ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXV, № 2, 1972 Механика

Ю. М. ПОЧТМАН, А. А. КОЛЕСНИЧЕНКО

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ОДНОГО КЛАССА ЗАДАЧ МЕХАНИКИ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ МЕТОДОМ ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Многие актуальные вопросы механики сплошной среды, связанные с исследованием устойчивости земляных откосов, оснований, массивов горных пород, можно сформулировать в терминах вариационного исчисления [1, 2]. Однако, на пути численной реализации этих задач классическими вариационными методами при наличии особенностей типа ограничений на оптимизируемые функции, излома контура и др. встречаются серьезные затруднения [3]. В настоящей статье показано, что для решения такого класса задач весьма эффективным является применение метода динамического программирования [4], позволяющего успешно преодолеть отмеченные трудности. Схема использования метода иллюстрируется применительно к проблеме устойчивости откосов различного профиля. Дается сравнительный анализ решений вариационным методом и методом динамического программирования.

1. Решение вариационных задач об устойчивости неоднородных откосов в общем случае может быть сведено [5] к определению минимума функционала

$$k = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} F^{(i)}(x, y, y')\,dx}{\sum\limits_{i=1}^{n}\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} \Phi^{(i)}(x, y, y')\,dx} \tag{1}$$

где $F^{(i)}$, $\Phi^{(i)}$ — n пар достаточно гладких функций от x, y, y'. В [5] показано, что кривая $y(x)$, дающая экстремум выражению (1), должна удовлетворять системе, состоящей из дифференциальных уравнений вида

$$(F^{(i)} - t\Phi^{(i)})_y - \frac{d}{dx}(F^{(i)} - t\Phi^{(i)})_{y'} = 0 \tag{2}$$

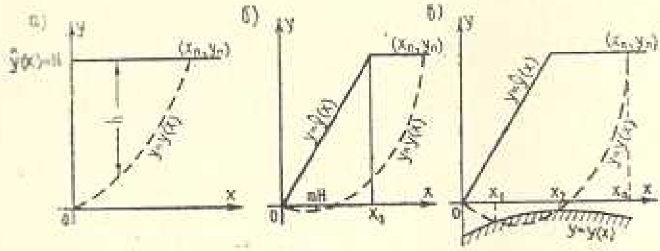
и интегрального уравнения

$$\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} (F^{(i)} - t\Phi^{(i)})\,dx = 0 \tag{3}$$

в которых t — некоторый числовой параметр. Для случая вертикального откоса (фиг. 1а), как обычно, предполагаем, что поверхность скольжения пересекает откос у подошвы; один конец кривых скольжения $y = y(x)$ закреплен, а второй лежит на заданной кривой, то есть

$$y(0) = 0, \qquad y(x_n) = \hat{y}(x_n) = H \tag{4}$$

Математически задача сводится к минимизации (1) на кривых, исходящих из данной точки (0, 0) и встречающих данную кривую $\hat{y} = H$. Для решения этой задачи вариационным методом следует найти общий интеграл уравнения (2) и определить постоянные интегрирования, па-



Фиг. 1

раметр t и координату x_n из условий (3), (4) и условия трансверсальности в точке (x_n, y_n). Покажем решение этой задачи методом динамического программирования. Согласно [1], функционал (1) в данном случае принимает вид

$$k = \frac{\int\limits_{x_0}^{x_n} \left(\frac{h \operatorname{tg} \varphi}{\sqrt{1 + y'^2}} + \frac{c}{\gamma} \sqrt{1 + y'^2} \right) dx}{\int\limits_{x_0}^{x_n} \frac{h y'}{\sqrt{1 + y'^2}} dx} \tag{5}$$

где φ, c и γ — геотехнические характеристики грунта. Динамическое программирование позволяет исключить из рассмотрения уравнение (2). Искомую кривую скольжения $y(x)$, x_n и k ищем в процессе минимизации функционала (3), который запишется в этом случае в виде

$$R = \int\limits_{0}^{x_n} \left(\frac{h \operatorname{tg} \varphi}{\sqrt{1 + y'^2}} + \frac{c}{\gamma} \sqrt{1 + y'^2} - k \frac{h y'}{\sqrt{1 + y'^2}} \right) dx \tag{6}$$

Задача сводится к минимизации функционала (6) при условии (4); при этом k должно принимать наименьшее значение.

Рассматривая процесс скольжения как многостадийный процесс принятия решений, разбиваем его на N стадий длиной Δ, так что $N\Delta = x_n$. Отсчет стадий будем вести в прямом направлении. Вместо непрерывной вариационной задачи рассмотрим ее дискретную форму: минимизировать

$$R_N(y_{i+1})=\sum_{i=0}^{N-1}\frac{(\overset{*}{y}_i-y_i)\operatorname{tg}\varphi+\frac{c}{\gamma}\left[1+\left(\frac{y_{i+1}-y_i}{\Delta}\right)^2\right]}{\sqrt{1+\left(\frac{y_{i+1}-y_i}{\Delta}\right)^2}}-$$

$$-\frac{k\frac{y_{i+1}-y_i}{\Delta}(\overset{*}{y}_i-y_i)}{\sqrt{1+\left(\frac{y_{i+1}-y_i}{\Delta}\right)^2}}\Delta \tag{7}$$

по всем y_i, удовлетворяющим условиям

$$y(0)=0,\quad y(N\Delta)=\overset{*}{y}_N \tag{8}$$

где

$$y(i\Delta)=y_i,\quad y_i'=\frac{y_{i+1}-y_i}{\Delta}$$

Пусть $f_N(y_{i+1})=\min\limits_{\{y_i\}}R_N(y_{i+1})$—минимальное значение суммы (7), полученное в результате N—шагового процесса, начинающегося с состояния y_{i+1}, при использовании оптимальной стратегии, для $N=2, 3,\cdots$. Тогда, используя „принцип оптимальности" Р. Беллмана, получим следующие функциональные уравнения:

$$\left.\begin{aligned}
f_N(y_{i+1})&=\min_{\{y_i\}}\left\{\frac{(\overset{*}{y}_i-y_i)\operatorname{tg}\varphi+\frac{c}{\gamma}\left[1+\left(\frac{y_{i+1}-y_i}{\Delta}\right)^2\right]}{\sqrt{1+\left(\frac{y_{i+1}-y_i}{\Delta}\right)^2}}-\right.\\
&\left.\quad-\frac{k(\overset{*}{y}_i-y_i)\frac{y_{i+1}-y_i}{\Delta}}{\sqrt{1+\left(\frac{y_{i+1}-y_i}{\Delta}\right)^2}}\Delta+f_{N-1}(y_i)\right\}\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
f_1(y_{i+1})&=\frac{(\overset{*}{y}_i-0)\operatorname{tg}\varphi+\frac{c}{\gamma}\left[1+\left(\frac{y_{i+1}-0}{\Delta}\right)^2\right]}{\sqrt{1+\left(\frac{y_{i+1}-0}{\Delta}\right)^2}}-\\
&\quad-\frac{k(\overset{*}{y}_i-0)\frac{y_{i+1}-0}{\Delta}}{\sqrt{1+\left(\frac{y_{i+1}-0}{\Delta}\right)^2}}\cdot\Delta
\end{aligned}\right| \tag{9}$$

$$N = 1, 2, \cdots, \quad y_i \in Y, \quad i = 0, 1, 2, \cdots$$

Соотношения (9) определяют рабочий алгоритм для вычислений. Разобьем плоскость (x, y) на части сеткой с шагом Δx и Δy. Предполагается, что движение на каждой стадии происходит по прямой линии. Таким образом, допустимыми линиями скольжения считаются ломаные с вершинами в узлах сетки, удовлетворяющие условиям (8) и определяемые набором ординат $[y_0^*, y_1^*, y_2^*, \cdots y_N^*]$. Такие наборы называются стратегиями. Вычислительная процедура состоит из рассмотрения каждого значения y_{i+1} на каждой стадии и нахождения значения $f_N(y_{i+1})$ вдоль наклонных линий с помощью соотношений (9). Для определения искомых величин имеем следующий алгоритм. Решается система (9) при произвольном значении k. Для каждого фиксированного k получается, с учетом подвижности правого конца, множество кривых, на которых подсчитывается значение функционала (6), равное $f_N(y_{i+1})$ и, следовательно, находится величина x_n, для которого $f_N(y_{i+1})$ имеет наименьшее значение.

Для двух первоначальных выборов k никаких рекомендаций нет [4], однако существует эффективная вычислительная схема для следующих приближений. Например, если уже испробованы два значения k_1 и k_2 и найдены значения $f_{N_1}(y_{i+1})$ и $f_{N_2}(y_{i+1})$, то следующее значение k_3 вычисляется, исходя из того, что $f_{N_3}(y_{i+1}) = 0$:

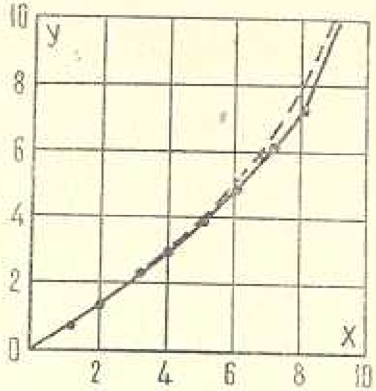
$$k_3 = \frac{k_2 - k_1}{f_{N_2}(y_{i+1}) - f_{N_1}(y_{i+1})}\,[0 - f_{N_1}(y_{i+1})] + k_1 \tag{10}$$

Заметим, что при использовании этого алгоритма нет надобности хранить в ЭЦВМ и выводить информацию о политике, полученную при предварительных вычислениях, цель которых—определить то значение k, при котором выполняется (3). После того, как найдено $k_{\min}$, вычисления повторяют, выводя таблицы оптимальных политик, и определяют искомую кривую скольжения.

2. Для численной иллюстрации предлагаемого способа рассмотрим следующую задачу. Определить критическую линию скольжения для откоса (фиг. 1 а) при таких данных: $\overset{*}{y} = 10$ *м*, $c = 5.0$ *т/м²*, $\gamma = 2.0$ *т/м³*, $\varphi = 0$. Расчет проводился на ЭВМ „Мир“. При $\Delta x = 1$ *м* и $\Delta y = 0.25$ *м* получена критическая линия скольжения (показанная на фиг. 2 сплошной линией), определяемая стратегией [0, 0.75, 1.5, 2.25, 3, 4, 5, 6.25, 7.5, 10] и соответствующий ей коэффициент $k_{\min} = 1$. Вариационный метод [1] дает для этой задачи $k = 0.95$ и кривую скольжения, показанную на этом же рисунке пунктиром.

3. В случае откоса ломаного профиля (фиг. 1 б) особенность задачи состоит в переломе контура в точке $x_1 = mH$. Решение вариационным методом усложняется, так как требует рассмотрения двух уравнений ($n = 2$) экстремалей (2) на отрезках $[0, x_1]$ и $[x_1, x_2]$ и вы-

полнения условия преломления в точке $x = x_1$. В [2] был предложен метод сглаживания и линеаризации для решения такого вида задач. Динамическое программирование и в этом случае не испытывает затруднений. Напротив, вычислительная работа уменьшается, так как уменьшается количество возможных состояний на первых стадиях. Функциональные уравнения выводятся так же, как и в п. 1, полностью сохраняется алгоритм вычислений, причем не требуется деление откоса на два участка.



Фиг. 2

4. Рассмотрим неоднородный откос (фиг. 1 в), подстилаемый прочным основанием (например, материком) с поверхностью $y = \overline{y}(x)$. Здесь мы имеем дело с вариационной задачей, решение которой будет достигаться на экстремалях, имеющих угловые точки. При решении такого типа задач вариационным методом необходимо делить откос на три участка ($n = 3$), рассматривать 3 пары функций $F^{(i)}$, $\Phi^{(i)}$, а искомую кривую скольжения искать на двух участках и учитывать условия преломления в точках x_1 и x_2 [5]. Для использования метода динамического программирования нет необходимости рассматривать три участка $(0, x_1)$, (x_1, x_2), (x_2, x_3) и, следовательно, в (1) полагаем $n = 1$. Таким образом, по-прежнему алгоритм остается таким же, как и в предыдущих случаях; требуется лишь выполнение нового условия $\overline{y} \leqslant y$, которое не вызывает никаких затруднений в применении динамического программирования, а лишь уменьшает объем вычислений.

В заключение отметим, что предлагаемый способ использования динамического программирования, с некоторыми модификациями, может быть распространен и на многие другие встречающиеся в инженерной практике задачи механики грунтов и сплошной среды.

Днепропетровский инженерно-строительный институт

Поступила 30 IV 1971

Յու. Մ. ՊՈՉՏՄԱՆ, Ա. Լ. ԿՈԼԵՍՆԻՉԵՆԿՈ

ՀՈՂ ՄԻՋԱՎԱՅՐԻ ՄԵԽԱՆԻԿԱՅԻ ԽՆԴԻՐՆԵՐԻ ՄԻ ԴԱՍԻ ԹՎԱՅԻՆ ԼՈՒԾՈՒՄԸ ԴԻՆԱՄԻԿ ԾՐԱԳՐԱՎՈՐՄԱՆ ՄԵԹՈԴՈՎ

Ամփոփում

Դիտարկվում է դինամիկ ծրագրավորման մեթոդի կիրառումը հող և սորուն միջավայրերի մեխանիկայի մի քանի սահմանափակումներով վարիացիոն խնդիրների թվային լուծման համար։ Խնդիրների դիտարկվող դասի համար ստացված է Ռ. Բելմանի ֆունկցիոնալ հավասարումների սիստեման։

NUMERICAL SOLUTION OF ONE CLASS PROBLEMS ON MECHANICS OF SOLID MEDIUM BY DINAMIC PROGRAMMING

YU. M. POCHTMAN, A. L. KOLESNICHENKO

Summary

The use of dynamic programming for numerical solution of some variational problems on mechanics of solid and loose medium with restrictions is discussed. A system of functional equations due to R. Bellman for the above problems is presented.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Дорфман А. Г.* Вариационный метод исследования устойчивости откосов. В сб. „Вопросы геотехники", № 9, 1965, 17—25, Изд. Транспорт, Москва.
2. *Дорфман А. Г.* Методы решения вариационных задач и их применение в механике грунтов. В сб. „Вопросы геотехники", № 16, 1969, 23—26, изд. Будiвельник, Киев.
3. *Курант Р., Гильберт Д.* Методы математической физики. ГИТТА, М.—Л., 1951.
4. *Беллман, Дрейфус С.* Прикладные задачи динамического программирования. Изд. Наука, М., 1965.
5. *Дорфман А. Г.* Теория устойчивости неоднородных откосов. В сб. „Вопросы геотехники", № 16, 1969, 26—34, изд. Будiвельник, Киев.