\infty} \left\{ -\operatorname{ctg} \beta_2 \frac{\operatorname{sh} z(\beta_2 - \pi) \operatorname{sh} z(\beta_1 - \beta)}{\operatorname{sh} z \pi \operatorname{sh} z(\pi + \beta_1 - \beta_2)} - \right. \\ \left. - \frac{\operatorname{sh} z \beta_1}{D} \left[-\frac{G_1 \operatorname{ctg} \beta_2}{\operatorname{sh} z(\pi + \beta_1 - \beta_2)} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\operatorname{ctg} \beta_1 \operatorname{ch} z(\beta_2 - \beta_1)}{\operatorname{sh} z \pi} (G_1 - G_2) \right] \operatorname{sh} z(\beta_2 - \pi - \beta) \right\} \cos z\alpha \, dz \quad (1.13)$$

$$(0 < \alpha < \infty; \beta_2 - \pi < \beta < \beta_1)$$

где

$$D = G_1 \operatorname{sh} z(\beta_2 - \beta_1) \operatorname{ch} z(\beta_2 - \pi - \beta_1) - G_2 \operatorname{ch} z(\beta_2 - \beta_1) \operatorname{sh} z(\beta_2 - \pi - \beta_1) \quad (1.14)$$

Касательные напряжения $\tau_{\alpha z}$ и $\tau_{\beta z}$ выражаются через функцию напряжений следующим образом [4]:

$$\tau_{\alpha z} = \mp g \frac{\partial U(\alpha, \beta)}{\partial \beta}; \quad \tau_{\beta z} = \mp g \frac{\partial U(\alpha, \beta)}{\partial \alpha} \quad (1.15)$$

Верхний знак относится к случаю $\beta > 0$, а нижний — к случаю $\beta < 0$.

2. Рассмотрим конкретный случай, когда $\beta_1 = 0$, то есть область I представляет собой круговой сегмент (фиг. 2).

Функции напряжений $U_i(\alpha, \beta)$ ($i=1, 2$) принимают вид

$$U_1(\alpha, \beta) = G_1 \theta a^2 \left\{ \frac{\cos \beta - \operatorname{ctg} \beta_2 \sin \beta}{\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta} + \right. \\ \left. + 2(G_2 - G_1) \int_0^{\infty} \frac{z \operatorname{ch} z (\beta_2 - \pi) \operatorname{sh} z (\beta_2 - \beta) \cos z \alpha dz}{\operatorname{sh} z \pi [G_1 \operatorname{sh} z \beta_2 \operatorname{ch} z (\beta_2 - \pi) - G_2 \operatorname{ch} z \beta_2 \operatorname{sh} z (\beta_2 - \pi)]} \right\} \\ (0 < \alpha < \infty; 0 < \beta < \beta_2) \quad (2.1)$$

$$U_2(\alpha, \beta) = G_2 \theta a^2 \left\{ \frac{\cos \beta - \operatorname{ctg} \beta_2 \sin \beta}{\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta} + \right. \\ \left. + 2(G_2 - G_1) \int_0^{\infty} \frac{z \operatorname{ch} z \beta_2 \operatorname{sh} z (\beta_2 - \pi - \beta) \cos z \alpha dz}{\operatorname{sh} z \pi [G_1 \operatorname{sh} z \beta_2 \operatorname{ch} z (\beta_2 - \pi) - G_2 \operatorname{ch} z \beta_2 \operatorname{sh} z (\beta_2 - \pi)]} \right\} \\ (0 < \alpha < \infty; \beta_2 - \pi < \beta < 0) \quad (2.2)$$

Вычислим напряжение в точке B ($\beta = 0$, $\alpha = \infty$) пересечения линии раздела с контуром поперечного сечения стержня.

Пусть $\beta_2 = \frac{\pi}{3}$, $G_2 = 2G_1 = G$. На линии раздела $\beta = 0$ для вычисления касательных напряжений получаем следующую формулу:

$$\tau_{\alpha z}^{(1)}|_{\beta=0} = \frac{1}{2} \tau_{\alpha z}^{(2)}|_{\beta=0} = \frac{G \theta a}{2} \left\{ \frac{1}{\sqrt{3}} + \right. \\ \left. + 2i(\operatorname{ch} \alpha + 1) \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda_k^2 \operatorname{cth} \frac{\lambda_k \pi}{3} \operatorname{ch} \frac{2\lambda_k \pi}{3} e^{i\lambda_k \alpha}}{\operatorname{ch} \lambda_k \pi \left(5 + 6 \operatorname{sh}^2 \frac{\lambda_k \pi}{3} \right)} + \right. \right. \\ \left. + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mu_k^2 \operatorname{cth} \frac{\mu_k \pi}{3} \operatorname{ch} \frac{2\mu_k \pi}{3} e^{i\mu_k \alpha}}{\operatorname{ch} \mu_k \pi \left(5 + 6 \operatorname{sh}^2 \frac{\mu_k \pi}{3} \right)} + \right. \\ \left. + \frac{3}{5\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\nu_k \operatorname{ch} \frac{2\nu_k \pi}{3} (2 + i\nu_k \alpha) e^{i\nu_k \alpha}}{\operatorname{ch} \nu_k \pi} + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\beta_k^2 \operatorname{cth} \frac{\beta_k \pi}{3} \operatorname{cth} \frac{2\beta_k \pi}{3} e^{i\beta_k \alpha}}{\operatorname{sh} \beta_k \pi} \right] \right\} \quad (2.3)$$

где

$$\begin{aligned} \lambda_k &= (3k+1)i, & \mu_k &= (3k+2)i \\ \nu_k &= 3ki, & \beta_k &= 3i \left[\frac{1}{\pi} \arcsin \left(\pm \sqrt{\frac{5}{6}} \right) + 2k \right] \end{aligned}$$

Значение касательных напряжений в точке B получается переходом к пределу в (2.3), когда $\alpha \rightarrow \infty$. После несложных вычислений получаем

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \tau_{xz}^{(i)}|_{\beta=0} = 0 \quad (i=1, 2)$$

Очевидно, что при $G_1 = G_2 = G$ $\tau_{xz}^{(i)}$ на контуре принимают конечные значения.

А если $G_2 > G_1$ и $\beta_2 > \frac{\pi}{2}$ или, что то же самое $G_1 > G_2$ и $\beta_2 < \frac{\pi}{2}$, то в той же точке касательные напряжения имеют особенность. В частности, при $G_2 = 2G_1 = G$, $\beta_2 = \frac{2\pi}{3}$ имеем

$$\begin{aligned} \tau_{xz}^{(1)}|_{\beta=0} &= \frac{1}{2} \tau_{xz}^{(2)}|_{\beta=0} = \frac{G\theta a}{2} \left\{ -\frac{1}{\sqrt{3}} + \right. \\ &+ i(\operatorname{ch} \alpha + 1) \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda_k^2 \operatorname{cth} \frac{\lambda_k \pi}{3} \operatorname{ch} \frac{2\lambda_k \pi}{3} e^{i\lambda_k \alpha}}{\operatorname{ch} \lambda_k \pi \left(2 + 3 \operatorname{sh}^2 \frac{\lambda_k \pi}{3} \right)} + \right. \\ &+ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mu_k^2 \operatorname{cth} \frac{\mu_k \pi}{3} \operatorname{ch} \frac{2\mu_k \pi}{3} e^{i\mu_k \alpha}}{\operatorname{sh} \mu_k \pi \left(2 + \operatorname{sh}^2 \frac{\mu_k \pi}{3} \right)} + \\ &+ \frac{3}{2\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\nu_k \operatorname{ch} \frac{2\nu_k \pi}{3} (2 + i\nu_k \alpha) e^{i\nu_k \alpha}}{\operatorname{ch} \nu_k \pi} + \\ &\left. \left. + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\beta_k^2 \operatorname{cth} \frac{\beta_k \pi}{3} \operatorname{cth} \frac{2\beta_k \pi}{3} e^{i\beta_k \alpha}}{\operatorname{sh} \beta_k \pi} \right] \right\} \quad (2.4) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \lambda_k &= (3k+1)i, & \mu_k &= (3k+2)i \\ \nu_k &= 3ki, & \beta_k &= 3i \left[\frac{1}{\pi} \arcsin \left(\pm \sqrt{\frac{2}{3}} \right) + 2k \right] \end{aligned}$$

Переходя к пределу в (2.4), когда $\alpha \rightarrow \infty$, получаем особенность

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \tau_{xz}^{(i)}|_{\beta=0} = \infty \quad (i=1, 2)$$

Таким образом, в зависимости от отношений модулей сдвига G_1 , G_2 и величины угла β_2 в точке B может возникать нулевое, отличное от нулевого конечное или бесконечное напряжение.

3. Рассмотрим следующий случай $\beta_2 - \beta_1 = \frac{\pi}{2}$, когда напряжения около краев поверхности соединения конечны.

Для функции напряжений имеем следующие выражения:

$$U_1(x, \beta) = G_1 \theta a^2 \left\{ \frac{\cos \beta}{\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta} - 2 \operatorname{ctg} \beta_2 \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sh} z \beta_2 \operatorname{sh} z (\beta - \beta_1)}{\operatorname{sh} z \pi \operatorname{sh} \frac{z\pi}{2}} \cos z x dz + \frac{2(G_2 - G_1) \operatorname{ctg} \beta_1 - 4G_2 \operatorname{ctg} \beta_2}{G_1 + G_2} \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sh} z \beta_1 \operatorname{sh} z (\beta_2 - \beta)}{\operatorname{sh} z \pi \operatorname{sh} \frac{z\pi}{2}} \cos z x dz \right\} \\ (0 < x < \infty, \quad \beta_1 < \beta < \beta_2) \quad (3.1)$$

$$U_2(x, \beta) = G_2 \theta a^2 \left\{ \frac{\cos \beta}{\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta} - 2 \operatorname{ctg} \beta_2 \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sh} z (\beta_2 - \pi) \operatorname{sh} z (\beta_1 - \beta)}{\operatorname{sh} z \pi \operatorname{sh} \frac{z\pi}{2}} \cos z x dz + \frac{2(G_2 - G_1) \operatorname{cth} \beta_1 + 4G_1 \operatorname{ctg} \beta_2}{G_1 + G_2} \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sh} z \beta_1 \operatorname{sh} z (\beta_2 - \pi - \beta)}{\operatorname{sh} z \pi \operatorname{sh} \frac{z\pi}{2}} \cos z x dz \right\} \\ (0 < x < \infty, \quad \beta_2 - \pi < \beta < \beta_1) \quad (3.2)$$

Жесткость при кручении составного призматического стержня рассматриваемого сечения определяется формулой

$$C = \frac{4a^2}{\theta} \left[\int_{\beta_1}^{\beta_2} \int_0^{\infty} \frac{U_1(x, \beta) dx d\beta}{(\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta)^2} + \int_{\beta_2 - \pi}^{\beta_1} \int_0^{\infty} \frac{U_2(x, \beta) dx d\beta}{(\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta)^2} \right] \quad (3.3)$$

Подставив выражения (3.1) и (3.2) в (3.3) и произведя интегрирование, для определения жесткости при кручении получим следующую формулу:

$$C = \frac{G_2 \pi a^4}{2 \sin^4 \beta_2} + \frac{(G_2 - G_1) a^4}{2} \left[\frac{\beta + \sin \beta \cos \beta (2 \cos^2 \beta - 3)}{\sin^4 \beta} \right]_{\beta_2}^{\beta_1} +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{(G_2 - G_1) a^4}{\sin^2 \beta_1} (\operatorname{ctg} \beta_2 - \operatorname{ctg} \beta_1)^2 (\beta_1 - \sin \beta_1 \cos \beta_1) - \\
& - 4\pi a^4 \frac{(G_2 - G_1)}{G_1 + G_2} (\operatorname{ctg} \beta_2 - \operatorname{ctg} \beta_1)^2 \int_0^{\infty} \frac{z \operatorname{sh}^2 z \beta_1 \operatorname{ch} \frac{z\pi}{2}}{\operatorname{sh}^2 z \pi \operatorname{sh} \frac{z\pi}{2}} dz \quad (3.4)
\end{aligned}$$

В частности, положив в (3.4) $\beta_1 = 0$, получим жесткость на кручение составного круглого стержня, собранного из двух полуцилиндров [6].

Подставив (3.1) и (3.2) в выражение (1.15), получим формулы для определения касательных напряжений

$$\begin{aligned}
\tau_{\alpha z}^{(1)} = & G_1 \theta a^2 g \left[\frac{\operatorname{ch} \alpha \cos \beta}{(\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta)^2} + \right. \\
& + 2 \operatorname{ctg} \beta_2 \int_0^{\infty} \frac{z \operatorname{sh} z \beta_2 \operatorname{ch} z (\beta - \beta_1)}{\operatorname{sh} z \pi \operatorname{sh} \frac{z\pi}{2}} \cos z \alpha dz + \\
& \left. + \frac{2(G_2 - G_1) \operatorname{ctg} \beta_1 - 4G_2 \operatorname{ctg} \beta_2}{G_1 + G_2} \int_0^{\infty} \frac{z \operatorname{sh} z \beta_1 \operatorname{ch} z (\beta_2 - \beta)}{\operatorname{sh} z \pi \operatorname{sh} \frac{z\pi}{2}} \cos z \alpha dz \right] \quad (3.5) \\
\tau_{\alpha z}^{(2)} = & G_2 \theta a^2 g \left[-\frac{\operatorname{ch} \alpha \sin \beta}{(\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta)^2} + \right. \\
& + 2 \operatorname{ctg} \beta_2 \int_0^{\infty} \frac{z \operatorname{sh} z (\beta_2 - \pi) \operatorname{ch} z (\beta_1 - \beta)}{\operatorname{sh} z \pi \operatorname{sh} \frac{z\pi}{2}} \cos z \alpha dz - \\
& \left. - \frac{2(G_2 - G_1) \operatorname{ctg} \beta_1 + 4G_1 \operatorname{ctg} \beta_2}{G_1 + G_2} \int_0^{\infty} \frac{z \operatorname{sh} z \beta_1 \operatorname{ch} z (\beta_2 - \pi - \beta)}{\operatorname{sh} z \pi \operatorname{sh} \frac{z\pi}{2}} \cos z \alpha dz \right] \quad (3.6)
\end{aligned}$$

В частном случае, подставляя в (3.5) $\beta = \beta_2$, а в (3.6) $\beta = \beta_2 - \pi$, предельным переходом $\alpha \rightarrow \infty$ получим

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \tau_{\alpha z}^{(1)} \Big|_{\beta = \beta_2} = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \tau_{\alpha z}^{(2)} \Big|_{\beta = \beta_2 - \pi} = \frac{2G_1 G_2}{G_1 + G_2} \theta r_1$$

где

$$r_1 = \frac{a}{|\sin \beta_2|}$$

Таким образом, в зависимости от отношения модулей сдвига на крае поверхности контакта скручиваемого составного стержня возник-

кает касательное напряжение любой величины при одном и том же крутящем моменте.

Ниже приводится таблица, где даны значения касательных напряжений $r_1^3 \sigma_{\alpha z}^{(i)}/M$ ($i = 1, 2$) в характерных точках сечения и жесткость стержня на кручение для одного отношения модулей сдвига $G_2/G_1 = 2$ и $\beta_2 = \frac{\pi}{3}$, $\beta_1 = -\frac{\pi}{6}$

Таблица

$\beta = \frac{\pi}{3},$ $\alpha = 0$	$\beta = -\frac{2\pi}{3},$ $\alpha = 0$	$\beta = -\frac{\pi}{6} + 0,$ $\alpha = 0$	$\beta = -\frac{\pi}{6} - 0,$ $\alpha = 0$	$\beta = \frac{\pi}{3},$ $\alpha = \infty$	C/C_0
0.15814	0.56024	-0.23581	-0.47163	0.51398	0.82573

В однородных призматических стержнях, работающих на кручение, разрушение начинается на их боковой поверхности, где касательные напряжения имеют максимальное значение.

Результаты вычисления, приведенные в таблице, показывают, что при определенных формах поверхностей соединения и отношениях модулей сдвигов соединяемых материалов, максимальное касательное напряжение при одном и том же скручивающем моменте и одинаковых размерах поперечного сечения в составном стержне меньше, чем в однородном.

Таким образом, заменой части материала поверхностной зоны стержня более податливым можно увеличить его прочность и механическую выносливость, если близки пределы прочности вспомогательного и основного материалов составного скручиваемого стержня.

Институт механики АН Армянской ССР

Поступила 21 VI 1971

Լ. Ա. ԱՐՄԻՅԱՆԻԱՆ, Կ. Ս. ՉՈԲԱՆՅԱՆ

ԲԱՂԱԳՐՅԱԿ ԿՆՐ ՁՈՂԻ ՈՒՐՈՒՄԸ

Ա մ փ ո փ ո ս մ

Աշխատանքում ստացված է փակ լուծում բաղադրյալ կլոր ձողի ոլորման խնդրի համար, երբ նյութերի բաժանման դիժը հանդիսանում է շրջանային աղեղ:

Ուսումնասիրված է լարումների վարքը նյութերի միացման մակերևույթի եզրի վրա՝ բաժանման և կողմնային մակերևույթների կաղմած անկյան սահմանային արժեքների դեպքում:

Քվանդին օրինակով ցույց է տրված, որ նյութի առաձգական հատկությունից կախված միևնույն ոլորող մոմենտի դեպքում շրջափող լարումների մար-

սիմուլը կարելի է փոքրացնել, համեմատած նույն ընդլայնական կտրվածք ունեցող համասեռ ձողի հետ:

ON TORSION OF A CIRCULAR COMPOSITE ROD

L. A. HARUTIUNIAN, K. S. CHOBANIAN

S u m m a r y

A closed solution for the torsion problem of a composite circular rod of constant cross-section with a division line, forming a circle arch, between the regions corresponding to different materials, is obtained.

The behaviour of stresses in the vicinity of the point of intersection of the division line with the cross-section contour of the rod under torsion for the limit angle between its side surface and the division surface is studied.

A numerical example is presented to show that under one and the same torque the maximum tangential stress for the composite rod under torsion with specified combinations of the materials to be bound together will be smaller than the corresponding stress for a homogeneous rod of identical dimensions.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. Изд. „Наука“, М., 1966.
2. Арутюнян Н. Х., Абрамян Б. А. Кручение упругих тел. Физматгиз, М., 1963.
3. Weber C. Die Lehre der Drehungsfestigkeit. Forschungsarbeiten Ing.—wes. H. 249, 1921.
4. Уфлянд Я. С. Биполярные координаты в теории упругости. Госиздат, М.—Л., 1950.
5. Чобанян К. С. Применение функции напряжений в задаче о кручении призматических стержней, составленных из различных материалов. Изв. АН Арм. ССР, сер. физ.-мат., ест. и техн. наук, т. VII, № 2, 1955.
6. Арутюнян А. А. Некоторые задачи кручения составных стержней. Изв. АН Арм. ССР, Механика, т. XXIV, № 1, 1971.
7. Градштейн И. С. и Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Физматгиз, М., 1962.