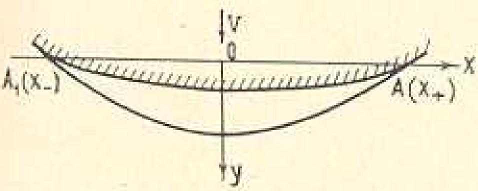
ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXV, № 3, 1972 Механика

М. М. МИНАСЯН

ПРОНИКАНИЕ ТЕЛА В ПОЛУПРОСТРАНСТВО СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ ПРИ НАЛИЧИИ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

В работе рассматривается плоская нестационарная задача о движении полупространства проводящей сжимаемой жидкости. Движение жидкости происходит от проникания твердого непроводящего тела в полупространство через свободную поверхность. Внешнее магнитное поле однородно и параллельно поверхности. В среде отсутствуют вязкость и теплопроводность, а электропроводность считается бесконечной. Выбор координатной системы указан на фиг. 1 (начало системы O берем в точке соприкасания тела со средой, что соответствует



Фиг. 1.

времени $t=0$). Скорость проникания V направлена по оси Oy. Контур тела задается кусочно-гладкой непрерывной функцией $y=f(x)+Vt$, выпуклой в сторону движения тела. Линия $y=0$ при $t>0$ пересекает контур в двух точках, скорости перемещения которых по поверхности среды суть $R_+=-\dfrac{V}{f'(x_+)}$ и $R_-=\dfrac{V}{f'(x_-)}$, где $x_+(t)$ и $x_-(t)$ находятся из уравнения $f(x)+Vt=0$. Будем считать, что $\max|R_+, R_-|>a_0$ и $N=\dfrac{a_0}{b_0}>1$, где a_0—скорость звука, а b_0—скорость Альфвена в невозмущенной среде.

Уравнения, описывающие движение жидкости, следующие [1]:

$$\frac{d\overline{u}}{dt}=\frac{1}{\rho}\nabla p+\frac{\mu_e}{\rho}(\nabla\times\overline{H}\times\overline{H})$$

$$\frac{d\overline{H}}{dt}=(\overline{H}\nabla)\,\overline{u}-\overline{H}(\nabla\,\overline{u})$$

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho\nabla\bar{u} = 0, \qquad \frac{dS}{dt} = 0 \tag{1.1}$$

$\bar{u}(u_x, u_y)$—вектор скорости, $\bar{H}(H_x, H_y)$—вектор напряжений магнитного поля, S—энтропия, p—давление, ρ—плотность.

Будем считать, что на поверхности жидкости отсутствуют поверхностные токи и заряды. На $y=0$ граничные условия выражают непрерывность полного давления и компоненты магнитного поля H_y. Область возмущенного движения заключена между фронтом волны AA_1 и частью контура тела C_0.

1. Рассмотрим линейную задачу. Примем V и $\max|f'(x)|$ достаточно малыми, так, чтобы параметры возмущенного движения мало отличались от параметров покоя, а условия на поверхности тела перенеслись на линию $y=0$. Для всех параметров примем $Q = Q_0 + Q'$, где Q_0—начальные значения, а Q'—возмущения этих параметров ($\bar{u}_0 = 0$, $p_0 = 0$), и в дальнейшем отбросим индексы у Q'. Отбросив в в (1.1) члены второго и более высокого порядка малости и исключив из системы все переменные Q, кроме u_y, получим уравнение

$$L[u_y] = 0, \qquad L = \frac{\partial^4}{\partial t^4} - (a_0^2 + b_0^2)\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) +$$

$$+ a_0^2 b_0^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)$$

$$a^2 = \left(\frac{dp}{d\rho}\right)_S, \qquad b^2 = \mu_e \frac{H^2}{\rho} \tag{1.2}$$

На $y=0$ имеем условие

$$u_y = u_y^0(x, t) = \begin{cases} V\eta(x_+(t) - x), & x > 0 \\ V\eta(x - x_-(t)), & x < 0 \end{cases} \qquad t > 0 \tag{1.3}$$

$\eta(t)$—функция Хевисайда.

Найдем решение уравнения (1.2) для приложенного единичного импульса, сосредоточенного на $y=0$ и во времени. Если u_y^δ—обобщенное решение в этом случае, то $u_y^\delta(x, 0, t) = \delta(x)\delta(t)$ есть граничное условие. Допустим, что $u_y^\delta(x, y, t)$ порождается кусочно-непрерывной функцией $\Phi(x, y, t)$ следующим образом:

$$u_y^\delta(x, y, t) = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x\,\partial t} \tag{1.4}$$

Φ—элементарный потенциал и $L[\Phi] = 0$.

Если $\varphi(x, y, t) = \mathrm{const}$—фронт волны, порожденной от импульса, то

$$F[\varphi_x, \varphi_y, \varphi_t] = \varphi_t^4 - (a_0^2 + b_0^2)\varphi_t^2(\varphi_x^2 + \varphi_y^2) + a_0^2 b_0^2 \varphi_x^2(\varphi_x^2 + \varphi_y^2) \quad (1.5)$$

—характеристическое уравнение. Если в (1.5) $\operatorname{grad}\varphi$ заменить вектором (k, β), а φ_t—через $-\omega$, то получим уравнение конуса нормалей $F[-\omega, k, \beta] = 0$, или, в силу однородности F, $F[-1, \lambda\mu] = 0$, где $\lambda = \frac{k}{\omega}$, $\mu = \frac{\beta}{\omega}$, (фронт волны $\varphi = \psi(x, y) - t$), откуда имеем:

$$\mu = \sqrt{\frac{(a_0^2\lambda^2 - 1)(b_0^2\lambda^2 - 1)}{a_0^2 + b_0^2 - a_0^2 b_0^2 \lambda^2}} \quad (1.6)$$

Нормальная скорость поверхности $\psi(x, y) = t$ (фазовая скорость) есть вектор $\bar{c}_0$, ортогональный к поверхности $F[-1, \lambda, \mu] = 0$. Если ввести двумерный вектор $(\cos\theta_0, \sin\theta_0)$, имеющий направление нормали к фронту $\psi(x, y) = \text{const}$, то $\cos\theta_0 = \lambda c_0$ и $\sin\theta_0 = \mu c_0$, и в силу однородности F для C_0 получим дисперсионное уравнение $F[-c_0, \cos\theta_0, \sin\theta_0] = 0$ или

$$c_0^4 - (a_0^2 + b_0^2)c_0^2 + a_0^2 b_0^2 \cos^2\theta_0 = 0 \quad (1.7)$$

Тогда уравнение

$$x\cos\theta_0 + y\sin\theta_0 - c_0 t = 0$$

или

$$x\lambda + y\mu - t = 0 \quad (1.8)$$

представляет „плоский фронт волны".

Бихарактеристические лучи, образующие локальный конус лучей (конус Монжа), описываются уравнениями

$$x = \frac{-\mu' t}{\mu - \lambda\mu'}, \qquad y = \frac{t}{\mu - \lambda\mu'} \quad (1.9)$$

Как известно, конус лучей является двойственным по отношению к поверхности нормалей (то есть ставит в соответствие точкам поверхности нормалей геометрическое место полюсов плоскостей к ней).

Соотношения (1.9) описывают элементарную волну (групповую поляру) от точечного источника, введенную Фридрихсом [1]. При $N > 1$ эта волна состоит из овала, соответствующего ускоренной магнитогазодинамической волне, и двух криволинейных треугольников, соответствующих медленным волнам.

Носитель функции u_y^0 есть область, заключенная между быстрыми и медленными полярами. Области внутри треугольников в общем случае лакуны. В нашей задаче будем считать, что все возмущения распространяются с быстрой групповой скоростью.

В силу однородности можно ввести автомодельные координаты

$$\xi = \frac{x}{t}, \qquad \eta = \frac{y}{t}$$

Тогда уравнения

$$\lambda\xi + \mu\eta - 1 = 0 \tag{1.10}$$

и

$$\xi = \frac{-\mu'}{\mu - \lambda\mu'}, \qquad \eta = \frac{1}{\mu - \lambda\mu'} \tag{1.11}$$

описывают „плоский фронт" и лучи в плоскости (ξ, η). Уравнение (1.10) или (1.11) приводит в соответствие лучам комплексные значения плоскости λ с разрезом $(-1/a_0, +1/a_0)$ вдоль вещественной оси.

Нетрудно видеть, что фронт волны описывается точками разреза, центр возмущения $(\xi = 0, \eta = 0)$—бесконечно удаленной точкой. Часть оси $\eta = 0$, находящейся в области возмущения, переходит в часть вещественной оси вне разреза, а ось $\xi = 0$ переходит в мнимую ось (нас интересует полуплоскость $\eta > 0$).

Имеет место теорема (аналог теоремы Смирнова-Соболева 2):

Если в некоторой области G пространства (x, y, t), (1.10) определяет λ как комплексную функцию переменных x, y, t, то вещественная и мнимая части любой аналитической функции $g(\lambda)$ дают решение уравнения $L[\Phi] = 0$.

Теорема доказывается непосредственной проверкой.

Итак,

$$u_y^\delta = \mathrm{Re}\left[\frac{\partial^2 g(\lambda)}{\partial x \partial t}\right]$$

или учитывая (1.8)

$$u_y^\delta = \mathrm{Re}\left[-\frac{\lambda}{\Delta}g'' + \frac{\Delta - \lambda\mu'' y}{\Delta^3}g'\right] = \mathrm{Re}\left[\frac{1}{\Delta}\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\frac{\lambda}{\Delta}g'\right)\right]$$

$$\Delta = x + \mu' y \tag{1.12}$$

На вещественной оси плоскости λ вне разрезов из (1.12) получаем условие

$$\mathrm{Re}\left[\frac{\partial}{\partial\lambda}(\lambda g')\right] = 0$$

Отбрасывая при интегрировании мнимые аддитивные постоянные, имеем

$$g(\lambda) = i\,C\ln\lambda \tag{1.13}$$

Здесь C—вещественная постоянная, которая находится из условия

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} u_y^\delta\, dx\, dt = 1$$

Из (1.13) на $y=0$ имеем

$$\mathrm{Re}[iC\ln\lambda] = C\pi\left[1-\eta\left(\frac{t}{x}\right)\right] = -C\pi[1-\eta(t)\,\eta(x)-\eta(-t)\,\eta(-x)],$$

откуда

$$u_y^\delta = 2\pi C\,\delta(x)\,\delta(t)$$

то есть

$$C=\frac{1}{2\pi}$$

Таким образом,

$$g(\lambda)=\frac{i}{2\pi}\ln\lambda$$

Полученная функция регулярна в плоскости λ с разрезом, имеет особенность на бесконечности и удовлетворяет предельному условию на вещественной оси.

Окончательно

$$u_y^\delta = \mathrm{Re}\left\{\frac{i}{2\pi}\,\frac{\partial^2\ln\lambda}{\partial x\partial t}\right\}$$

или учитывая (1.8)

$$u_y^\delta = \mathrm{Re}\left\{\frac{-i}{2\pi}\,\frac{\mu''(\lambda)}{[x+\mu'(\lambda)\,y]^3}\right\} \tag{1.13'}$$

Решение линейной задачи представится в виде свертки

$$u_y = u_y^0 * u_y^\delta$$

то есть

$$u_y(x,\ y,\ t) = -\frac{1}{2\pi}\,\mathrm{Re}\iint\limits_B \frac{i\,u_y^0(\bar{x},\ \bar{t})\,\mu''(\bar{\lambda})\,y}{[(x-\bar{x})+\mu'(\bar{\lambda})\,y]^3}\,d\bar{x}\,d\bar{t} \tag{1.14}$$

Здесь $\bar{\lambda}$ определяется из уравнения

$$(x-\bar{x})\,\bar{\lambda}+\mu(\bar{\lambda})\,y-(t-\bar{t})=0 \tag{1.15}$$

При выходе на свободную поверхность граничное условие представляет условие регуляризации функции $u_y^0(x,\ t)$. Действительно, на $y=0$ $u_y^\delta=\delta(x)\,\delta(t)$ и имеем

$$u_y(x,\ 0,\ t)=u_y^0*\delta(x)\,\delta(t)=u_y^0(x,\ t)$$

Область интегрирования показана на фиг. 2.

Кривая Γ задается уравнениями

$$\begin{cases}(x-\bar{x})\,\bar{\lambda}+\mu(\bar{\lambda})\,y-(t-\bar{t})=0\\ x-\bar{x}+\mu'(\bar{\lambda})\,y=0\end{cases} \tag{1.16}$$

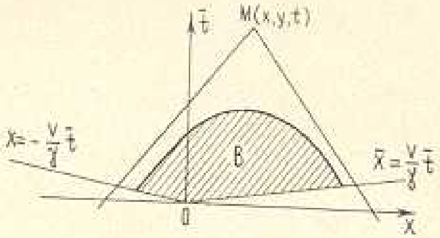
При вычислении интеграла (1.14) берутся главные значения по Адамару.

Рассмотрим частную задачу, когда тело представляет клин раствором $\pi-2\gamma$, $(\gamma\ll 1)$. Тогда $u_y^0(x,\ t)=V$ и $\bar{x}_+=\frac{V}{\gamma}\bar{t}$, $\bar{x}_-=-\frac{V}{\gamma}\bar{t}$.

Вычисляя интеграл (1.14) для этого случая, имеем

$$u_y=\frac{V}{\pi}\,\mathrm{Jm}\,\ln\frac{\gamma+\lambda V}{\gamma-\lambda V} \tag{1.17}$$

причем, на фронте волны $|\lambda V|<\gamma$ и $u_y=0$, а на поверхности (на клине) $|\lambda V|>\gamma$ и $u_y=V$.



Фиг. 2

2. Найдем решение нелинейной задачи вблизи фронта волны (BB_1). Линейный фронт задан соотношениями (1.11) при $\lambda=\lambda_0=\frac{\cos\theta_0}{C_0}$. Линию же, близкую к ней, определим соотношениями

$$\xi=\frac{-\mu'}{-\lambda\mu'+\mu}(1-\alpha),\qquad \eta=\frac{1}{-\lambda\mu'+\mu}(1-\alpha)$$

$$\lambda=\lambda_0+\lambda_1,\quad |\lambda_1|\ll 1,\quad \alpha\ll 1 \tag{2.1}$$

Разлагая ξ и η в ряд по степеням λ_1, учитывая (1.11), оставляя члены первого порядка малости и принимая $\xi(\lambda)=\xi(\lambda_0)$, находим

$$\lambda_1=\frac{-\lambda_0\mu_0'+\mu_0}{\mu_0\mu_0''}\mu_0'\alpha,\quad \mu_0=\mu(\lambda_0) \tag{2.2}$$

Подставляя (2.2) в (2.1), имеем уравнение кривой (CC_1)

$$\xi=\frac{-\mu_0'}{-\lambda_0\mu_0'+\mu_0},\qquad \eta=\frac{1}{-\lambda_0\mu_0'+\mu_0}-\frac{\alpha}{\mu_0} \tag{2.3}$$

Комплексное значение $\lambda=\lambda_0+\lambda'$ на линии (CC_1) находим из уравнения

$$(\lambda_0+\lambda')\,\xi+\mu(\lambda_0+\lambda')\left(\eta_0-\frac{\alpha}{\mu_0}\right)-1=0$$

Удерживая члены первого порядка малости, имеем

$$\lambda' = \sqrt{\frac{2\alpha}{\mu_0' \gamma_0}}$$

или, так как

$$\mu_0' < 0, \quad \lambda' = i\sqrt{\frac{-2\alpha}{\mu_0' \gamma_0}} \tag{2.4}$$

Подставляя (2.4) в линейное решение (1.17), учитывая, что $\operatorname{arc\,tg}\sigma \approx \sigma$ при малых σ (исключаем из рассмотрения окрестности точек C и C_1, ибо там $\sigma \gg 1$) имеем

$$u_y = \frac{V^2}{\pi\gamma\left(1 - \frac{\lambda_0^2 V}{\gamma^2}\right)} \sqrt{\frac{-2\alpha}{\mu''(\lambda_0)\gamma_0}} = f(\lambda_0)\sqrt{\alpha} \tag{2.5}$$

Производные u_y по λ, („внутренние" вдоль линии CC_1) имеют порядок $\sqrt{\alpha}$, а производные u_y по α, („выводящие"), —порядок $(\sqrt{\alpha})^{-1}$. Это обстоятельство указывает на то, что решение (2.5) вблизи фронта—типа „пограничного слоя". Если в качестве координатной системы (вместо ξ, η) вблизи фронта выбрать криволинейную систему (λ, α), то следует ожидать, что для всех функций их производные по λ пренебрежимо малы по сравнению с производными по α, в силу чего коэффициенты при производных по λ можно линеаризировать. Замена переменных осуществляется формулами (2.1), причем

$$\frac{D(\xi, \eta)}{D(\lambda, \alpha)} = \frac{-\mu''}{(-\lambda\mu' + \mu)^2}(1-\alpha) \neq 0, \ \infty$$

Если в системе (1.1) сначала перейти к переменным (ξ, η), а затем к λ, α и учитывать вышеописанные соображения об оценках величин, входящих в эти уравнения, получим систему

$$\begin{gathered}
A\frac{\partial u_x}{\partial\alpha} + \mu_e \frac{H_y}{\rho}\left(\lambda\frac{\partial H_y}{\partial\alpha} - \mu\frac{\partial H_x}{\partial\alpha}\right) + \frac{\lambda}{\rho}\frac{\partial p}{\partial\alpha} = -\frac{m}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial\lambda} \\
A\frac{\partial u_y}{\partial\alpha} + \mu_e \frac{H_x}{\rho}\left(\mu\frac{\partial H_x}{\partial\alpha} - \lambda\frac{\partial H_y}{\partial\alpha}\right) + \frac{\mu}{\rho}\frac{\partial p}{\partial\alpha} = \\
= -m\left[\frac{\mu_e H_0}{\rho_0}\left(\frac{\partial H_x}{\partial\lambda}\mu' - \frac{\partial H_y}{\partial\lambda}\right) + \frac{\mu'}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial\lambda}\right] \\
A\frac{\partial\rho}{\partial\alpha} + \rho\left(\lambda\frac{\partial u_x}{\partial\alpha} + \mu\frac{\partial u_y}{\partial\alpha}\right) = -m\left[\rho_0\left(\frac{\partial u_x}{\partial\lambda} + \mu'\frac{\partial u_y}{\partial\lambda}\right)\right] \\
A\frac{\partial H_x}{\partial\alpha} - H_y\mu\frac{\partial u_x}{\partial\alpha} + \mu H_x\frac{\partial u_y}{\partial\alpha} = -mH_0\mu'\frac{\partial u_y}{\partial\lambda} \\
A\frac{\partial H_y}{\partial\alpha} - H_x\lambda\frac{\partial u_y}{\partial\alpha} + H_y\lambda\frac{\partial u_x}{\partial\alpha} = mH_0\frac{\partial u_y}{\partial\lambda}
\end{gathered} \tag{2.6}$$

где

$$A = \lambda u_x + \mu u_y - (1-\alpha), \quad m = \frac{-\lambda\mu' + \mu}{\mu''(1-\alpha)}$$

Из (2.6) получаем одно уравнение, разрешенное относительно $\frac{\partial u_y}{\partial \alpha}$

$$\left[\left(A^2 - \frac{\mu_e H_x^2}{\rho C_0^2} - \mu^2 a^2\right)\left(A^2 - \frac{\mu_e H_y^2}{\rho C_0^2} - \lambda^2 a^2\right) - \left(\frac{\mu_e H_x H_y}{\rho C_0^2} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \lambda\mu a^2\right)^2\right]\frac{\partial u_y}{\partial \alpha} = m\left[\frac{\mu_e H_0}{\rho_0}\left(\frac{\partial H_x}{\partial \lambda}\mu' - \frac{\partial H_y}{\partial \lambda}\right) + \frac{\mu' a_0^2}{\rho_0}\frac{\partial \rho}{\partial \lambda} + \right.$$

$$\left. + b_0^2\frac{\partial u_y}{\partial \lambda}(\lambda + \mu\mu') + \mu a_0^2\left(\frac{\partial u_x}{\partial \lambda} + \mu'\frac{\partial u_y}{\partial \lambda}\right)\right](1 - \lambda^2 a_0^2) +$$

$$+ m\left[\frac{a_0^2}{\rho_0}\frac{\partial \rho}{\partial \lambda} + \lambda a_0^2\left(\frac{\partial u_x}{\partial \lambda} + \mu'\frac{\partial u_y}{\partial \lambda}\right)\right]\lambda\mu a_0^2 \tag{2.7}$$

Линейная часть в квадратных скобках при $\frac{\partial u_y}{\partial \alpha}$ равна нулю и все члены в (2.7) имеют одинаковый порядок. В правой части все функции выразим через u_y по условиям совместимости на характеристике [3]

$$\begin{gathered} -c\delta\overline{H} + \overline{H}\delta u_n - H_n\delta\overline{u} = 0 \\ -c\rho\delta\overline{u} + a^2\overline{n}\delta\rho + \mu_e\overline{u}(\overline{H}\delta\overline{H}) - \mu_e H_n\delta\overline{H} = 0 \\ -c\delta\rho + \rho\delta u_n = 0 \end{gathered} \tag{2.8}$$

Уравнение политропы берем в виде

$$p = B\left[\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^n - 1\right] \tag{2.9}$$

где $\frac{p}{B_n}$ считается малым.

Из (2.7) для u_y получаем уравнение

$$(Ku_y + 2\alpha)\frac{\partial u_y}{\partial \alpha} - u_y = 0 \tag{2.10}$$

где

$$K(\lambda_0) = \frac{1 - 4b_0^2\lambda_0^2 + n\left(1 - \frac{b_0^2}{c_0^2}\right)(1 - b_0^2\lambda_0^2) - \frac{b_0^2}{a_0^2} + 3\frac{b_0^2}{c_0^2} + \frac{b_0^4}{a_0^2 c_0^2}}{c_0\mu_0\left(1 - \frac{a_0^2 b_0^2 \lambda_0^2}{c_0^2}\right)}$$

Интегрируя (2.10), имеем

$$\alpha = -Ku_y + C_1(\lambda)\,u_y^2 \tag{2.11}$$

$C_1(\lambda)$ определяется из условия на выходе из области „пограничного слоя" вблизи фронта, где существенным является нелинейное решение. На выходе же решение переходит в линейное.

Окончательно

$$\alpha = -Ku_y + \frac{u_y^2}{[f(\lambda_0)]^2} \tag{2.12}$$

Уравнение характеристической поверхности в переменных (λ, τ) имеет вид [4]

$$c + u_n = \frac{1 - \dfrac{\partial\tau}{\partial\lambda}}{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2 - 2\dfrac{\partial\tau}{\partial\lambda}\left[\dfrac{-\lambda\mu' + \mu}{\mu''(t-\tau)}\right](\lambda + \mu\mu')}}\Bigg|_{\tau = \alpha t} \tag{2.13}$$

где c—скорость характеристики, u_n—нормальная составляющая скорости частиц на характеристике. Скорость c удовлетворяет дисперсионному уравнению

$$c^4 - c^2\left[a^2 + \mu_e\,\frac{H_x^2 + H_y}{\rho}\right] + \frac{a^2}{\rho}\,\mu_e H_n^2 = 0 \tag{2.14}$$

Если θ—угол наклона нормали нелинейной характеристики, то $\theta = \theta_0 + \theta'$, θ' мало и

$$\operatorname{ctg}\theta = \frac{\lambda_0}{\mu_0} - \frac{\mu_0^2 + \lambda_0^2}{\mu_0^2}\,\theta' \tag{2.15}$$

Тогда, учитывая (2.1), получим

$$\frac{\partial\tau}{\partial\lambda} = -\frac{\mu''(t-\tau)(\lambda^2 + \mu^2)}{(-\lambda\mu' + \mu)^2}\,\theta' \tag{2.16}$$

Пусть $c = c_0 + c'$, тогда из (2.14) и (2.9) имеем

$$c' = \frac{(n-1)(c_0^2 - b_0^2) - (n-2)b_0^2 c_0^{-2}(c_0^2 - b_0^2)\cos^2\theta_0 - b_0^2 a_0^{-2}(c_0^2 - b_0^2)}{2\sin\theta_0\,(2c_0^2 - a_0^2 - b_0^2)}\,u_y +$$

$$+ \frac{b_0^2 \sin^2\theta_0}{\sin\theta_0\,(2c_0^2 - a_0^2 - b_0^2)}\,u_y + \frac{a_0^2 b_0^2 \cos\theta_0 \sin\theta_0}{c_0\,(2c_0^2 - a_0^2 - b_0^2)}\,\theta' \tag{2.17}$$

Если (2.16), (2.17) и значение u_n, выраженное через u_y, подставить в (2.13), то члены с θ' сократятся, и мы получим на линейной характеристике

$$-c_0\frac{\partial\tau}{\partial t} = -c_0\alpha = \frac{Ku_y}{2} \tag{2.18}$$

Аналогично поступая с нелинейным фронтом, а именно, выписав уравнение вида (2.13) с D в левой части, заменив τ через $\tau_в$—в правой, подставив вместо (2.8) динамические условия совместимости (законы сохранения) на фронте, считая $\nu = \theta_0 + \nu'$, $D = c_0 + D'$, где D—скорость, ν—угол наклона нормали нелинейного фронта, ν' и D'—малые поправки, получим соотношения:

$$D' = \frac{(c_0^2 - b_0^2)\left[\frac{n-1}{2}\frac{c_0^2}{a_0^2}(c_0^2 - b_0^2) + \frac{b_0^2 c_0^2}{a_0^2} + c_0^2 - 2b_0^2\cos^2\theta_0\right] + \frac{b_0^2 c_0^2}{2}}{2\sin\theta_0(2c_0^2 - a_0^2 - b_0^2)} u_y +$$

$$+ \frac{a_0^2 b_0^2 \cos\theta_0 \sin\theta_0}{c_0(a_0^2 b_0^2 \cos^2\theta_0 - c_0^4)} \nu' \tag{2.19}$$

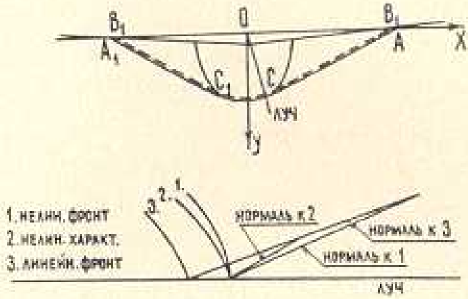
$$\frac{\partial \tau_в}{\partial \lambda} = \frac{\mu''(t - \tau_в)(\lambda^2 + \mu^2)}{(-\lambda\mu' + \mu)^2} \nu' \tag{2.20}$$

и

$$-c_0 \frac{\partial \tau_в}{\partial t} = -c_0 \alpha_в = \frac{K}{4} u_y \tag{2.21}$$

Из (2.18) и (2.20) непосредственно за нелинейным фронтом получаем связь

$$\alpha_в = \frac{1}{2}\alpha$$



Фиг. 3

Тогда условия (2.16) и (2.20), если в их правых частях отбросить малые величины выше первого порядка, дают

$$\nu' = \frac{1}{2}\theta' \tag{2.22}$$

Нетрудно видеть, что (2.22) приводит к соотношению

$$D = \frac{c + u_n + c_0}{2}$$

которое имеет характер общего для задач о движении слабой волны в идеальной проводящей среде.

Геометрическая интерпретация формулы (2.22) представлена на фиг. 3.

Используя (2.21) и (2.12), находим u_y непосредственно за фронтом

$$u_y = \frac{K(\lambda)}{2}[f(\lambda)]^2$$

Из условий совместимости на фронте легко находятся все параметры течения магнитного поля за фронтом и скорость самого фронта

$$H_x = H_0(1+\mu_0 u_y), \quad H_y = -H_0\lambda_0 u_y, \quad u_x = \frac{c_0^2-b_0^2}{c_0^2}\frac{\lambda_0}{\mu_0}u_y$$

$$\rho = \rho_0\left(1+\frac{c_0^2-b_0^2}{c_0^2 a_0^2}\frac{u_y}{\mu_0}\right), \quad a = a_0\left(1+\frac{n-1}{2}\frac{c_0^2-b_0^2}{c_0^2 a_0^2}\frac{u_y}{\mu_0}\right)$$

$$D = \frac{c+u_n+c_0}{2}$$

В заключение автор благодарит А. Г. Багдоева за постановку задачи и обсуждение результатов.

Ереванский государственный
университет

Поступила 29 III 1971

Մ. Մ. ՄԻՆԱՍՅԱՆ

ՄԱՐՄՆԻ ԹԱՓԱՆՑՈՒՄԸ ՍԵՂՄԵԼԻ ՀԵՂՈՒԿԻ ԿԻՍԱՏԱՐԱԾՈՒԹՅԱՆ ՄԵՋ՝ ՄԱԳՆԻՍԱԿԱՆ ԴԱՇՏԻ ԱՌԿԱՅՈՒԹՅԱՆ ԴԵՊՔՈՒՄ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Աշխատանքում դիտարկվում է հաղորդիչ հեղուկի հարթ ոչ ստացիոնար շարժումը մագնիսական դաշտում։ Շարժումը առաջանում է ոչ հաղորդիչ մարմնի թափանցումից կիսահարթության մեջ։ Մագնիսական դաշտը զուգահեռ է ազատ մակերևույթին։ Գծային խնդիրը լուծված է Սմիրնով-Սոբոլևի մեթոդով։ Խնդրի ոչ գծային լուծումը հարվածային ալիքի ճակատի մոտակայքում կատարված է սեպի համար։ Ցույց է տրված, որ շարժումը այստեղ միաչափ է։ Որոշված են գազամագնիսադինամիկական դաշտի պարամետրերը և ալիքի տարածման արագությունը։

TNE BODY PENETRATION INTO A COMPRESSIBLE FLUID SEMISPACE IN THE PRESENCE OF A MAGNETIC FIELD

M. M. MINASIAN

Summary

The plane nonstationary problem of a conducting compressible fluids motion due to a rigid nonconducting body penetration into fluid semispace through free surface is considered.

The linear problem is solved by Smirnov-Sobolev's method. The nonlinear solution for a wedge near the shock wave front is obtained. The gas parameters and wave velocity are determined.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бай-Ши-И.* Магнитная гидродинамика. Изд. Мир, М., 1964.
2. *Смирнов В. И.* Курс высшей математики. ГИТТЛ, т. 3, ч. 2, М., 1953.
3. *Калихман Л. Е.* Элементы магнитной газодинамики. Атомиздат, М., 1964.
4. *Багдоев А. Г.* Некоторые нелинейные задачи о движении сжимаемой жидкости. Изд. АН Арм. ССР, Ереван, 1967.
5. Курант. Уравнения с частными производными. Изд. Мир, М., 1964.