

В. С. ТОНОЯН, С. А. МЕЛКУМЯН

## ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ПОЛУПЛОСКОСТИ С ВЕРТИКАЛЬНЫМ КОНЕЧНЫМ РАЗРЕЗОМ

Задача о прямолинейном разрезе, выходящем на свободную границу полуплоскости, была рассмотрена в работах Уиглсуэтра [1], Ирвина [2] и Ж. П. Роква [3].

В работах [1] и [3] исследован случай произвольного распределения нормальных и касательных напряжений по краям разреза. В работе [2] рассматривается случай, когда граница полуплоскости и разреза свободны от напряжений, а на бесконечности приложены постоянные напряжения, параллельные границе полуплоскости.

В настоящей работе рассмотрена плоская задача для упругой изотропной полуплоскости, ослабленной прямолинейным разрезом, выходящим на границу полуплоскости перпендикулярно к ней.

На границе полуплоскости и по краям разреза заданы векторы напряжений. Задача решена методом Фурье.

Решение задачи сведено к „парным“ интегральным уравнениям, которые в дальнейшем сводятся к интегральному уравнению Фредгольма второго рода. Доказано, что последнее уравнение можно решить методом последовательных приближений.

В частных случаях, когда длина разреза стремится к нулю или бесконечности, показано, что соответственно получаются задачи о полуплоскости без разреза и о четверть-плоскости (квадранта).

Рассмотрен ряд примеров, иллюстрирующих характер деформации разреза и распределение напряжений в окрестности концевой точки разреза.

### § 1. Постановка задачи и сведение ее к „парным“ интегральным уравнениям

Рассмотрим плоскую симметричную задачу для упругой изотропной полуплоскости, разрезанной вдоль вертикальной оси, начиная от горизонтальной границы. Разрез имеет конечную длину  $a$ .

На границе полуплоскости и по краям разреза заданы векторы напряжения.

Будем пользоваться известными выражениями смещений и напряжений через бигармоническую функцию [4]

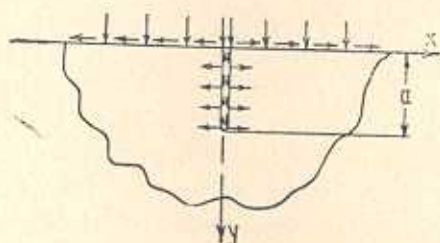
$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}$$

$$u = \frac{1}{E} \left[ \int \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} dx - \nu \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right] - a_0 y + b_0 \quad (1.1)$$

$$v = \frac{1}{E} \left[ \int \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} dy - \nu \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right] + a_0 x + c_0$$

где  $E$ —модуль упругости,  $\nu$ —коэффициент Пуассона.

В силу симметрии граничных условий относительно оси  $Oy$ , можно ограничиться рассмотрением только правой половины полуплоскости (квадранта).



Фиг. 1.

Поставленная задача состоит в нахождении одной бигармонической функции  $\Phi(x, y)$  в области  $0 \leq x < \infty$ ,  $0 \leq y < \infty$ , удовлетворяющей граничным условиям

$$\sigma_y(x, 0) = f_1(x), \quad \tau_{xy}(x, 0) = f_2(x) \quad (0 < x < \infty) \quad (1.2)$$

$$\sigma_x(0, y) = f_1(y), \quad \tau_{xy}(0, y) = f_2(y) \quad (0 < y < a)$$

и условиям симметрии

$$\tau_{xy}(0, y) = 0, \quad u(0, y) = 0 \quad (a < y < \infty) \quad (1.3)$$

Кроме того, при  $x \rightarrow \infty$  и  $y \rightarrow \infty$   $\Phi(x, y)$  должна стремиться к нулю. Будем искать решение задачи в виде суммы двух интегралов Фурье

$$\begin{aligned} \Phi(x, y) = & \int_0^{\infty} [A(\alpha) + \alpha x B(\alpha)] e^{-\alpha x} \cos(\alpha y) d\alpha + \\ & + \int_0^{\infty} [C(\beta) + \beta y D(\beta)] e^{-\beta y} \cos(\beta x) d\beta \end{aligned} \quad (1.4)$$

Здесь  $A(\alpha)$ ,  $B(\alpha)$ ,  $C(\beta)$  и  $D(\beta)$ —функции, подлежащие определению из граничных условий  $y = 0$  и  $x = 0$ .

Используя формулы (1.1) и (1.4), будем иметь

$$\sigma_x(x, y) = - \int_0^{\infty} \alpha^2 [A(\alpha) + \alpha x B(\alpha)] e^{-\alpha x} \cos(\alpha y) d\alpha +$$

$$+ \int_0^{\infty} \beta^2 [C(\beta) - 2D(\beta) + \beta y D(\beta)] e^{-\beta y} \cos(\beta x) d\beta$$

$$\sigma_y(x, y) = \int_0^{\infty} \alpha^2 [A(\alpha) - 2B(\alpha) + \alpha x B(\alpha)] e^{-\alpha x} \cos(\alpha y) d\alpha - \\ - \int_0^{\infty} \beta^2 [C(\beta) + \beta y D(\beta)] e^{-\beta y} \cos(\beta x) d\beta$$

$$\tau_{xy}(x, y) = - \int_0^{\infty} \alpha^2 [A(\alpha) - B(\alpha) + \alpha x B(\alpha)] e^{-\alpha x} \sin(\alpha y) d\alpha - \\ - \int_0^{\infty} \beta^2 [C(\beta) - D(\beta) + \beta y D(\beta)] e^{-\beta y} \sin(\beta x) d\beta \quad (1.5)$$

$$u(x, y) = \frac{1}{E} \left\{ \int_0^{\infty} \alpha [A(\alpha)(1 + \nu) + B(\alpha)(1 - \nu) + \right.$$

$$\left. + B(\alpha) \alpha x (1 + \nu)] e^{-\alpha x} \cos(\alpha y) d\alpha + \int_0^{\infty} \beta [C(\beta)(1 + \nu) - 2D(\beta) + \right.$$

$$\left. + D(\beta) \beta y (1 + \nu)] e^{-\beta y} \sin(\beta x) d\beta \right\} - a_0 y + b_0$$

$$v(x, y) = \frac{1}{E} \left\{ \int_0^{\infty} \alpha [A(\alpha)(1 + \nu) - 2B(\alpha) + \right.$$

$$\left. + B(\alpha) \alpha x (1 + \nu)] e^{-\alpha x} \sin(\alpha y) d\alpha + \int_0^{\infty} \beta [C(\beta)(1 + \nu) + D(\beta)(1 - \nu) + \right.$$

$$\left. + D(\beta) \beta y (1 + \nu)] e^{-\beta y} \cos(\beta x) d\beta \right\} + a_0 x + c_0$$

Закрепляя бесконечно удаленную точку, будем иметь  $a_0 = b_0 = c_0 = 0$ .  
Удовлетворяя условиям (1.2) и (1.3), получим

$$C(\beta) = D(\beta) - \frac{2}{\pi} \frac{1}{\beta^2} \int_0^{\infty} f_2(x) \sin(\beta x) dx \quad (1.6)$$

$$A(x) = B(x) - \frac{2}{\pi} \frac{1}{x^2} \int_0^{\infty} f_2(y) \sin(xy) dy \quad (1.7)$$

$$D(\beta) = \frac{2}{\pi} \frac{1}{\beta^2} \int_0^{\infty} f_2(x) \sin(\beta x) dx - \frac{2}{\pi} \frac{1}{\beta^2} \int_0^{\infty} f_1(x) \cos(\beta x) dx - \\ - \frac{2}{\pi} \frac{1}{\beta^2} \int_0^a f_2(y) e^{-\beta y} dy - \frac{4}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{x^3 B(x)}{(x^2 + \beta^2)^2} dx \quad (1.8)$$

$$\int_0^{\infty} x^2 A(x) \cos(xy) dx = -f_1(y) - \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{f_2(x) x dx}{x^2 + y^2} + \\ + y \int_0^{\infty} \beta^3 D(\beta) e^{-\beta y} d\beta - \int_0^{\infty} \beta^2 D(\beta) e^{-\beta y} d\beta \quad (0 < y < a) \quad (1.9)$$

$$\int_0^{\infty} x A(x) \cos(xy) dx = 0 \quad (a \leq y < \infty)$$

При получении (1.8) и (1.9) были учтены значения следующих интегралов [9]:

$$\int_0^{\infty} e^{-\alpha x} \sin(\alpha y) dx = \frac{y}{x^2 + y^2}, \quad \int_0^{\infty} \frac{\cos(\beta x) dx}{x^2 + y^2} = \frac{\pi}{2} \frac{e^{-\beta y}}{y}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin(\alpha z) \cos(\alpha y)}{\alpha} d\alpha = 0 \quad (0 < z < y)$$

## § 2. Сведение „парных“ интегральных уравнений к интегральному уравнению Фредгольма второго рода и определение неизвестных функций

Подобные „парные“ уравнения рассматривались в работах [5], [6] и [7]. Умножая первое из уравнений (1.9) на множитель  $\frac{1}{\sqrt{r^2 - y^2}}$  и интегрируя полученное равенство по  $y$  от нуля до  $r$ , имеем

$$\frac{\pi}{2} \int_0^{\infty} x A(x) x r J_0(\alpha r) d\alpha = r[\varphi(r) + F(r)] \quad (0 < r < a) \quad (2.1)$$

Аналогично умножая второе из уравнений (1.9) на  $\frac{y}{\sqrt{y^2 - r^2}}$  и интегрируя полученное равенство по  $y$  от нуля до бесконечности, а затем дифференцируя по  $r$ , получаем

$$\frac{\pi}{2} \int_0^{\infty} x A(x) x r J_0(ax) dx = 0 \quad (a \ll r < \infty) \quad (2.2)$$

Используя формулу обращения для преобразования Ханкеля, из (2.1) и (2.2) получим

$$A(x) = \frac{2}{\pi} \frac{1}{x} \int_0^a r [\varphi(r) + F(r)] J_0(ax) dr \quad (2.3)$$

где

$$\varphi(r) = - \int_0^r \frac{f_1(y) dy}{\sqrt{r^2 - y^2}} - \frac{2}{\pi} \int_0^r \frac{dy}{\sqrt{r^2 - y^2}} \int_0^{\infty} \frac{f_2(x)x dx}{x^2 + y^2} \quad (2.4)$$

$$F(r) = \frac{\pi}{2} r \int_0^{\infty} \beta^2 [L_1(\beta r) + \frac{2}{\pi} - I_1(\beta r)] D(\beta) d\beta - \\ - \frac{\pi}{2} \int_0^{\infty} \beta^2 [I_0(\beta r) - L_0(\beta r)] D(\beta) d\beta \quad (2.5)$$

Здесь

$I_n(z)$  — функция Бесселя первого рода от мнимого аргумента,  
 $J_n(z)$  — функция Бесселя первого рода от действительного аргумента,  
 $L_n(z)$  — функция Струве от мнимого аргумента.

При получении (2.1), (2.2), (2.4) и (2.5) были использованы значения следующих интегралов [9]:

$$\int_0^r \frac{\cos(xy) dx}{\sqrt{r^2 - y^2}} = \frac{\pi}{2} J_0(ar), \quad \int_r^{\infty} \frac{y \cos(xy)}{\sqrt{y^2 - r^2}} dy = -\frac{\pi}{2} r J_1(ar)$$

$$\int_0^r \frac{e^{-\beta y}}{\sqrt{r^2 - y^2}} dy = \frac{\pi}{2} [I_0(\beta r) - L_0(\beta r)]$$

$$\int_0^r \frac{y e^{-\beta y}}{\sqrt{r^2 - y^2}} dy = \frac{\pi}{2} r \left[ L_1(\beta r) + \frac{2}{\pi} - I_1(\beta r) \right]$$

Имея в виду (1.7), исключая  $B(x)$  из (1.8) и (2.3), получим следующее интегральное уравнение Фредгольма второго рода:

$$G(\gamma) = Q(\gamma) + \int_0^{\infty} K(\gamma, \beta) G(\beta) d\beta \quad (2.6)$$

где

$$G(\gamma) = \gamma^2 D(\gamma) \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} \Omega(\gamma) = & \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f_2(x) \sin(\gamma x) dx - \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f_1(x) \cos(\gamma x) dx - \\ & - \frac{2}{\pi} \int_0^a f_2(y) e^{-\gamma y} dy - \frac{2}{\pi} \gamma \int_0^a f_2(y) y e^{-\gamma y} dy - \\ & - \frac{2}{\pi} \gamma \int_0^a r \varphi(r) [I_0(\gamma r) - L_0(\gamma r)] dr - \\ & - \frac{2}{\pi} \gamma^2 \int_0^a r^2 \varphi(r) \left[ I_1(\gamma r) - L_1(\gamma r) - \frac{2}{\pi} \right] dr \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned} K(\gamma, \beta) = & \frac{4}{\pi} \gamma^2 \beta \int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2 + \beta^2)^2} \int_0^a r^2 J_0(\alpha r) \left[ I_1(\beta r) - L_1(\beta r) - \frac{2}{\pi} \right] dr + \\ & + \frac{4}{\pi} \gamma^2 \int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2 + \gamma^2)^2} \int_0^a r J_0(\alpha r) [I_0(\beta r) - L_0(\beta r)] dr \end{aligned} \quad (2.9)$$

При получении формул (2.8) было учтено, что [9]

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{x^2 J_0(\alpha r)}{(x^2 + \gamma^2)^2} dx &= \frac{\pi}{4} \frac{1}{\gamma} [I_0(\gamma r) - L_0(\gamma r)] + \frac{\pi r}{4} \left[ I_1(\gamma r) - L_1(\gamma r) - \frac{2}{\pi} \right] \\ \int_0^{\infty} \frac{x \sin(\alpha y)}{(x^2 + \gamma^2)^2} dx &= \frac{\pi}{4\gamma} y e^{-\gamma y} \end{aligned}$$

Имея в виду асимптотическое разложение функций Бесселя и Струве для больших  $z$

$$\begin{aligned} I_0(z) - L_0(z) &= \frac{2}{\pi} \left[ \frac{1}{z} + \frac{1}{z^3} - \frac{3}{2} \frac{e^{-z}}{z} - \frac{e^{-z}}{z^2} - \frac{e^{-z}}{z^3} - \dots \right] \\ I_1(z) - L_1(z) &= \frac{2}{\pi} \left[ 1 - \frac{1}{z^2} + \frac{e^{-z}}{2} + \frac{e^{-z}}{z} + \frac{e^{-z}}{z^2} + \dots \right] \end{aligned}$$

находим

$$\lim_{z \rightarrow \infty} [I_0(z) - L_0(z)] = 0, \quad \lim_{z \rightarrow \infty} z [I_0(z) - L_0(z)] = \frac{2}{\pi}$$

$$\lim_{z \rightarrow \infty} [I_1(z) - L_1(z)] = \frac{2}{\pi}, \quad \lim_{z \rightarrow \infty} \left[ I_1(z) - L_1(z) - \frac{2}{\pi} \right] = 0 \quad (2.10)$$

$$\lim_{z \rightarrow \infty} z^2 \left[ I_1(z) - L_1(z) - \frac{2}{\pi} \right] = -\frac{2}{\pi}$$

Используя (2.10), получим, что  $\lim_{\gamma \rightarrow \infty} \Omega(\gamma)$  ограничен сверху.

Покажем, что интегральное уравнение (2.6) можно решить методом последовательных приближений.

Нетрудно видеть, что

$$|K(\gamma, \beta)| < \frac{4}{\pi} \gamma^2 \beta \int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2 + \gamma^2)^2} \int_0^{\infty} r^2 J_0(xr) \left[ I_1(\beta r) - L_1(\beta r) - \frac{2}{\pi} \right] dr + \\ + \frac{4}{\pi} \gamma^2 \int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2 + \gamma^2)^2} \int_0^{\infty} r J_0(xr) [I_0(\beta r) - L_0(\beta r)] dr$$

Определив значения следующих интегралов:

$$\int_0^{\infty} r^2 J_0(xr) \left[ I_1(\beta r) - L_1(\beta r) - \frac{2}{\pi} \right] dr = \frac{2}{\pi} \frac{1}{\alpha} \frac{\alpha^2 - \beta^2}{(\alpha^2 + \beta^2)^2}$$

$$\int_0^{\infty} r J_0(xr) [I_0(\beta r) - L_0(\beta r)] dr = \frac{2}{\pi} \frac{\beta}{\alpha} \frac{1}{\alpha^2 + \beta^2}$$

$$|K(\gamma, \beta)| < \frac{16}{\pi^2} \gamma^2 \beta \int_0^{\infty} \frac{x^3 dx}{(x^2 + \gamma^2)^2 (\alpha^2 + \beta^2)^2}$$

и учитывая [9]

$$\int_0^{\infty} \frac{\beta d\beta}{(\alpha^2 + \beta^2)^2} = \frac{1}{2\alpha^2}$$

имеем

$$\int_0^{\infty} |K(\gamma, \beta)| d\beta < \frac{16}{\pi^2} \gamma^2 \int_0^{\infty} \frac{x^3 dx}{(x^2 + \gamma^2)^2} \int_0^{\infty} \frac{\beta d\beta}{(\alpha^2 + \beta^2)^2} = \frac{4}{\pi^2} < 1$$

Решая интегральное уравнение (2.6) методом последовательных приближений, получаем выражение  $G(\gamma)$ . Далее по формулам (2.7), (2.5), (2.3), (1.7), (1.6) последовательно можно определить все искомые функции.

Напряжения и перемещения по известным формулам (1.5) будут определены в любой точке полуплоскости.

В частном случае, когда  $a \rightarrow 0$ , получим известную задачу для полуплоскости без разреза. В этом случае интегральное уравнение (2.6) выпадает, и неизвестная функция  $G(\gamma)$  приравнивается предельному значению свободного члена. Следовательно, решение этой задачи получается в замкнутом виде.

В другом частном случае, когда  $a \rightarrow \infty$ , получим первую основную задачу теории упругости для квадранта. В этом случае интегральное уравнение (2.6) сводится к интегральному уравнению Винера-Хопфа, которое решается точно в квадратурах [8].

### § 3. Численные примеры

Нормальные напряжения вне разреза и перемещения в разрезе на линии  $x = 0$ , выраженные через функции  $G(\beta)$  и  $\varphi(r)$ , имеют вид

$$\begin{aligned} \sigma_x(0, y) = & \frac{2}{\pi} y \frac{\varphi(a)}{\sqrt{y^2 - a^2}} + \frac{y}{\sqrt{y^2 - a^2}} \int_0^{\infty} \left[ \beta a L_1(\beta a) + \frac{2}{\pi} \beta a - \right. \\ & \left. - \beta a I_1(\beta a) - L_0(\beta a) - I_0(\beta a) \right] G(\beta) d\beta - \frac{2}{\pi} y \int_0^a \frac{\varphi'(r) dr}{\sqrt{y^2 - r^2}} + \\ & + \int_0^{\infty} G(\beta) d\beta + y \int_0^a \frac{dr}{\sqrt{y^2 - r^2}} \int_0^{\infty} \beta \left[ \beta r I_0(\beta r) - \beta r L_0(\beta r) - \frac{2}{\pi} + \right. \\ & \left. + I_1(\beta r) - L_1(\beta r) - \frac{2}{\pi} \right] G(\beta) d\beta - \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{f_2(x) x dx}{x^2 + y^2} + \\ & + \int_0^{\infty} G(\beta) (\beta y - 1) e^{-\beta y} d\beta \quad (a < y < \infty) \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} u(0, y) = & \frac{1-y}{E} \int_y^a f_2(y) dy + \frac{4}{\pi E} \int_y^a \frac{r \varphi(r) dr}{\sqrt{r^2 - y^2}} + \\ & + \frac{2}{E} \int_y^a \frac{r dr}{\sqrt{r^2 - y^2}} \int_0^{\infty} \left[ \beta r L_1(\beta r) + \frac{2}{\pi} \beta r - \beta r I_1(\beta r) - \right. \\ & \left. - I_0(\beta r) + L_0(\beta r) \right] G(\beta) d\beta \quad (0 \leq y \leq a) \end{aligned} \quad (3.2)$$



При получении (3.1) и (3.2) были использованы следующие интегралы [9]

$$\int_0^{\infty} e^{-\beta y} \sin(\beta x) d\beta = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

$$\int_0^{\infty} J_0(xr) \sin(zy) dz = \frac{1}{\sqrt{y^2 - r^2}} \quad (0 < r < y)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin(az) \cos(zy)}{a} dz = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & y < z < a \\ 0 & 0 < z < y \end{cases}$$

$$\int_0^{\infty} J_0(xr) \cos(zy) dz = \frac{1}{\sqrt{r^2 - y^2}} \quad (0 < y < r)$$

В качестве примера рассмотрим

$$\text{I. } f_1(x) = \begin{cases} -q & 0 < x < b \\ 0 & b < x < \infty \end{cases}, \quad f_2(x) = f_1(y) = f_2(y) = 0$$

$$\text{II. } f_2(x) = \begin{cases} -q & 0 < x < b \\ 0 & b < x < \infty \end{cases}, \quad f_1(x) = f_1(y) = f_2(y) = 0$$

$$\text{III. } f_1(y) = -q, \quad f_1(x) = f_2(x) = f_2(y) = 0$$

$$\text{IV. } f_1(x) = \begin{cases} -q & 0 < x < b \\ 0 & b < x < \infty \end{cases}, \quad f_1(y) = -q, \quad f_2(x) = f_2(y) = 0$$

$$\text{V. } f_2(x) = \begin{cases} -q & 0 < x < b \\ 0 & b < x < \infty \end{cases}, \quad f_1(y) = -q, \quad f_1(x) = f_2(y) = 0$$

$$\lambda = \frac{b}{a} = 0.05; 0.1; 0.5; 10.$$

Некоторые значения для каждого случая нагрузки, напряжений  $\frac{\sigma_x(0, y)}{q}$  и перемещений  $\frac{u(0, y)E}{qa}$ , вычисленные по формулам (3.1) и (3.2) в различных точках вертикальной оси полуплоскости в зависимости от  $\lambda = \frac{b}{a}$ , приведены в табл. 1, 2 (случай I), 3, 4 (случай II), 5, 6 (случай III), 7, 8 (случай IV), 9, 10 (случай V).

$$\sigma_x(0, y)$$

 $q$ 

Таблица 1

$\frac{y}{a}$	$\lambda$			
	0.05	0.1	0.5	10
1.25	-0.00566	-0.01137	-0.06298	-0.22521
1.50	0.00634	0.01264	0.05526	0.11815
1.75	0.01195	0.02386	0.11056	0.22831
2.00	0.01528	0.03050	0.14344	0.27329
2.25	0.01744	0.03483	0.16495	0.29259
2.50	0.01893	0.03781	0.17979	0.30024
2.75	0.01999	0.03992	0.19039	0.30231
3.00	0.02076	0.04147	0.19816	0.30171

$$u(0, y) E$$

 $qa$ 

Таблица 2

$\frac{y}{a}$	$\lambda$			
	0.05	0.1	0.5	10
0	-0.04974	-0.09943	-0.48726	-1.75115
0.125	-0.04316	-0.08616	-0.42316	-1.57542
0.250	-0.03810	-0.07616	-0.37384	-1.43929
0.375	-0.03340	-0.06677	-0.32797	-1.30794
0.500	-0.02876	-0.05750	-0.28270	-1.16938
0.625	-0.02402	-0.04802	-0.23627	-1.03159
0.750	-0.01892	-0.03784	-0.18632	-0.83105
0.875	-0.01292	-0.02583	-0.12732	-0.58997

$$\sigma_x(0, y)$$

 $q$ 

Таблица 3

$\frac{y}{a}$	$\lambda$			
	0.05	0.1	0.5	10
1.25	0.55463	0.84586	1.74954	6.83931
1.50	0.53986	0.81007	1.53434	5.14483
1.75	0.53295	0.79370	1.43777	4.34012
2.00	0.52891	0.78421	1.38233	3.83484
2.25	0.52630	0.77809	1.34692	3.47701
2.50	0.52451	0.77390	1.32289	3.20594
2.75	0.52322	0.77090	1.30580	2.99142
3.00	0.52227	0.76868	1.29346	2.81633

$$\frac{u(0, y) E}{qa}$$

Таблица 4

$\frac{y}{a}$	$\lambda$		
	0.05	0.1	0.5
0	0.09596	0.24304	1.23261
0.125	0.06524	0.17878	1.01984
0.250	0.04964	0.14158	0.85720
0.375	0.03929	0.11526	0.73688
0.500	0.03125	0.09343	0.62023
0.625	0.02447	0.07415	0.52542
0.750	0.01836	0.05466	0.39459
0.875	0.01199	0.03708	0.26613

Таблица 5

$\frac{y}{a}$	$\frac{\sigma_x(0, y)}{q}$
1.25	1.64273
1.50	1.27534
1.75	1.13266
2.00	1.05767
2.25	1.01246
2.50	0.98234
2.75	0.96263
3.00	0.94810

Таблица 6

$\frac{y}{a}$	$\frac{u(0, y) E}{qa}$
0	2.18434
0.125	2.14229
0.250	2.07423
0.375	1.97320
0.500	1.83322
0.625	1.64447
0.750	1.38742
0.875	1.01159

$$\frac{\sigma_x(0, y)}{q}$$

Таблица 7

$\frac{y}{a}$	$\lambda$			
	0.05	0.1	0.5	10
1.25	1.64553	1.63982	1.58821	0.12458
1.50	1.30551	1.31181	1.35442	0.22877
1.75	1.17554	1.18745	1.27414	0.29844
2.00	1.10792	1.12314	1.23607	0.35428
2.25	1.06735	1.08475	1.21486	0.40239
2.50	1.04089	1.05977	1.20175	0.44545
2.75	1.02262	1.04256	1.19302	0.48486
3.00	1.00948	1.03019	1.18688	0.52144

$$\frac{u(0, y) E}{qa}$$

Таблица 8

$\frac{y}{a}$	$\lambda$			
	0.05	0.1	0.5	10
0	2.06760	2.01791	1.63009	0.36620
0.125	2.04171	1.99859	1.66172	0.50971
0.250	1.98607	1.94801	1.65034	0.58429
0.375	1.89649	1.86313	1.60193	0.62196
0.500	1.76768	1.73894	1.51375	0.62707
0.625	1.59020	1.56620	1.37796	0.59963
0.750	1.34503	1.32612	1.17764	0.53291
0.875	0.98291	0.97000	0.86851	0.40586

$$\frac{z_x(0, y)}{q}$$

Таблица 9

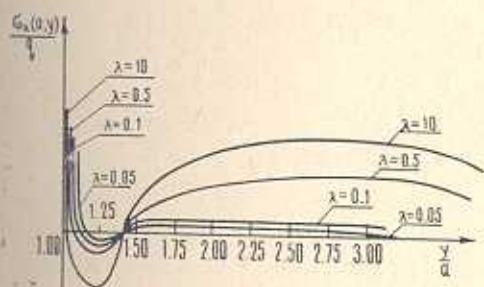
$\frac{y}{a}$	$\lambda$			
	0.05	0.1	0.5	10
1.25	2.19680	2.48758	3.38984	8.48454
1.50	1.81764	2.09300	2.85313	6.60144
1.75	1.66547	1.93797	2.63528	5.73726
2.00	1.59128	1.85584	2.51739	5.20558
2.25	1.54400	1.80404	2.44481	4.83349
2.50	1.51306	1.77336	2.39665	4.55351
2.75	1.49171	1.75076	2.36306	4.33281
3.00	1.47641	1.73452	2.33873	4.15307

$$\frac{u(0, y) E}{qa}$$

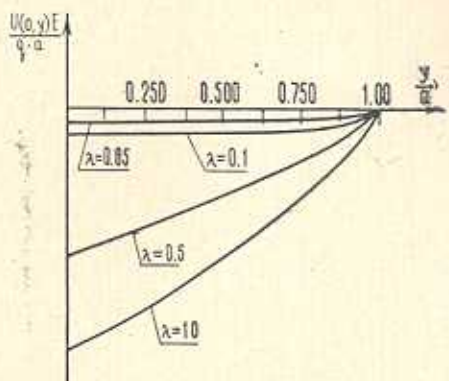
Таблица 10

$\frac{y}{a}$	$\lambda$			
	0.05	0.1	0.5	10
0	2.26733	2.39092	3.22303	8.61506
0.125	2.19633	2.28958	2.99471	7.80969
1.250	2.11404	2.18815	2.78437	7.04288
0.375	2.00391	2.06433	2.58185	6.46728
0.500	1.85712	1.90599	2.34364	5.79522
0.625	1.66284	1.70146	2.05874	4.97803
0.750	1.40100	1.43018	1.71064	4.11453
0.875	1.02038	1.03955	1.22931	2.92030

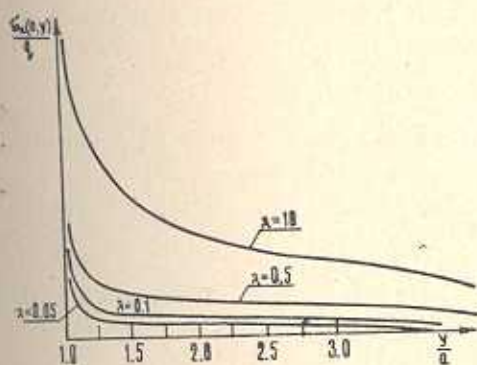
Для наглядного представления закона распределения нормальных напряжений  $\frac{\sigma_x(0, y)}{q}$  вне разреза и перемещений  $\frac{u(0, y)E}{qa}$  на разрезе приведены эюры этих величин: фиг. 2, 3 (случай I), 4, 5 (случай II), 6, 7 (случай III), 8, 9 (случай IV), 10, 11 (случай V). Следу-



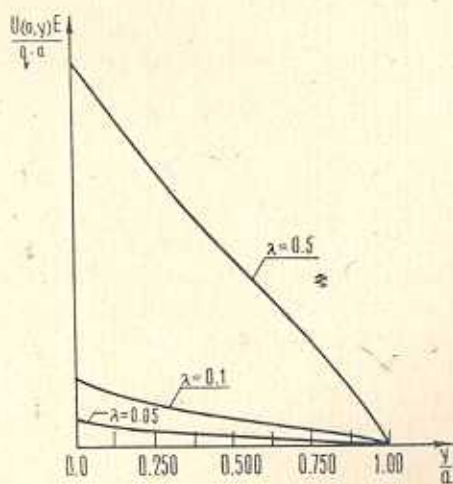
Фиг. 2



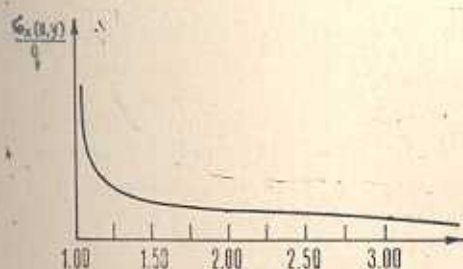
Фиг. 3



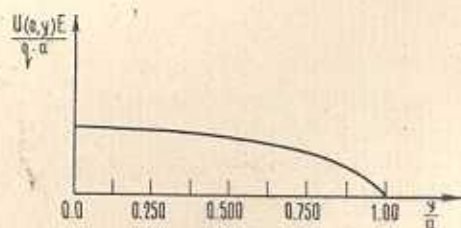
Фиг. 4



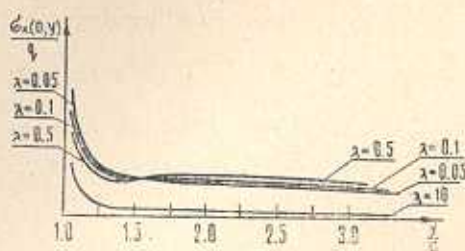
Фиг. 5



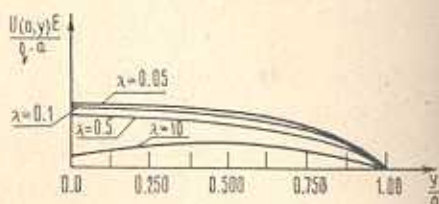
Фиг. 6



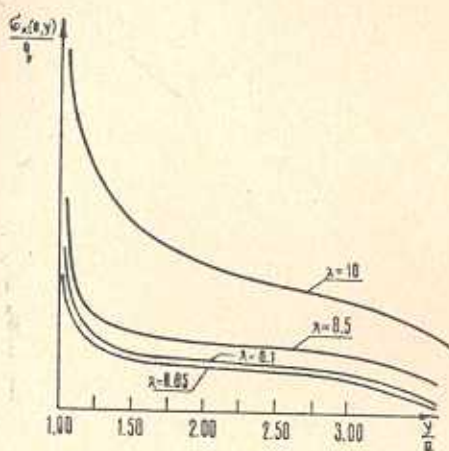
Фиг. 7



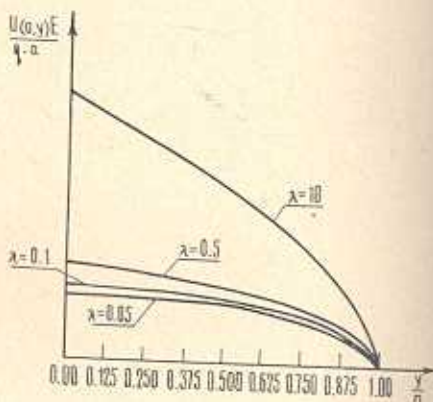
Фиг. 8



Фиг. 9



Фиг. 10.



Фиг. 11

ет отметить, что эти эпюры составлены приближенно на основании расчетов, произведенных только для нескольких точек оси.

Числовые результаты получены на ЭВЦМ „Наири“ в Институте механики АН Арм. ССР.

Институт механики АН Арм. ССР  
Ереванский политехнический институт им. К Маркса

Поступила 3 I 1972

Վ. Ս. ՏՈՆՈՅԱՆ, Ս. Ա. ՄԵԼՔՈՒՄՅԱՆ

ՈՒՂՂԱՋԻԳ, ՎԵՐՋԱՎՈՐ ՃԵՂՔՈՎ ԿԻՍԱՀԱՐԹՈՒԹՅԱՆ ՄԻ ԽՆԴՐԻ ՄԱՍԻՆ

### Ա մ փ ո փ ու մ

Աշխատանքում դիտարկվում է հորիզոնական եզրից սկսած ուղղահիղ, վերջավոր հեղրով առաձգական իզոտրոպ կիսահարթության սիմետրիկ խնդիրը: Ուղղահիղ հեղրի ասիմետրիկ և հորիզոնական եզրի վրա տրված է լարումների վեկտորը:

Խնդիրը լուծված է Ֆուրյեի մեթոդով: Ինտեգրման գործակիցների որոշումը բերվել է «զույգ» ինտեգրալ հավասարման լուծման, որն իր հերթին հան-

գեղ է Ֆրեդհոլմի 2-րդ սեռի ինտեգրալ հավասարման լուծման  
 ծույց է որված, որ վերջին հավասարումը կարելի է լուծել հաջորդական  
 մոտավորութունների մեթոդով:  
 Բերված է թվային օրինակ:

## A PROBLEM FOR A SEMIPLANE WITH A VERTICAL FINITE CRACK

V. S. TONOYAN, S. A. MELKUMIAN

### S u m m a r y

The present paper deals with a problem of the theory of elasticity for an isotropic semiplane with a vertical finite crack from the horizontal boundary. The stress vectors on the horizontal boundary of the semiplane and in the crack are specified. The problem is solved by the Fourier method. The solution of the problem is reduced to the dual integral equations which in their turn are reduced to Fredholm's integral equation of the second kind. It is shown that the last-mentioned equation can be solved by the consecutive approximation method. A numerical example is given.

### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Wigglesworth L. A.* Stress distribution in a notched plate. *Mathematica*, vol. 4, 1957, p. 76—96.
2. *Irwin G. R.* The crack extension force for a crack at a free surface boundary. *NRL Report*, № 5120, 1958.
3. *Роква Ж. П.* О напряжениях в упругой полуплоскости с надрезом. *Сообщения АН Груз. ССР*, т. 44, № 3, 1966.
4. *Тимошенко С. П.* Теория упругости. ОНТИ, М., 1937.
5. *Баблюк А. А.* Решение некоторых парных интегральных уравнений. *ПММ*, т. 28, вып. 6, 1964.
6. *Sneddon I. N.* The elementary solution of dual integral equation. *Proc. Glasgow Math. Assoc.*, vol. 4, 1960, 108—110.
7. *Тоноян В. С.* О решении симметричной контактной задачи для полуплоскости с включением. *Изв. АН Арм. ССР, Механика*, т. XXI, № 2, 1968.
8. *Тоноян В. С., Мелкумян С. А.* Об одной задаче для полуплоскости с вертикальным полубесконечным разрезом. *Изв. АН Арм. ССР, Механика*, т. XXIV, № 4, 1971.
9. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и производных. *Физматгиз*, М., 1969.