

Р. А. МЕЖЛУМЯН, Р. Ш. СОЛОМОНЯН

## НЕСТАЦИОНАРНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕННЫЕ НАГРУЗКИ НА КРЫЛЕ, ИМЕЮЩЕМ ПРОИЗВОЛЬНУЮ ФОРМУ В ПЛАНЕ, ПРИ СВЕРХЗВУКОВОМ ДВИЖЕНИИ

Вопросу определения нестационарных аэродинамических характеристик крыльев посвящено много работ [1—6] и др. В работе [1] дано решение этой задачи в общем виде в линейной постановке, когда крыло имеет произвольную форму в плане. В работах [2—3] аэродинамические характеристики и граничные условия на крыле представляются при помощи коэффициентов вращательных производных (КВП), что дает возможность расчет аэродинамических сил и моментов довести до замкнутых формул. Для крыльев шестиугольной, четырехугольной и треугольной форм в плане такие формулы получены в работе [6]. В настоящей работе рассматривается крыло, имеющее произвольную форму в плане и сверхзвуковые кромки. При помощи замены кромок ломаной линией удастся получить замкнутые формулы для распределенных нагрузок на крыле.

**1. Постановка задачи.** Рассмотрим движение тонкого слабоизогнутого крыла с малым углом атаки и с некоторым конечным углом скольжения  $\beta_0$  в идеальной сжимаемой жидкости при отсутствии внешних сил. Будем считать, что основное движение крыла является прямолинейным поступательным с постоянной сверхзвуковой скоростью  $U$ . Предположим также, что, кроме основного движения, крыло совершает малые добавочные неустановившиеся колебания. Движение жидкости считаем безвихревым.

Введем систему координат  $Ox_1y_1z_1$ , жестко скрепленную с крылом, которое в плане имеет форму  $A_0A_1A_2 \dots A_l \dots A_N$  (фиг. 1). Ось  $Oz_1$  направлена вверх. Время обозначим через  $t_1$ .

В линейной теории эта задача сводится к определению потенциала возмущений, которое получается решением волнового уравнения [1].

Потенциал возмущенных скоростей  $\psi(x_1, y_1, z_1, t_1)$  и нестационарные распределенные нагрузки представим при помощи коэффициентов вращательных производных [2, 6, 7]

$$\psi(x_1, y_1, z_1, t_1) = \psi_0(x_1, y_1, z_1) + \psi_1^{(1)} q_1 + \psi_1^{(2)} \dot{q}_1 + \psi_3^{(1)} q_3 + \psi_3^{(2)} \dot{q}_3 + \psi_4^{(1)} q_4 + \psi_4^{(2)} \dot{q}_4 \quad (1.1)$$

$$p = \frac{2(p_u - p_n)}{U^2 \rho} = p_1^{(1)} q_1 + p_1^{(2)} \dot{q}_1 + p_3^{(1)} q_3 + p_3^{(2)} \dot{q}_3 + p_4^{(1)} q_4 + p_4^{(2)} \dot{q}_4 \quad (1.2)$$

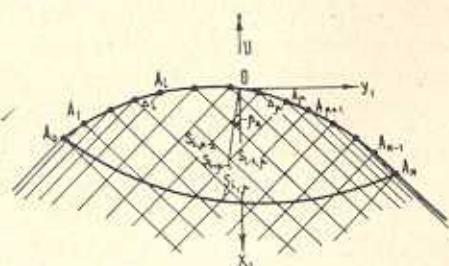
Функция  $\psi_0$  соответствует основному установившемуся движению крыла,  $p_n$  и  $p_v$  — давления соответственно нижней и верхней поверхностей крыла,  $\rho$  — плотность воздуха в невозмущенном потоке. В представлении (1.1) и (1.2) введены обозначения

$$q_1 = \alpha = \alpha(t_1), \quad q_3 = \omega_{x_1} = \frac{\Omega_{x_1}(t_1) b}{U}, \quad q_4 = \omega_{y_1} = \frac{\Omega_{y_1}(t_1) b}{U} \quad (1.3)$$

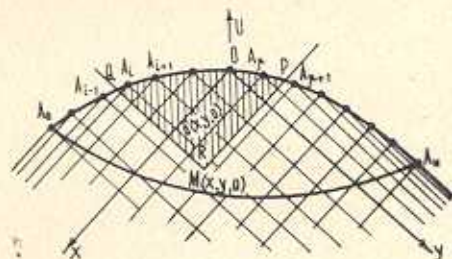
$$\dot{q}_1 = \dot{\alpha} = \frac{d\alpha}{dt_1} \frac{b}{U}, \quad \dot{q}_3 = \dot{\omega}_{x_1} = \frac{d\Omega_{x_1}}{dt_1} \frac{b^2}{U^2}, \quad \dot{q}_4 = \dot{\omega}_{y_1} = \frac{d\Omega_{y_1}}{dt_1} \frac{b^2}{U^2}$$

где  $\alpha$  — переменная часть угла атаки,  $\Omega_{x_1}$ ,  $\Omega_{y_1}$  — проекция вектора угловой скорости на соответствующие оси связанной системы координат  $\dot{\alpha}$ ,  $\omega_{x_1}$ ,  $\omega_{y_1}$  — безразмерные угловые скорости,  $\dot{\omega}_{x_1}$ ,  $\dot{\omega}_{y_1}$  — безразмерные угловые ускорения.

Предполагается, что эти параметры являются малыми величинами по сравнению с единицей.



Фиг. 1



Фиг. 2

Коэффициенты при кинематических параметрах  $q_v$  и  $\dot{q}_v$  ( $v=1, 3, 4$ ) являются функциями от чисел Маха и Струхала, а также координат точки, в которой вычисляются потенциал и давление, и не зависят от времени.

Введем безразмерные координаты и время

$$\bar{x} = \frac{2}{lk} x_1, \quad \bar{y} = \frac{2}{l} y_1, \quad \bar{z} = \frac{2}{l} z_1, \quad t = \frac{U}{b} t_1$$

Предполагая, что малые добавочные колебания крыло совершает по гармоническому закону, для единичных потенциалов получаются замкнутые формулы [7], которые выглядят так:

$$\begin{aligned} \Phi_v^{(1)}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = & -\frac{1}{\pi} \iint_{l(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})} \left\{ \left[ \frac{\partial \Phi_v^{(1)}}{\partial \bar{z}} \right]_{\bar{z}=0} \times \right. \\ & \times \cos \left[ \omega \left( k + \frac{1}{k} \right) (\bar{x} - \bar{\xi}) \right] + \frac{4}{k} \omega \left[ \frac{\partial \Phi_v^{(2)}}{\partial \bar{z}} \right]_{\bar{z}=0} \times \\ & \times \sin \left[ \omega \left( k + \frac{1}{k} \right) (\bar{x} - \bar{\xi}) \right] \left. \right\} \cos \left[ \frac{\omega}{k^2} \sqrt{k^2 + 1} r \right] \frac{d\bar{\xi} d\bar{\eta}}{r} \quad (1.4) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \Phi_v^{(2)}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = & -\frac{1}{\pi} \iint_{\delta(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})} \left[ \frac{\partial \Phi_v^{(2)}}{\partial z} \right]_{\bar{z}=0} \times \\ & \times \cos \left[ \omega \left( k + \frac{1}{k} \right) (\bar{x} - \bar{\xi}) \right] - \frac{\lambda}{4\omega} \left| \frac{\partial \Phi_v^{(1)}}{\partial z} \right| \times \\ & \times \sin \left[ \omega \left( k + \frac{1}{k} \right) (\bar{x} - \bar{\xi}) \right] \left\{ \cos \left[ \frac{\omega}{k^2} \sqrt{k^2 + 1} \bar{r} \right] \frac{d\bar{\xi} d\bar{\eta}}{\bar{r}} \right. \end{aligned} \quad (1.5)$$

где  $\omega = \frac{\lambda}{4} p_v^*$ ,  $\bar{r} = V \sqrt{(\bar{x} - \bar{\xi})^2 - (\bar{y} - \bar{\eta})^2 - \bar{z}^2}$ ,  $\lambda = \frac{l^2}{S}$  — относительное удлинение,  $S, l$  — площадь и размах крыла,  $k = \sqrt{M^2 - 1}$ ,  $M = \frac{U}{a}$  — число Маха,  $\delta(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$  — часть плоскости  $\bar{x}\bar{y}$ , которая находится внутри обратного конуса возмущений с вершиной в рассматриваемой точке,  $p_v^*$  — число Струхаля.

В формулах (1.4) и (1.5) введены обозначения

$$\begin{aligned} \Phi_v^{(i)}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \frac{2}{lU} \psi_v^{(i)}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}), \quad \frac{\partial \Phi_v^{(i)}}{\partial z} = \frac{2}{lU} \frac{\partial \psi_v^{(i)}}{\partial z} \\ (i = 1, 2; \nu = 1, 3, 4) \end{aligned} \quad (1.6)$$

Как видно из равенств (1.4) и (1.5) при известных нормальных производных  $\frac{\partial \Phi_v^{(i)}}{\partial z}$  на области интегрирования, можно будет вычислить функции  $\Phi_v^{(i)}$ .

Если область интегрирования будет полностью расположена на поверхности крыла, то нормальные производные в этой области будут известны из условия плавного обтекания крыла.

Обозначим

$$\left[ \frac{\partial \Phi_v^{(i)}}{\partial z} \right]_{\bar{z}=0} = B_v^{(i)}(\bar{x}, \bar{y}) \quad (i = 1, 2; \nu = 1, 3, 4)$$

Функции  $B_v^{(i)}$  имеют вид [3]

$$\begin{aligned} B_1^{(1)}(\bar{x}, \bar{y}) = -1, \quad B_3^{(1)}(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{\lambda \bar{y}}{4}, \quad B_4^{(1)}(\bar{x}, \bar{y}) = -\frac{\lambda k \bar{x}}{4} \\ B_v^{(2)}(\bar{x}, \bar{y}) = 0 \quad (\nu = 1, 3, 4) \end{aligned} \quad (1.7)$$

Впереди огибающей поверхности конусов возмущений с вершинами в точках передней кромки крыла, потенциал возмущений и нормальная производная на плоскости  $\bar{x}\bar{y}$  равны нулю

$$\Phi_v^{(i)}(\bar{x}, \bar{y}, 0) = 0, \quad \left[ \frac{\partial \Phi_v^{(i)}}{\partial z} \right]_{\bar{z}=0} = 0 \quad (1.8)$$

Так как кромки крыла предполагаются сверхзвуковыми, то для точек на крыле область интегрирования будет полностью расположена на поверхности крыла и потенциал возмущений определяется непосредственным интегрированием по формулам (1.4) и (1.5), подставляя вместо нормальных производных их значения из формул (1.7).

В случае гармонического колебания крыла распределенные нагрузки получаются в виде

$$p_v^{(1)}(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{4}{k} \left[ \frac{\partial \Phi_v^{(1)}(\bar{x}, \bar{y}, 0)}{\partial \bar{x}} - \frac{\lambda k}{4} p_v^* \Phi_v^{(2)}(\bar{x}, \bar{y}, 0) \right] \quad (1.9)$$

$$p_v^{(2)}(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{4}{k} \left[ \frac{\partial \Phi_v^{(2)}(\bar{x}, \bar{y}, 0)}{\partial \bar{x}} + \frac{\lambda k}{4} \Phi_v^{(1)}(\bar{x}, \bar{y}, 0) \right] \quad (1.10)$$

Если подставить значения потенциалов из (1.4) и (1.5) в выражения (1.9) и (1.10), то получатся коэффициенты вращательных производных распределенных нагрузок  $p_v^{(1)}$  и  $p_v^{(2)}$ . Но вычисление потенциалов возмущений по формулам (1.4) и (1.5) весьма сложно.

Расчет упрощается в случае малых чисел Струхала ( $p_v^* \rightarrow 0$ ), что имеет практическое значение. Тогда для точек на поверхности крыла вместо (1.9) и (1.10) получатся выражения

$$p_v^{(1)}(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{4}{k} \frac{\partial \Phi_v^{(1)}(\bar{x}, \bar{y}, 0)}{\partial \bar{x}} \quad (1.11)$$

$$p_v^{(2)}(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{4}{k} \left[ \frac{\partial \Phi_v^{(2)}(\bar{x}, \bar{y}, 0)}{\partial \bar{x}} + \frac{\lambda k}{4} \Phi_v^{(1)}(\bar{x}, \bar{y}, 0) \right] \quad (1.12)$$

вместо выражений (1.4) и (1.5) для тех же точек получатся

$$\Phi_v^{(1)}(\bar{x}, \bar{y}, 0) = -\frac{1}{\pi} \iint_{\bar{y}(\bar{x}, \bar{y}, 0)} B_v^{(1)}(\bar{\xi}, \bar{\eta}) \frac{d\bar{\xi} d\bar{\eta}}{r} \quad (1.13)$$

$$\begin{aligned} \Phi_v^{(2)}(\bar{x}, \bar{y}, 0) = & -\frac{1}{\pi} \iint_{\bar{y}(\bar{x}, \bar{y}, 0)} \left\{ B_v^{(2)}(\bar{\xi}, \bar{\eta}) - \right. \\ & \left. - \frac{\lambda}{4} \left( k + \frac{1}{k} \right) (\bar{x} - \bar{\xi}) B_v^{(1)}(\bar{\xi}, \bar{\eta}) \right\} \frac{d\bar{\xi} d\bar{\eta}}{r} \end{aligned} \quad (1.14)$$

**2. Вычисление потенциалов возмущенных скоростей.** Для дальнейших расчетов удобно вводить безразмерные характеристические координаты

$$x = \bar{x} - \bar{y}, \quad y = \bar{x} + \bar{y}, \quad z = \bar{z} \quad (2.1)$$

Не нарушая общности, предположим, что задняя кромка крыла состоит из одного прямолинейного отрезка. Обозначим вершины пе-



редней кромки и отметим координаты, начиная с левой концевой точки:  $A_0(x_0, y_0)$ ,  $A_1(x_1, y_1)$ , ...,  $A_i(x_i, y_i)$ , ...,  $A_n(x_n, y_n)$ , ...,  $A_N(x_N, y_N)$ .

Часть плоскости  $xy$ , где расположена проекция поверхности крыла, разделяется на области треугольного, прямоугольного и трапециевидального видов (фиг. 2). Трапециевидальные области образуются у задней кромки крыла, которые в общем случае имеют одну криволинейную сторону (дуга задней кромки крыла).

Прямоугольная область  $s_{i, n}$  расположена внутри конусов возмущений с вершинами в точках  $A_i$  и  $A_n$  и вне конусов возмущений с вершинами в точках  $A_{i-1}$  и  $A_{n+1}$ . Треугольная область  $\Delta_i$  расположена на поверхности крыла вне конусов возмущений с вершинами в точках  $A_{i-1}$  и  $A_i$ .

Пусть уравнение отрезка  $A_{i-1}A_i$  будет

$$y = \varphi_i(x) = -\alpha_i^2 x - \beta_i^2 \quad (2.2)$$

или решенное относительно переменной  $x$

$$x = \bar{\varphi}_i(y) = -\gamma_i^2 y - \delta_i^2 \quad (2.2')$$

где

$$\gamma_i^2 = \frac{1}{\alpha_i^2}, \quad \delta_i^2 = \frac{\beta_i^2}{\alpha_i^2}$$

Все эти коэффициенты являются функциями числа Маха и геометрии крыла.

Предположим, что точка  $M(x, y, 0)$ , в которой вычисляется потенциал возмущений, расположена на поверхности крыла в прямоугольнике  $s_{i, n}$ . Проведем из этой точки обратный конус возмущений. Тогда область интегрирования  $\delta(x, y, 0)$  в формулах (1.13) и (1.14) будет состоять из суммы всех треугольных, прямоугольных областей (целиком попадающие в обратный конус Маха, проведенный из точки  $M$ ), областей  $s'_{i, m}$ ,  $s'_{n, \mu}$ ,  $\Delta'_i$  и  $\Delta'_{\mu+1}$ , где штрихи над символами означают части областей соответственно  $s_{i, m}$ ,  $s_{n, \mu}$ ,  $\Delta_i$  и  $\Delta_{\mu+1}$ .

Таким образом

$$\delta(x, y, 0) = \sum_{n=i}^{\mu} \sum_{m=n}^{\mu} s_{n, m} + \sum_{n=i+1}^{\mu} \Delta_n + \Delta'_i + \Delta'_{\mu+1} + \sum_{n=i}^{\mu-1} s'_{n, \mu} + \sum_{m=i}^{\mu} s'_{i, m} \quad (2.3)$$

Последние четыре члена в сумме (2.3) дают область, ограниченную ломаной линией  $MQA_iRA_nPM$  (фиг. 2).

Здесь  $i$ —номер первой из вершин передней кромки, попавших внутрь обратного конуса с вершиной в точке  $M(x, y, 0)$ , а  $j$ —число вершин передней кромки, попавших в тот же конус. Очевидно, что номер крайней справа вершины передней кромки, попавшей в вышеуказанный конус, будет  $\mu = i + j$ .

Интервалы изменения переменных в областях будут соответственно

$$\begin{aligned}
 s_{n,m}; \quad x_n \leq \xi \leq x_{n-1}, \quad y_m \leq \eta \leq y_{m+1}; \quad \Delta_n; \quad x_n \leq \xi \leq x_{n-1}, \quad \varphi_n(\xi) \leq \eta \leq y_n; \\
 s'_{l,m}; \quad x_l \leq \xi \leq x, \quad y_m \leq \eta \leq y_{m+1}; \quad s'_{l,\mu}; \quad x_l \leq \xi \leq x, \quad y_\mu \leq \eta \leq y; \\
 s'_{n,\mu}; \quad x_n \leq \xi \leq x_{n-1}, \quad y_\mu \leq \eta \leq y; \quad \Delta'_j; \quad x_l \leq \xi \leq x; \quad \varphi_l(\xi) \leq \eta \leq y_l; \\
 \Delta'_{\mu+1}; \quad \bar{\varphi}_{\mu+1}(y) \leq \xi \leq x_\mu, \quad \varphi_{\mu+1}(\xi) \leq \eta \leq y.
 \end{aligned}$$

Если в формулы (1.13) и (1.14) подставить значения функций  $B_n^{(l)}(x, y)$  из условий (1.7), то, с учетом выражения области интегрирования (2.3), для единичных потенциалов получим выражения

$$\begin{aligned}
 \Phi_1^{(l)}(x, y, 0) = \frac{1}{2\pi} \left\{ \sum_{n=l}^{\mu} \sum_{m=n}^{\mu} G_{0,0}(s_{n,m}) + \sum_{n=l+1}^{\mu} G_{0,0}(\Delta_n) + \sum_{m=l}^{\mu} G_{0,0}(s'_{l,m}) + \right. \\
 \left. + G_{0,0}(s'_{l,\mu}) + G_{0,0}(\Delta'_j) + G_{0,0}(\Delta'_{\mu+1}) + \sum_{n=l}^{\mu} G_{0,0}(s'_{n,\mu}) \right\} \quad (2.4)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Phi_3^{(l)}(x, y, 0) = \frac{\lambda}{8} (x - y) \Phi_1^{(l)}(x, y, 0) - \\
 - \frac{\lambda}{16\pi} \left\{ \sum_{n=l}^{\mu} \sum_{m=n}^{\mu} [G_{1,0}(s'_{n,m}) - G_{0,1}(s_{n,m})] + \right. \\
 \left. + \sum_{n=l+1}^{\mu} [G_{1,0}(\Delta_n) - G_{0,1}(\Delta_n)] + \right. \\
 \left. + \sum_{m=l}^{\mu} [G_{1,0}(s'_{l,m}) - G_{0,1}(s'_{l,m})] + G_{1,0}(s'_{l,\mu}) - \right. \\
 \left. - G_{0,1}(s'_{l,\mu}) + G_{1,0}(\Delta'_j) - G_{0,1}(\Delta'_j) + G_{1,0}(\Delta'_{\mu+1}) - G_{0,1}(\Delta'_{\mu+1}) + \right. \\
 \left. + \sum_{n=l}^{\mu} [G_{1,0}(s'_{n,\mu}) - G_{0,1}(s'_{n,\mu})] \right\} \quad (2.5)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Phi_4^{(l)}(x, y, 0) = \frac{\lambda k}{8} (x + y) \Phi_1^{(l)}(x, y, 0) - \\
 - \frac{\lambda k}{16\pi} \left\{ \sum_{n=l}^{\mu} \sum_{m=n}^{\mu} [G_{1,0}(s_{n,m}) + G_{0,1}(s_{n,m})] + \right. \\
 \left. + \sum_{n=l+1}^{\mu} [G_{1,0}(\Delta_n) + G_{0,1}(\Delta_n)] + \right. \\
 \left. + \sum_{m=l}^{\mu} [G_{1,0}(s'_{l,m}) + G_{0,1}(s'_{l,m})] + G_{1,0}(s'_{l,\mu}) + \right.
 \end{aligned}$$

$$+ G_{0,1}(s'_{i,\mu}) + G_{1,0}(\Delta'_{\mu+1}) + G_{0,1}(\Delta'_{\mu+1}) + G_{1,0}(\Delta'_i) + G_{0,1}(\Delta'_i) + \\ + \sum_{n=i}^{\mu} [G_{1,0}(s'_{n,\mu}) + G_{0,1}(s'_{n,\mu})] \Big\} \quad (2.6)$$

$$\Phi_1^{(2)}(x, y, 0) = \frac{\lambda}{8} \left( k + \frac{1}{k} \right) \left\{ -(x+y) \Phi_1^{(1)}(x, y, 0) + \right. \\ \left. + \frac{4}{\lambda k} \Phi_4^{(1)}(x, y, 0) \right\} \quad (2.7)$$

$$\Phi_3^{(2)}(x, y, 0) = \frac{1}{8} (x-y) \Phi_1^{(2)}(x, y, 0) + \\ + \frac{\lambda}{128\pi} \left\{ \sum_{n=i}^{\mu} \sum_{m=n}^{\mu} [G_{2,0}(s_{n,m}) - G_{0,2}(s_{n,m})] + \right. \\ \left. + \sum_{n=i+1}^{\mu} [G_{2,0}(\Delta_n) - G_{0,2}(\Delta_n)] + \right. \\ \left. + \sum_{m=i}^{\mu} [G_{2,0}(s'_{i,m}) - G_{0,2}(s'_{i,m})] + G_{2,0}(s'_{i,\mu}) - \right. \\ \left. - G_{0,2}(s'_{i,\mu}) + G_{2,0}(\Delta'_i) - G_{0,2}(\Delta'_i) + G_{2,0}(\Delta'_{\mu+1}) - G_{0,2}(\Delta'_{\mu+1}) + \right. \\ \left. + \sum_{n=i}^{\mu} [C_{2,0}(s'_{n,\mu}) - G_{0,2}(s'_{n,\mu})] \right\} \quad (2.8)$$

$$\Phi_4^{(2)}(x, y, 0) = \frac{1}{8} (x+y) \Phi_1^{(2)}(x, y, 0) + \\ + \frac{\lambda k}{128\pi} \left\{ \sum_{n=i}^{\mu} \sum_{m=n}^{\mu} [G_{2,0}(s_{n,m}) + 2G_{1,1}(s_{n,m}) + G_{0,2}(s_{n,m})] + \right. \\ \left. + \sum_{n=i+1}^{\mu} [G_{2,0}(\Delta_n) + 2G_{1,1}(\Delta_n) + G_{0,2}(\Delta_n)] + \right. \\ \left. + \sum_{m=i}^{\mu} [G_{2,0}(s'_{i,m}) + 2G_{1,1}(s'_{i,m}) + G_{0,2}(s'_{i,m})] + \right. \\ \left. + G_{2,0}(s'_{i,\mu}) + 2G_{1,1}(s'_{i,\mu}) + G_{0,2}(s'_{i,\mu}) + G_{2,0}(\Delta'_i) + \right. \\ \left. + 2G_{1,1}(\Delta'_i) + G_{0,2}(\Delta'_i) + G_{2,0}(\Delta'_{\mu+1}) + 2G_{1,1}(\Delta'_{\mu+1}) + G_{0,2}(\Delta'_{\mu+1}) + \right. \\ \left. + \sum_{n=i}^{\mu} [G_{2,0}(s'_{n,\mu}) + 2G_{1,1}(s'_{n,\mu}) + G_{0,2}(s'_{n,\mu})] \right\} \quad (2.9)$$



В формулах (2.4) и (2.9) введены обозначения

$$G_{p,q}(\sigma) = G_{p,q}(x, y, \sigma) = \int_0^1 \int_0^1 (x - \xi)^{p-1/2} (y - \eta)^{q-1/2} d\xi d\eta \quad (2.10)$$

Область  $\sigma$  представляет собой одну из областей  $s_{n,m}$ ,  $\Delta_n$ ,  $s'_{i,p}$ ,  $\Delta'_i$ ,  $\Delta'_{p+1}$ ,  $s'_{n,p}$ . Так как контур крыла заменен ломаной линией, то все эти области интегрирования будут иметь прямолинейные контуры, что дает возможность вычислить интеграл (2.10) и формулы единичных потенциалов (2.4)–(2.9) представить в замкнутом виде. В результате выполнения интегрирования находим

$$G_{0,0}(s_{n,m}) = 4(X_{n-1} - X_n)(Y_{m+1} - Y_m)$$

$$G_{1,0}(s_{n,m}) = \frac{4}{3}(X_{n-1}^3 - X_n^3)(Y_{m+1} - Y_m)$$

$$G_{0,1}(s_{n,m}) = \frac{4}{3}(X_{n-1} - X_n)(Y_{m+1}^3 - Y_m^3)$$

$$G_{1,1}(s_{n,m}) = \frac{4}{9}(X_{n-1}^3 - X_n^3)(Y_{m+1}^3 - Y_m^3)$$

$$G_{2,0}(s_{n,m}) = \frac{4}{5}(X_{n-1}^5 - X_n^5)(Y_{m+1} - Y_m)$$

$$G_{0,2}(s_{n,m}) = \frac{4}{5}(X_{n-1} - X_n)(Y_{m+1}^5 - Y_m^5)$$

$$G_{0,0}(s'_{i,m}) = -4X_i(Y_{m+1} - Y_m)$$

$$G_{1,0}(s'_{i,m}) = -\frac{4}{3}X_i^3(Y_{m+1} - Y_m)$$

$$G_{0,1}(s'_{i,m}) = -\frac{4}{3}X_i(Y_{m+1}^3 - Y_m^3)$$

$$G_{1,1}(s'_{i,m}) = -\frac{4}{9}X_i^3(Y_{m+1}^3 - Y_m^3)$$

$$G_{2,0}(s'_{i,m}) = -\frac{4}{5}X_i^5(Y_{m+1} - Y_m)$$

$$G_{0,2}(s'_{i,m}) = -\frac{4}{5}X_i(Y_{m+1}^5 - Y_m^5)$$

$$G_{0,0}(s'_{i,p}) = 4X_i Y_p; \quad G_{1,0}(s'_{i,p}) = \frac{4}{3}X_i^3 Y_p$$



$$G_{0,1}(s'_{l,\mu}) = \frac{4}{3} X_l Y_\mu^3; \quad G_{1,1}(s'_{l,\mu}) = \frac{4}{9} X_l^3 Y_\mu^3$$

$$G_{2,0}(s'_{l,\mu}) = \frac{4}{5} X_l^5 Y_\mu; \quad G_{0,2}(s'_{l,\mu}) = \frac{4}{5} X_l Y_\mu^5$$

$$G_{0,0}(s'_{n,\mu}) = -4(X_{n-1} - X_n) Y_\mu$$

$$G_{1,0}(s'_{n,\mu}) = -\frac{4}{3} (X_{n-1}^3 - X_n^3) Y_\mu$$

$$G_{0,1}(s'_{n,\mu}) = -\frac{4}{3} (X_{n-1} - X_n) Y_\mu^3$$

$$G_{1,1}(s'_{n,\mu}) = -\frac{4}{9} (X_{n-1}^3 - X_n^3) Y_\mu^3$$

$$G_{2,0}(s'_{n,\mu}) = -\frac{4}{5} (X_{n-1}^5 - X_n^5) Y_\mu$$

$$G_{0,2}(s'_{n,\mu}) = -\frac{4}{5} (X_{n-1} - X_n) Y_\mu^5$$

$$G_{0,0}(\Delta_n) = 4(X_{n-1} - X_n) Y_n - 2H_n^{(1,1)}(x, y) + \frac{f(n)}{\alpha_n} [\psi_n(x_{n-1}) - \psi_n(x_n)]$$

$$G_{1,0}(\Delta_n) = \frac{4}{3} (X_{n-1}^3 - X_n^3) Y_n + \frac{f(n)}{2\alpha_n^2} H_n^{(1,1)}(x, y) - \\ - H_n^{(3,1)}(x, y) - \frac{f^2(n)}{4\alpha_n^3} [\psi_n(x_{n-1}) - \psi_n(x_n)]$$

$$G_{0,1}(\Delta_n) = \frac{4}{3} (X_{n-1} - X_n) Y_n^3 - \frac{1}{3} H_n^{(1,3)}(x, y) -$$

$$- \frac{1}{2} f(n) H_n^{(1,1)}(x, y) + \frac{f(n)}{4\alpha_n} [\psi_n(x_{n-1}) - \psi_n(x_n)]$$

$$G_{1,1}(\Delta_n) = \frac{4}{9} (X_{n-1}^3 - X_n^3) Y_n^3 + \frac{2}{9\alpha_n^2} H_n^{(1,5)}(x, y) +$$

$$+ \frac{f(n)}{18\alpha_n^2} H_n^{(1,3)}(x, y) + \frac{f^2(n)}{12\alpha_n^2} H_n^{(1,1)}(x, y) - \frac{f^3(n)}{24\alpha_n^3} [\psi_n(x_{n-1}) - \psi_n(x_n)]$$

$$G_{2,0}(\Delta_n) = \frac{4}{5} (X_{n-1}^5 - X_n^5) Y_n - \frac{2}{3} H_n^{(5,1)}(x, y) - \frac{f(n)}{6\alpha_n^2} H_n^{(3,1)}(x, y) -$$

$$- \frac{f^2(n)}{4\alpha_n^4} H_n^{(1,1)}(x, y) - \frac{f^3(n)}{8\alpha_n^5} [\psi_n(x_{n-1}) - \psi_n(x_n)]$$

$$G_{0,2}(\Delta_n) = \frac{4}{5}(X_{n-1} - X_n) Y_n^5 - \frac{2}{15} H_n^{(1,5)}(x, y) - \\ - \frac{1}{2} f(n) H_n^{(1,3)}(x, y) + \frac{3}{4} f^2(n) H_n^{(1,1)}(x, y) - \\ - \frac{3}{8} \frac{f^3(n)}{a_n} [\psi_n(x_{n-1}) - \psi_n(x_n)]$$

$$G_{0,0}(\Delta'_i) = -4X_i Y_i + 2X_i F(i, i) + \frac{f(i)}{a_i} \left[ \frac{\pi}{2} - \psi_i(x_i) \right]$$

$$G_{1,0}(\Delta'_i) = -\frac{4}{3} X_i^3 Y_i - \left[ \frac{f(i)}{2a_i^2} - X_i^2 \right] X_i F(i, i) - \\ - \frac{f^2(i)}{4a_i^3} \left[ \frac{\pi}{2} - \psi_i(x_i) \right]$$

$$G_{0,1}(\Delta'_i) = -\frac{4}{3} X_i Y_i^3 + \frac{1}{3} X_i F^3(i, i) + \\ + \frac{1}{2} f(i) X_i F(i, i) + \frac{f(i)}{4a_i} \left[ \frac{\pi}{2} - \psi_i(x_i) \right]$$

$$G_{1,1}(\Delta'_i) = -\frac{4}{9} X_i^3 Y_i^3 - \frac{2}{9a_i^2} X_i F^3(i, i) - \frac{f(i)}{18a_i^2} X_i F^3(i, i) - \\ - \frac{f^2(i)}{12a_i^2} X_i F(i, i) - \frac{f^3(i)}{24a_i^3} \left[ \frac{\pi}{2} - \psi_i(x_i) \right]$$

$$G_{2,0}(\Delta'_i) = -\frac{4}{5} X_i^5 Y_i + \frac{2}{3} X_i F^5(i, i) + \frac{f(i)}{6a_i^2} X_i^3 F(i, i) + \\ + \frac{f^2(i)}{4a_i^3} X_i F(i, i) - \frac{f^3(i)}{8a_i^3} \left[ \frac{\pi}{2} - \psi_i(x_i) \right]$$

$$G_{0,2}(\Delta'_i) = -\frac{4}{5} X_i Y_i^5 + \frac{2}{15} X_i F^5(i, i) + \frac{1}{2} f(i) X_i F^3(i, i) - \\ - \frac{3}{4} f^2(i) X_i F(i, i) - \frac{3f^3(i)}{8a_i} \left[ \frac{\pi}{2} - \psi_i(x_i) \right]$$

$$G_{0,0}(\Delta'_{\mu+1}) = -2X_\mu F(\mu+1, \mu) + \frac{f(\mu+1)}{a_{\mu+1}} \left[ \frac{\pi}{2} + \psi_{\mu+1}(x_\mu) \right]$$

$$G_{1,0}(\Delta'_{\mu+1}) = \left[ \frac{f(\mu+1)}{2a_{\mu+1}^2} - X_\mu^2 \right] F(\mu+1, \mu) X_\mu - \\ - \frac{f^2(\mu+1)}{4a_{\mu+1}^3} \left[ \frac{\pi}{2} + \psi_{\mu+1}(x_\mu) \right]$$



$$G_{0,1}(\Delta'_{\mu+1}) = -\frac{1}{3} X_{\mu} F^3(\mu+1, \mu) - \frac{1}{2} f(\mu+1) X_{\mu} F(\mu+1, \mu) + \\ + \frac{f(\mu+1)}{4\alpha_{\mu+1}} \left[ \frac{\pi}{2} + \psi_{\mu+1}(x_{\mu}) \right]$$

$$G_{1,1}(\Delta'_{\mu+1}) = \frac{2}{9\alpha_{\mu+1}^2} X_{\mu} f^3(\mu+1, \mu) + \frac{f(\mu+1)}{18\alpha_{\mu+1}^2} X_{\mu} F^3(\mu+1, \mu) + \\ + \frac{f^2(\mu+1)}{12\alpha_{\mu+1}^2} X_{\mu} F(\mu+1, \mu) - \frac{f^3(\mu+1)}{24\alpha_{\mu+1}^3} \left[ \frac{\pi}{2} + \psi_{\mu+1}(x_{\mu}) \right]$$

$$G_{2,0}(\Delta'_{\mu+1}) = -\frac{2}{3} X_{\mu}^5 F(\mu+1, \mu) - \frac{f(\mu+1)}{6\alpha_{\mu+1}^2} X_{\mu}^3 F(\mu+1, \mu) - \\ - \frac{f^2(\mu+1)}{4\alpha_{\mu+1}^4} X_{\mu} F(\mu+1, \mu) - \frac{f^3(\mu+1)}{8\alpha_{\mu+1}^6} \left[ \frac{\pi}{2} + \psi_{\mu+1}(x_{\mu}) \right]$$

$$G_{0,2}(\Delta'_{\mu+1}) = -\frac{2}{15} X_{\mu} F^3(\mu+1, \mu) - \frac{1}{2} f(\mu+1) F^3(\mu+1, \mu) X_{\mu} + \\ + \frac{3f^2(\mu+1)}{4} X_{\mu} F(\mu+1, \mu) - \frac{3f^3(\mu+1)}{8\alpha_{\mu+1}} \left[ \frac{\pi}{2} + \psi_{\mu+1}(x_{\mu}) \right]$$

где обозначены

$$\psi_n(\xi) = \arcsin \frac{y - \alpha_n^2 x + \beta_n^2 + 2\alpha_n^2 \xi}{y + \alpha_n^2 x + \beta_n^2}$$

$$H_n^{(l, h)}(x, y) = \sqrt{x - x_{n-1}}^l \sqrt{y + \alpha_n^2 x_{n-1} + \beta_n^2}^h - \\ - \sqrt{x - x_n}^l \sqrt{y + \alpha_n^2 x_n + \beta_n^2}^h$$

$$F(n, n-1) = \sqrt{y + \alpha_n^2 x_{n-1} + \beta_n^2}; \quad F(n, n) = \sqrt{y + \alpha_n^2 x_n + \beta_n^2}$$

$$f(n) = y + \alpha_n^2 x + \beta_n^2; \quad X_n = \sqrt{x - x_n}; \quad Y_m = \sqrt{y - y_m}$$

### 3. Вычисление распределенных нагрузок на поверхности крыла.

В характеристических координатах формулы (1.11) и (1.12) представляются в виде

$$p_v^{(1)}(x, y) = \frac{4}{k} L[\Phi_v^{(1)}(x, y, 0)] \quad (3.1)$$

$$p_v^{(2)}(x, y) = \frac{4}{k} \left\{ L[\Phi_v^{(2)}(x, y, 0)] + \frac{\lambda k}{4} \Phi_v^{(1)}(x, y, 0) \right\} \quad (3.2)$$

где через  $L$  обозначен оператор дифференцирования по направлению, параллельному направлению набегающего потока

$$L = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}$$

Для сокращения дальнейших записей обозначим также

$$F_{p,q}(\sigma) = L[G_{p,q}(\sigma)] = L[G_{p,q}(x, y, \sigma)] \quad (3.3)$$

Выполняя дифференцирование выражений (1.13) и (1.14) и подставляя в (3.1) и (3.2), для коэффициентов вращательных производных распределенных нагрузок  $p_v^{(1)}$  и  $p_v^{(2)}$  получим выражения в замкнутом виде

$$p_1^{(1)}(x, y) = \frac{2}{\pi k} \left\{ \sum_{n=l}^{\mu} \sum_{m=n}^{\mu} F_{0,0}(s_{n,m}) + \sum_{n=l+1}^{\mu} F_{0,0}(\Delta_n) + \sum_{m=l}^{\mu} F_{0,0}(s'_{i,m}) + \right. \\ \left. + F_{0,0}(s'_{i,\mu}) + F_{0,0}(\Delta'_i) + F_{0,0}(\Delta'_{\mu+1}) + \sum_{n=l}^{\mu} F_{0,0}(s'_{n,\mu}) \right\} \quad (3.4)$$

$$p_3^{(1)}(x, y) = \frac{\lambda}{2k} (x-y) L[\Phi_1^{(1)}(x, y, 0)] - \frac{\lambda}{4\pi k} \left\{ \sum_{n=l}^{\mu} \sum_{m=n}^{\mu} [F_{1,0}(s_{n,m}) - \right. \\ \left. - F_{0,1}(s_{n,m})] + \sum_{m=l}^{\mu} [F_{1,0}(s'_{i,m}) - F_{0,1}(s'_{i,m})] + \sum_{n=l+1}^{\mu} [F_{1,0}(\Delta_n) - F_{0,1}(\Delta_n)] + \right. \\ \left. + F_{1,0}(s'_{i,\mu}) - F_{0,1}(s'_{i,\mu}) + F_{1,0}(\Delta'_i) - F_{0,1}(\Delta'_i) + F_{1,0}(\Delta'_{\mu+1}) - \right. \\ \left. - F_{0,1}(\Delta'_{\mu+1}) + \sum_{n=l}^{\mu} [F_{1,0}(s'_{i,\mu}) - F_{0,1}(s'_{i,\mu})] \right\} \quad (3.5)$$

$$p_4^{(1)}(x, y) = \lambda \Phi_1^{(1)}(x, y, 0) + \frac{\lambda}{2} (x+y) L[\Phi_1^{(1)}(x, y, 0)] - \\ - \frac{\lambda}{4} \left\{ \sum_{n=l}^{\mu} \sum_{m=n}^{\mu} [F_{1,0}(s_{n,m}) + F_{0,1}(s_{n,m})] + \sum_{n=l+1}^{\mu} [F_{1,0}(\Delta_n) + F_{0,1}(\Delta_n)] + \right. \\ \left. + \sum_{m=l}^{\mu} [F_{1,0}(s'_{i,m}) + F_{0,1}(s'_{i,m})] + \sum_{n=l}^{\mu} [F_{1,0}(s'_{n,\mu}) + F_{0,1}(s'_{n,\mu})] + \right. \\ \left. + F_{1,0}(s'_{i,\mu}) + F_{0,1}(s'_{i,\mu}) + F_{1,0}(\Delta'_i) + F_{0,1}(\Delta'_i) + \right. \\ \left. + F_{1,0}(\Delta'_{\mu+1}) + F_{0,1}(\Delta'_{\mu+1}) \right\} \quad (3.6)$$

$$p_1^{(2)}(x, y) = \frac{1}{k^2} \{-\lambda^2 \Phi_1^{(1)}(x, y, 0) - 4\lambda k (x+y) L[\Phi_1^{(1)}(x, y, 0)] + \\ + 16 L[\Phi_4^{(1)}(x, y, 0)]\} \quad (3.7)$$

$$p_3^{(2)}(x, y) = \lambda \Phi_3^{(1)}(x, y, 0) + \frac{1}{2k} (x-y) L[\Phi_3^{(2)}(x, y, 0)] +$$

$$+ \frac{\lambda}{32\pi k} \left( k + \frac{1}{k} \right) \left\{ \sum_{n=l}^{\mu} \sum_{m=n}^{\mu} [F_{2,0}(s_{n,m}) - F_{0,2}(s_{n,m})] + \right.$$



$$\begin{aligned}
& + \sum_{n=l+1}^{\mu} [F_{2,0}(\Delta_n) - F_{0,2}(\Delta_n)] + \sum_{m=l}^{\mu} [F_{2,0}(s'_{i,m}) - F_{0,2}(s'_{i,m})] + \\
& + \sum_{n=l}^{\mu} [F_{2,0}(s'_{n,\mu}) - F_{0,2}(s'_{n,\mu})] + F_{2,0}(s'_{i,\mu}) - F_{0,2}(s'_{i,\mu}) + \\
& + F_{2,0}(\Delta'_i) - F_{0,2}(\Delta'_i) + F_{2,0}(\Delta'_{\mu+1}) - F_{0,2}(\Delta'_{\mu+1}) \} \quad (3.8)
\end{aligned}$$

$$p_4^{(2)}(x, y) = \lambda \Phi_4^{(1)}(x, y, 0) + \frac{1}{k} \Phi_1^{(2)}(x, y, 0) +$$

$$+ \frac{1}{2k} (x + y) L(\Phi_1^{(2)}(x, y, 0)) + \frac{\lambda}{32\pi} \left( k + \frac{1}{k} \right) \times$$

$$\times \left\{ \sum_{n=l}^{\mu} \sum_{m=n}^{\mu} [F_{2,0}(s_{n,m}) + 2F_{1,1}(s_{n,m}) + F_{0,2}(s_{n,m})] + \right.$$

$$+ \sum_{n=l+1}^{\mu} [F_{2,0}(\Delta_n) + 2F_{1,1}(\Delta_n) + F_{0,2}(\Delta_n)] +$$

$$+ \sum_{m=l}^{\mu} [F_{2,0}(s'_{i,m}) + 2F_{1,1}(s'_{i,m}) + F_{0,2}(s'_{i,m})] +$$

$$+ \sum_{n=l}^{\mu} [F_{2,0}(s'_{n,\mu}) + 2F_{1,1}(s'_{n,\mu}) + F_{0,2}(s'_{n,\mu})] +$$

$$\begin{aligned}
& + F_{2,0}(s'_{i,\mu}) + 2F_{1,1}(s'_{i,\mu}) + F_{0,2}(s'_{i,\mu}) + F_{2,0}(\Delta'_i) + 2F_{1,1}(\Delta'_i) + F_{0,2}(\Delta'_i) + \\
& + F_{2,0}(\Delta'_{\mu+1}) + 2F_{1,1}(\Delta'_{\mu+1}) + F_{0,2}(\Delta'_{\mu+1}) \} \quad (3.9)
\end{aligned}$$

Применяя оператор  $L$  к функциям  $G_{p,q}(\sigma)$ , получим

$$F_{0,0}(s_{n,m}) = 2 \left( \frac{1}{X_{n-1}} - \frac{1}{X_n} \right) (Y_{m+1} - Y_m) +$$

$$+ 2(X_{n-1} - X_n) \left( \frac{1}{Y_{m+1}} - \frac{1}{Y_m} \right)$$

$$F_{1,0}(s_{n,m}) = 2(X_{n-1} - X_n)(Y_{m+1} - Y_m) +$$

$$+ \frac{2}{3}(X_{n-1}^3 - X_n^3) \left( \frac{1}{Y_{m+1}} - \frac{1}{Y_m} \right)$$

$$F_{0,1}(s_{n,m}) = \frac{2}{3} \left( \frac{1}{X_{n-1}} - \frac{1}{X_n} \right) (Y_{m+1}^3 - Y_m^3) +$$

$$+ 2(X_{n-1} - X_n)(Y_{m+1} - Y_m)$$

$$F_{1,1}(s_{n,m}) = \frac{2}{3}(X_{n-1} - X_n)(Y_{m+1}^3 - Y_m^3) +$$

$$+ \frac{2}{3} (X_{n-1}^3 - X_n^3)(Y_{m+1} - Y_m)$$

$$F_{2,0}(s_{n,m}) = 2(X_{n-1}^3 - X_n^3)(Y_{m+1} - Y_m) +$$

$$+ \frac{2}{5} (X_{n-1}^5 - X_n^5) \left( \frac{1}{Y_{m+1}} - \frac{1}{Y_m} \right)$$

$$F_{0,2}(s_{n,m}) = \frac{2}{5} \left( \frac{1}{X_{n-1}} - \frac{1}{X_n} \right) (Y_{m+1}^5 - Y_m^5) + \\ + 2(X_{n-1} - X_n)(Y_{m+1}^3 - Y_m^3)$$

$$F_{0,0}(s'_{i,m}) = -\frac{2}{X_i} (Y_{m+1} - Y_m) - 2X_i \left( \frac{1}{Y_{m+1}} - \frac{1}{Y_m} \right)$$

$$F_{1,0}(s'_{i,m}) = -2X_i (Y_{m+1} - Y_m) - \frac{2}{3} X_i^3 \left( \frac{1}{Y_{m+1}} - \frac{1}{Y_m} \right)$$

$$F_{0,1}(s'_{i,m}) = -\frac{2}{X_i} (Y_{m+1}^3 - Y_m^3) - 2X_i (Y_{m+1} - Y_m)$$

$$F_{1,1}(s'_{i,m}) = -\frac{2}{3} X_i (Y_{m+1}^3 - Y_m^3) - \frac{2}{3} X_i^3 (Y_{m+1} - Y_m)$$

$$F_{2,0}(s'_{i,m}) = -2X_i^3 (Y_{m+1} - Y_m) - \frac{2}{5} X_i^5 \left( \frac{1}{Y_{m+1}} - \frac{1}{Y_m} \right)$$

$$F_{0,2}(s'_{i,m}) = -\frac{2}{5X_i} (Y_{m+1}^5 - Y_m^5) - 2X_i (Y_{m+1}^3 - Y_m^3)$$

$$F_{0,0}(s'_{i,\mu}) = 2\frac{Y_\mu}{X_i} + 2X_i \frac{1}{Y_\mu}; \quad F_{1,0}(s'_{i,\mu}) = \frac{2}{3} \frac{X_i^3}{Y_\mu} + 2X_i Y_\mu$$

$$F_{0,1}(s'_{i,\mu}) = \frac{2}{3} \frac{1}{X_i} Y_\mu^3 + 2X_i Y_\mu; \quad F_{1,1}(s'_{i,\mu}) = \frac{2}{3} X_i Y_\mu^3 + \frac{2}{3} X_i^3 Y_\mu$$

$$F_{2,0}(s'_{i,\mu}) = 2X_i^3 Y_\mu + \frac{2}{5} X_i^5 \frac{1}{Y_\mu}; \quad F_{0,2}(s'_{i,\mu}) = \frac{2}{5} \frac{Y_\mu^5}{X_i} + 2X_i Y_\mu^3$$

$$F_{0,0}(s'_{n,\mu}) = -2 \left( \frac{1}{X_{n-1}} - \frac{1}{X_n} \right) Y_\mu - 2(X_{n-1} - X_n) \frac{1}{Y_\mu}$$

$$F_{1,0}(s'_{n,\mu}) = -2(X_{n-1} - X_n) Y_\mu - \frac{2}{3} (X_{n-1}^3 - X_n^3) \frac{1}{Y_\mu}$$

$$F_{0,1}(s'_{n,\mu}) = -\frac{2}{3} \left( \frac{1}{X_{n-1}} - \frac{1}{X_n} \right) Y_\mu^3 - 2(X_{n-1} - X_n) Y_\mu$$

$$F_{1,1}(s'_{n,\mu}) = -\frac{2}{3} (X_{n-1} - X_n) Y_\mu^3 - \frac{2}{3} (X_{n-1}^3 - X_n^3) Y_\mu$$



$$F_{2,0}(s'_{n,\nu}) = -2(X_{n-1}^3 - X_n^3) Y_\nu - \frac{2}{5} (X_{n-1}^5 - X_n^5) \frac{1}{Y_\nu}$$

$$F_{0,2}(s'_{n,\nu}) = -\frac{2}{5} \left( \frac{1}{X_{n-1}} - \frac{1}{X_n} \right) Y_\nu^5 - 2(X_{n-1} - X_n) Y_\nu^3$$

$$F_{0,0}(\Delta_n) = 2 \left( \frac{1}{X_{n-1}} - \frac{1}{X_n} \right) Y_n - 2(X_{n-1} - X_n) \frac{1}{Y_n} - \\ - 2H_n^{(-1,1)}(x, y) + \frac{1 + \alpha_n^2}{\alpha_n} [\psi_n(x_{n-1}) - \psi_n(x_n)]$$

$$F_{1,0}(\Delta_n) = 2(X_{n-1} - X_n) Y_n + \frac{2}{3} (X_{n-1}^3 - X_n^3) \frac{1}{Y_n} + \\ + \frac{1 - 2\alpha_n^2}{2\alpha_n^2} H_n^{(1,1)}(x, y) - \frac{1}{2} H_n^{(3,-1)}(x, y) + \frac{f(n)}{2\alpha_n^2} H_n^{(-1,1)}(x, y) - \\ - \frac{1 + \alpha_n^3}{2\alpha_n^3} f(n) [\psi_n(x_{n-1}) - \psi_n(x_n)]$$

$$F_{0,1}(\Delta_n) = \frac{2}{3} \left( \frac{1}{X_{n-1}} - \frac{1}{X_n} \right) Y_n^3 + 2(X_{n-1} - X_n) Y_n - \\ - \frac{1}{6} H_n^{(-1,3)}(x, y) - \frac{1 + f(n)}{2} H_n^{(-1,1)}(x, y) - \frac{\alpha_n^2}{2} H_n^{(1,1)}(x, y) + \\ + \frac{1 - f(n)}{4} H_n^{(3,-1)}(x, y) + \frac{1 + \alpha_n^2}{4\alpha_n} [\psi_n(x_{n-1}) - \psi_n(x_n)]$$

$$F_{1,1}(\Delta_n) = \frac{2}{3} (X_{n-1} - X_n) Y_n^3 + \frac{2}{3} (X_{n-1}^3 - X_n^3) Y_n + \\ + \frac{1 + 11\alpha_n^2}{18\alpha_n^2} H_n^{(1,3)}(x, y) + \frac{3 + 2\alpha_n^2}{12\alpha_n^2} f(n) H_n^{(1,1)}(x, y) + \\ + \frac{1}{9\alpha_n^2} H_n^{(-1,5)}(x, y) + \frac{f(n)}{36\alpha_n^2} H_n^{(-1,3)}(x, y) + \\ + \frac{f^2(n)}{12\alpha_n^2} H_n^{(-1,1)}(x, y) + \frac{1 + \alpha_n^2}{8\alpha_n^3} f^2(n) [\psi_n(x_{n-1}) - \psi_n(x_n)]$$

$$F_{2,0}(\Delta_n) = 2(X_{n-1}^3 - X_n^3) Y_n + \frac{2}{5} (X_{n-1}^5 - X_n^5) \frac{1}{Y_n} - \\ - \frac{1 + 11\alpha_n^2}{6\alpha_n^2} H_n^{(3,1)}(x, y) - \frac{1}{3} H_n^{(5,-1)}(x, y) - \\ - \frac{1}{4\alpha_n^4} (2 + 3\alpha_n^2) f(n) H_n^{(1,1)}(x, y) - \frac{f(n)}{12\alpha_n^2} H_n^{(3,-1)}(x, y) -$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{f^2(n)}{4\alpha_n^4} H_n^{(0,-1)}(x, y) - 3\frac{1+\alpha_n^2}{8\alpha_n^5} f^2(n) [\psi_n(x_{n-1}) - \psi_n(x_n)] \\
F_{0,2}(\Delta_n) &= \frac{2}{5} \left( \frac{1}{X_{n-1}} - \frac{1}{X_n} \right) Y_n^5 + 2(X_{n-1} - X_n) Y_n^3 + \\
& + \frac{1}{15} H_n^{(-1,5)}(x, y) + \frac{5+3\alpha_n^2}{6} H_n^{(1,3)}(x, y) + \\
& + \frac{3}{4} (1+\alpha_n^2) f(n) H_n^{(0,1)}(x, y) - \frac{1}{4} f(n) H_n^{(-1,3)}(x, y) + \\
& + \frac{3}{4} f^2(n) H_n^{(-1,1)}(x, y) - \frac{9}{8\alpha_n} (1+\alpha_n^2) f^2(n) [\psi_n(x_{n-1}) - \psi_n(x_n)] \\
F_{0,0}(\Delta_i) &= -2\frac{Y_i}{X_i} - 2\frac{X_i}{Y_i} + 2\frac{F(i, i)}{X_i} + \frac{1+\alpha_i^2}{\alpha_i} \left[ \frac{\pi}{2} - \psi_i(x_i) \right] \\
F_{1,0}(\Delta'_i) &= -2X_i Y_i - \frac{2}{3} \frac{X_i^3}{Y_i} - \frac{1-2\alpha_i^2}{2\alpha_i^2} X_i F(i, i) - \frac{f(i)}{2\alpha_i^2} \frac{F(i, i)}{X_i} + \\
& + \frac{1}{2} \frac{X_i^3}{F(i, i)} - \frac{1+\alpha_i^2}{2\alpha_i^2} f(i) \left[ \frac{\pi}{2} - \psi_i(x_i) \right] \\
F_{0,1}(\Delta'_i) &= -\frac{2}{3} \frac{Y_i^3}{X_i} - 2X_i Y_i + \frac{2+\alpha_i^2}{2} X_i F(i, i) + \frac{1}{6} \frac{F^3(i, i)}{X_i} + \\
& + \frac{f(i)-1}{4} \frac{X_i}{F(i, i)} + \frac{1+f(i)}{4} \frac{F(i, i)}{X_i} + \frac{1+\alpha_i^2}{4\alpha_i} \left[ \frac{\pi}{2} - \psi_i(x_i) \right] \\
F_{1,1}(\Delta'_i) &= -2X_i Y_i^3 - \frac{2}{3} X_i^3 Y_i - \frac{1}{9\alpha_i^2} \frac{F^3(i, i)}{X_i} - \frac{11+\alpha_i^2}{18\alpha_i^2} X_i F^3(i, i) - \\
& - \frac{3+2\alpha_i^2}{12\alpha_i^2} f(i) X_i F(i, i) - \frac{f(i)}{36\alpha_i^2} \frac{F^3(i, i)}{X_i} - \frac{f^2(i)}{12\alpha_i^2} \frac{F(i, i)}{X_i} - \\
& - \frac{1+\alpha_i^2}{8\alpha_i^3} f^2(i) \left[ \frac{\pi}{2} - \psi_i(x_i) \right] \\
F_{2,0}(\Delta'_i) &= -2X_i^3 Y_i - \frac{2}{5} \frac{X_i^5}{Y_i} + \frac{1+11\alpha_i^2}{6\alpha_i^2} X_i^3 F(i, i) + \\
& + \frac{f(i)}{12\alpha_i^2} \frac{X_i^3}{F(i, i)} + \frac{1}{3} \frac{X_i^5}{F(i, i)} + \frac{2+3\alpha_i^2}{4\alpha_i^4} X_i F(i, i) + \\
& + \frac{f^2(i)}{4\alpha_i^4} \frac{X_i}{F(i, i)} - \frac{3(1+\alpha_i^2)}{8\alpha_i^5} f^2(i) \left[ \frac{\pi}{2} - \psi_i(x_i) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_{0,2}(\Delta'_i) &= -\frac{2}{5} \frac{Y_i^3}{X_i} - 2X_i Y_i^3 + \frac{1}{15} \frac{F^3(i, i)}{X_i} + \frac{5+3\alpha_i^2}{2} X_i F^3(i, i) - \\
&- \frac{3}{4} (1+2\alpha_i^2) f(i) X_i F(i, i) + \frac{f(i)}{4} \frac{F^3(i, i)}{X_i} - \frac{3}{4} f^2(i) \frac{F(i, i)}{X_i} - \\
&- \frac{9(1+\alpha_i^2)}{8\alpha_i} f^2(i) \left[ \frac{\pi}{2} - \psi_i(x_i) \right] \\
F_{0,0}(\Delta'_{\mu+1}) &= -2 \frac{F(\mu+1, \mu)}{X_\mu} + \frac{1+\alpha_{\mu+1}^2}{\alpha_{\mu+1}} \left[ \frac{\pi}{2} + \psi_{\mu+1}(x_\mu) \right] \\
F_{1,0}(\Delta'_{\mu+1}) &= \frac{1}{2} (1-2\alpha_{\mu+1}^2) \frac{F(\mu+1, \mu)}{\alpha_{\mu+1}^2} X_\mu - \frac{1}{2} \frac{X_\mu^3}{F(\mu+1, \mu)} + \\
&+ \frac{f(\mu+1)}{2\alpha_{\mu+1}^2} \frac{F(\mu+1, \mu)}{X_\mu} - \frac{1+\alpha_{\mu+1}^2}{2\alpha_{\mu+1}^2} f(\mu+1) \left[ \frac{\pi}{2} + \psi_{\mu+1}(x_\mu) \right] \\
F_{0,1}(\Delta'_{\mu+1}) &= -\frac{1}{6} \frac{F(\mu+1, \mu)}{X_\mu} - \frac{2+\alpha_{\mu+1}^2}{2} X_\mu F(\mu+1, \mu) - \\
&- \frac{f(\mu+1)}{2} \frac{F(\mu+1, \mu)}{X_\mu} + \frac{1+\alpha_{\mu+1}^2}{4\alpha_{\mu+1}} \left[ \frac{\pi}{2} + \psi_{\mu+1}(x_\mu) \right] \\
F_{1,1}(\Delta'_{\mu+1}) &= \frac{1}{9\alpha_{\mu+1}^2} \frac{F^3(\mu+1, \mu)}{X_\mu} + \frac{11+\alpha_{\mu+1}^2}{18\alpha_{\mu+1}^2} X_\mu F^3(\mu+1, \mu) + \\
&+ \frac{3+2\alpha_{\mu+1}^2}{12\alpha_{\mu+1}^2} f(\mu+1) X_\mu F(\mu+1, \mu) + \frac{f(\mu+1) F^3(\mu+1, \mu)}{36\alpha_{\mu+1}^2} + \\
&+ \frac{f^2(\mu+1)}{12\alpha_{\mu+1}^2} \frac{F(\mu+1, \mu)}{X_{\mu+1}} - \frac{1+\alpha_{\mu+1}^2}{8\alpha_{\mu+1}^3} f^2(\mu+1) \left[ \frac{\pi}{2} + \psi_{\mu+1}(x_\mu) \right] \\
F_{2,0}(\Delta'_{\mu+1}) &= -\frac{1+11\alpha_{\mu+1}^2}{6\alpha_{\mu+1}^2} X_\mu^3 F(\mu+1, \mu) - \frac{1}{3} \frac{X_\mu^5}{F(\mu+1, \mu)} - \\
&- \frac{1}{4\alpha_{\mu+1}^4} (2+3\alpha_{\mu+1}^2) f(\mu+1) X_\mu F(\mu+1, \mu) - \frac{f(\mu+1)}{12\alpha_{\mu+1}^2} \frac{X_\mu^3}{F(\mu+1, \mu)} - \\
&- \frac{f^2(\mu+1)}{2\alpha_{\mu+1}^4} \frac{X_\mu}{F(\mu+1, \mu)} - \frac{3(1+\alpha_{\mu+1}^2)}{8\alpha_{\mu+1}^5} f^2(\mu+1) \left[ \frac{\pi}{2} + \psi_{\mu+1}(x_\mu) \right] \\
F_{0,2}(\Delta'_{\mu+1}) &= -\frac{1}{15} \frac{F^5(\mu+1, \mu)}{X_\mu} - \frac{f(\mu+1) F^3(\mu+1, \mu)}{4} \frac{1}{X_\mu} + \\
&+ \frac{3}{4} f^2(\mu+1) \frac{F(\mu+1, \mu)}{X_\mu} - \frac{5+3\alpha_{\mu+1}^2}{6} X_\mu F^3(\mu+1, \mu) + \\
&+ \frac{3}{4} (1+2\alpha_{\mu+1}^2) f(\mu+1) X_\mu F(\mu+1, \mu) -
\end{aligned}$$



$$-\frac{9}{8} \frac{1 + \alpha_{n+1}^2}{\alpha_{n+1}} f^2 (n+1) \left[ \frac{\pi}{2} + \psi_{n+1}(x_n) \right]$$

Очевидно, координаты вершин  $A_n$  будут

$$x_n = -\frac{\beta_{n+1}^2 - \beta_n^2}{\alpha_{n+1}^2 - \alpha_n^2}, \quad y_n = -\frac{\beta_n^2 \alpha_{n+1}^2 - \alpha_n^2 \beta_{n+1}^2}{\alpha_{n+1}^2 - \alpha_n^2}$$

Значит, потенциал возмущений и распределенные нагрузки зависят от угловых коэффициентов сторон ломаной линии, которой заменяются кромки крыла, то есть от геометрии крыла, от числа Маха и от угла скольжения.

Полученные формулы дают возможность вычислить распределенные нагрузки в любой точке на крыле, движущейся со сверхзвуковой скоростью и совершающей малые добавочные колебания.

ГосНИИ Глававтоматика г. Москва  
НИИ Автоматика г. Кировакан

Поступила 9 II 1971

Ռ. Ա. ՄԵԺԼՈՒՄՅԱՆ, Ռ. Շ. ՍՈԼՈՄՈՆՅԱՆ

ՔՆՆՈՒՎԱՆՈՒԹՅԱՆ ՈՉ ՍՏԱՅԻՈՆԱՐ ԲԱՇԵՈՒՄԸ ՊԼԱՆՈՒՄ  
ՑԱՆԿԱՑԱՆ ՁԵՎ ՈՒՆԵՑՈՂ ԹԵՎԻ ՎՐԱ՝ ԳԵՐՉԱՅՆԱՅԻՆ ՇԱՐԺՄԱՆ  
ԳԵՊՔՈՒՄ

#### Ա մ փ ա փ ու մ

Քննարկվում է բարակ, թույլ ծաված, պլանում ցանկացած ձև ունեցող և գերձայնային եղրերով, թևի շարժումը սեղմելի իդրալական հեղուկի մեջ:

Ենթադրվում է, որ բացի հիմնական գերձայնային շարժումից, թևը կատարում է նաև լրացուցիչ փոքր տատանումներ: Խնդիրը լուծվում է գծային տեսության մեթոդներով, զրգուման պոտենցիալը և բաշխված բեռնվածությունը պատեցնող ածանցյալների գործակիցների միջոցով ներկայացնելու հիման վրա:

Բաշխված բեռնվածության պատեցնող ածանցյալների գործակիցների համար տրվում են բանաձևեր Սարուճալի թվերի փոքր արժեքների դեպքում:

NONSTATIONARY DISTRIBUTION OF LOAD ON A WING OF  
ARBITRARY SHAPE IN PLAN AT A SUPERSONIC MOTION

R. A. MEJLUMIAN, R. Sh. SOLOMONIAN

#### S u m m a r y

The motion in an ideal compressible field of a thin, slightly curved wing with an arbitrary shape in plan and having supersonic edges is

considered. Apart from the principal motion, the wing is assumed to perform small additional oscillations.

The problem is solved by the linear theory method on the basis of representation of the disturbance potential and distributed loads through the coefficients of rotary derivatives.

The calculation formulas for the above coefficients at low Strouhal numbers are given.

#### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Красильщикова Е. А. Крыло конечного размаха в сжимаемом потоке. ГИТТЛ, М.—Л., 1952.
2. Белоцерковский С. М. Представление нестационарных аэродинамических моментов и сил при помощи коэффициентов вращательных производных. Изв. АН СССР, ОТН, № 7, 1956.
3. Белоцерковский С. М. Пространственное неустановившееся движение несущей поверхности. ТММ, т. XIX, вып. 4, 1955.
4. Белоцерковский С. М., Кудрявцева Н. А., Федотов Б. Н. Метод расчета аэродинамических характеристик крыльев сложной формы в плане с дозвуковыми передними и задними кромками. Изв. АН СССР, МЖГ, № 2, 1969.
5. Белоцерковский С. М. Тонкая несущая поверхность в дозвуковом потоке газа. Изд. Наука, М., 1965.
6. Фурсов М. К. К расчету коэффициентов вращательных производных крыльев при сверхзвуковых скоростях. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и Машиностроение, № 2, 1961.
7. Междумян Р. А., Соломонян Р. Ш. Метод определения нестационарного схода потока за крылом конечного размаха при сверхзвуковом движении. Изв. АН Арм. ССР, Механика, т. XXIII, № 6, 1970.