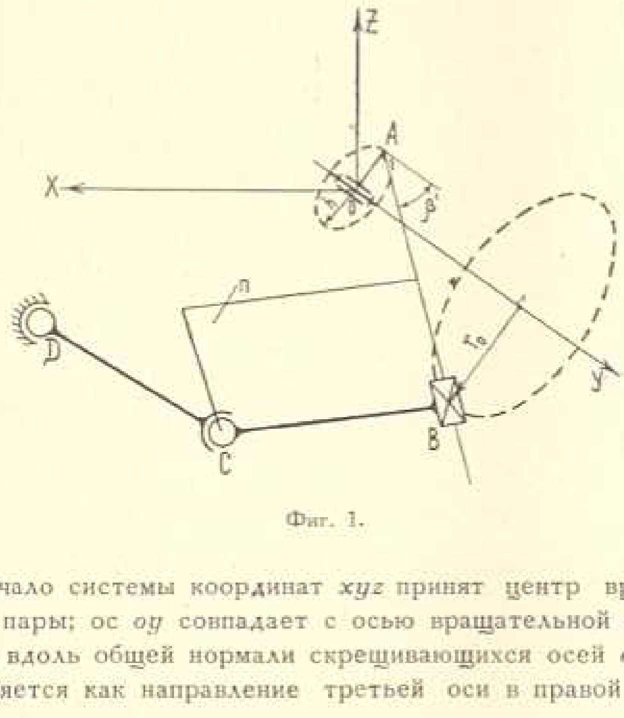
ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXV, № 2, 1972 Механика

А. А. ОГАНЕСЯН

# К ВОПРОСУ СИНТЕЗА ПРОСТРАНСТВЕННОГО ЧЕТЫРЕХЗВЕННОГО МЕХАНИЗМА (ВПСС) ПО НАПРАВЛЕНИЯМ НОРМАЛИ ШАТУННОЙ ПЛОСКОСТИ

Рассмотрим аналитический метод решения задачи синтеза по направлениям нормали шатунной плоскости пространственного механизма с одной вращательной, одной поступательной и двумя сферическими парами (фиг. 1).




Фиг. 1.

За начало системы координат $xyz$ принят центр вращения вращательной пары; ос $oy$ совпадает с осью вращательной пары; ось $oz$ направлена вдоль общей нормали скрещивающихся осей $oy$ и $AB$; ось $ox$ определяется как направление третьей оси в правой системе координат.

Механизм определяется следующими девятью параметрами:

$h = OA$ — наикратчайшее расстояние между двумя скрещивающимися осями $oy$ и $AB$,

$\beta'$ — угол между двумя скрещивающимися осями $oy$ и $AB$,

$r_0$ — радиус вращения начального положения точки $B$,

$\alpha$; $\beta$ — направляющие косинусы шатуна $BC$,

$l$ — длина шатуна $BC$,

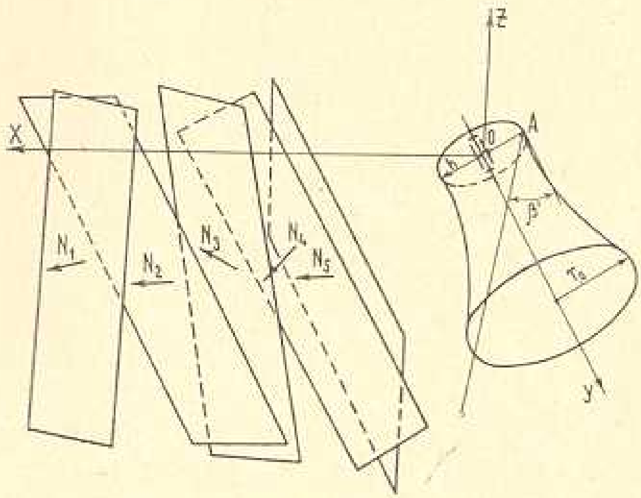
$x_D$, $y_D$, $z_D$ — координаты точки $D$.

В работе [1] при решении задачи синтеза пространственного механизма $BBCC$ по пяти направлениям нормали шатунной плоскости, углы Эйлера $\alpha_П$; $\beta_П$ были переменные. Если один из этих углов принимать постоянным, то вторая вращательная пара в механизме $BBCC$ превращается в поступательную. Следовательно, решение поставленной задачи синтеза механизма ВПСС—актуально.

**Постановка задачи**

Решим задачу синтеза указанного четырехзвенника по следующим условиям:

1. Заданы направления нормали шатунной плоскости $N_i$ ($\cos\alpha_{Пi}$, $\cos\beta_{Пi}$) в пяти положениях (фиг. 2).




Фиг. 2.

Положение шатунной плоскости задается взаимно перпендикулярными пересекающимися прямыми $AB$ и $BC$ (фиг. 1). Чтобы не нарушилась последовательность занимаемых положений плоскости, надо учесть следующие условия:

$$\alpha_{П1} > \alpha_{П2} > \cdots > \alpha_{П5}$$

или

$$\alpha_{П1} < \alpha_{П2} < \cdots < \alpha_{П5}$$

где

$$\beta_{П1} = \beta_{П2} = \cdots = \beta_{П5} = \text{const}$$

2. Даны угол $\beta'$ и кратчайшее расстояние $h$ между двумя скрещивающимися прямыми $oy$ и $AB$. При выборе угла $\beta'$ нужно учесть, что $\beta' = (90^\circ - \beta_П) \div (90^\circ + \beta_П)$.

3. Даны радиусы вращения $r_i$ точки $B_i$ в соответствующих положениях. Направляющие косинусы прямых $AB$ и $BC$ определяем по формулам:

$$\cos\alpha_i'\cos\alpha_{IIi}+\cos\beta'\cos\beta_{II}+\cos\gamma_i'\cos\gamma_{IIi}=0$$
$$\cos^2\alpha_i'+\cos^2\beta'+\cos^2\gamma_i'=1 \tag{1}$$
$$i=1\div 5$$

$$\cos\alpha_i'\cos\alpha_i+\cos\beta'\cos\beta+\cos\gamma_i'\cos\gamma_i=0$$
$$\cos\alpha_i\cos\alpha_{IIi}+\cos\beta\cos\beta_{II}+\cos\gamma_i\cos\gamma_{IIi}=0 \tag{2}$$
$$\cos^2\alpha_i+\cos^2\beta+\cos^2\gamma_i=1$$
$$i=1\div 5$$

Имея для каждого положения радиус вращения $r_i$ (точки $B_i$), определяем координаты $B_{xi}$; $B_{zi}$ из системы уравнений:

$$B_{xi}^2+B_{zi}^2=r_i^2$$
$$h=\frac{|B_{xi}\cos\gamma_i'-B_{zi}\cos\alpha_i'|}{\sqrt{1-\cos^2\beta'}} \tag{3}$$

а ординаты $B_{yi}$ — из уравнений однополого гиперболоида вращения

$$B_{xi}^2-B_{yi}^2+B_{zi}^2=h^2 \tag{4}$$

Координаты точки $C$ определяем из уравнений

$$\left.\begin{aligned} C_{xi}&=B_{xi}\pm l\cos\alpha_i\\ C_{yi}&=B_{yi}\pm l\cos\beta\\ C_{zi}&=C_{zi}\pm l\cos\gamma_i \end{aligned}\right\} \tag{5}$$
$$i=1\div 5$$

Центр вращения точки $C$ находится в плоскости, перпендикулярной к отрезкам между точками $C_i$.

Геометрическое место центров кривизны двух положений точки $C_i$ есть плоскость, уравнение которой будет:

$$(C_{x(i+1)}-C_{xi})(2x-C_{xi+1}-C_{xi})+(C_{yi+1}-C_{yi})(2y-C_{yi+1}-C_{yi})+$$
$$+(C_{z(i+1)}-C_{zi})(2z-C_{z(i+1)}-C_{zi})=0 \tag{6}$$
$$i=1,\ 2\cdots n$$

где $n$ — число заданных направлений нормали шатунной плоскости. Подставляя выражение (5) в уравнение (6) при заданных пяти направлениях нормалей, получаем четыре уравнения следующего вида:

$$(A_j\pm lB_j)x\pm C_jy+(E_j\pm lF_j)z+(M_j\pm lN_j)=0 \tag{7}$$

где

$$A_j=B_{xi+1}-B_{xi},\quad B_j=\cos\alpha_{i+1}-\cos\alpha_i$$
$$C_j=B_{yi+1}-B_{yi},\quad E_j=B_{zi+1}-B_{zi}$$
$$F_j=\cos\gamma_{i+1}-\cos\gamma_i,\quad M_j=\frac{\rho_{i+1}}{2}-\frac{\rho_i}{2}$$

где

$$\rho_i = B^2_{xi} + B^2_{yi} + B^2_{zi} \tag{8}$$

$$N_i = B_{xi} \cos \alpha_i \pm (B_{yi} + B_{yi+1}) \cos \beta_i + B_{zi} \cos \gamma_i -$$

$$- B_{xi+1} \cos \alpha_{i+1} - B_{zi+1} \cos \gamma_{i+1}$$

$$j = 1 \div 4 \qquad i = 1 \div 5$$

Двойной знак здесь и в дальнейшем соответствует расположению точки $C$ влево и вправо от точки $B$.

Необходимым и достаточным условием того, чтобы пять точек $C_i$ $(i = 1 \div 5)$ лежали на одной сфере является то, что уравнения (7) должны быть совместны. Условие совместности требует, чтобы определитель квадратных матриц данной системы был равен нулю.

$$\begin{vmatrix} (A_1 + lB_1) & C_1 & (E_1 + lF_1) & M_1 + lN_1 \\ (A_2 + lB_2) & C_2 & (E_2 + lF_2) & M_2 + lN_2 \\ (A_3 + lB_3) & C_3 & (E_3 + lF_3) & M_3 + lN_3 \\ (A_4 + lB_4) & C_4 & (E_4 + lF_4) & M_4 + lN_4 \end{vmatrix} = 0. \tag{9}$$

Из условия совместности получаем уравнение третьей степени относительно длины шатуна $l$

$$kl^3 + ml^2 + nl + p = 0 \tag{10}$$

где

$$k = \begin{vmatrix} B_4 & C_4 & F_4 & N_4 \\ B_3 & C_3 & F_3 & N_3 \\ B_2 & C_2 & F_2 & N_2 \\ B_1 & C_1 & F_1 & N_1 \end{vmatrix}$$

$$m = \begin{vmatrix} B_4 & C_4 & E_4 & N_4 \\ B_3 & C_3 & E_3 & N_3 \\ B_2 & C_2 & E_2 & N_2 \\ B_1 & C_1 & E_1 & N_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} B_4 & C_4 & F_4 & M_4 \\ B_3 & C_3 & F_3 & M_3 \\ B_2 & C_2 & F_2 & M_2 \\ B_1 & C_1 & F_1 & M_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A_4 & C_4 & F_4 & N_4 \\ A_3 & C_3 & F_3 & N_3 \\ A_2 & C_2 & F_2 & N_2 \\ A_1 & C_1 & F_1 & N_1 \end{vmatrix} \tag{11}$$

$$n = \begin{vmatrix} A_4 & C_4 & E_4 & N_4 \\ A_3 & C_3 & E_3 & N_3 \\ A_2 & C_2 & E_2 & N_2 \\ A_1 & C_1 & E_1 & N_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A_4 & C_4 & F_4 & M_4 \\ A_3 & C_3 & F_3 & M_3 \\ A_2 & C_2 & F_2 & M_2 \\ A_1 & C_1 & F_1 & M_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} B_4 & C_4 & E_4 & M_4 \\ B_3 & C_3 & E_3 & M_3 \\ B_2 & C_2 & E_2 & M_2 \\ B_1 & C_1 & E_1 & M_1 \end{vmatrix}$$

$$p = \begin{vmatrix} A_4 & C_4 & E_4 & M_4 \\ A_3 & C_3 & E_3 & M_3 \\ A_2 & C_2 & E_2 & M_2 \\ A_1 & C_1 & E_1 & M_1 \end{vmatrix}.$$

После определения $l$ из любых трех уравнений системы (7) вычисляем координаты точки $D(x_D;\ y_D;\ z_D)$.

Для конструктивных соображений необходимо определить также длину коромысла $R$ по формуле

$$R=\sqrt{(C_{xi}-x_D)^2+(C_{yi}-y_D)^2+(C_{zi}-z_D)^2} \tag{12}$$

Пример:

Даны $h=0.4,\ \beta'=45^\circ25'34'',\ r_1=0.8,\ r_2=1.4,\ r_3=1.2,\ r_4=2,\ r_5=1.8.$

| № п/п | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $\alpha_\Pi$ | 26°17′56″ | 38°09′32″ | 43°56′45″ | 61°14′57″ | 72°32′11″ |

$$\beta_{\Pi1}=\beta_{\Pi2}=\cdots\beta_{\Pi5}=73^\circ44'23''.$$

Координаты точки $B_i$ и значения направляющих косинусов прямых $AB$ и $BC$ сведены в табл. 1, а значения коэффициентов—в табл. 2.

*Таблица 1*

| вел. / пол. | $B_x$ | $B_y$ | $B_z$ | $\cos\alpha'$ | $\cos\gamma'$ | $\cos\alpha$ | $\cos\gamma$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | −0.10604 | 0.6928203 | 0.792941 | −0.435292 | 0.564906 | 0.0825136 | −0.7503288 |
| 2 | −0.804355 | 1.3416408 | 1.145868 | −0.559433 | 0.442305 | 0.2622343 | −0.7078366 |
| 3 | −0.748635 | 1.1313708 | 0.93784 | −0.605254 | 0.377182 | 0.339509 | −0.6741909 |
| 4 | −1.813415 | 1.9595918 | 0.843521 | −0.693720 | 0.16538 | 0.536089 | −0.5314232 |
| 5 | −1.743485 | 1.7549929 | 0.447506 | −0.712898 | 0.019365 | 0.6338115 | −0.409982 |

$\cos\beta=0.655895$

*Таблица 2*

| вел. / пол. | $A$ | $B$ | $C$ | $E$ | $F$ | $M$ | $N$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | −0.698315 | 0.1797207 | 0.6488205 | 0.352927 | 0.042492 | −1.32 | −0.007257 |
| 2 | 0.05572 | 0.0772755 | −0.2102688 | −0.208028 | 0.033644 | 0.52 | 0.0023501 |
| 3 | −1.06478 | 0.1965792 | 0.8282208 | −0.094319 | 0.142767 | −2.56 | −0.0092596 |
| 4 | 0.06993 | 0.0977225 | −0.2045988 | −0.396015 | 0.1214412 | 0.76 | 0.002287 |

Из выражений (11) имеем:

$$k=0.000001$$

$$m=0.815853$$

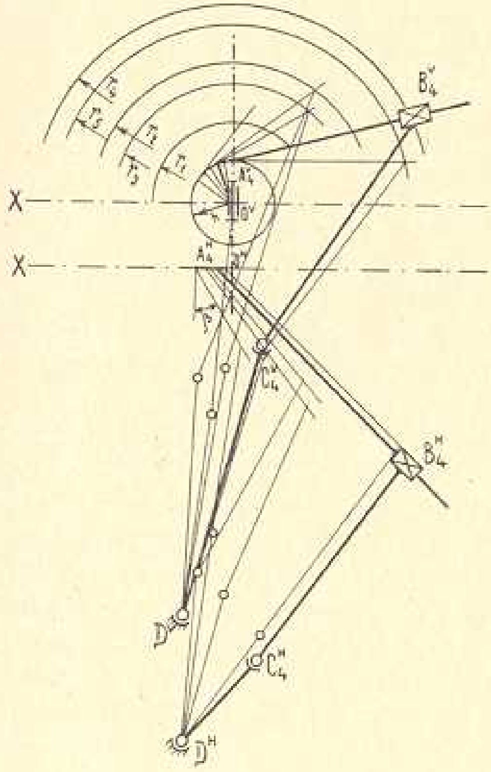
$$n=-3.640965$$

$$p=3.474794$$

Так как $k=0$, получаем для длины шатуна два значения:

$$l_1 = 3.079908$$
$$l_2 = 1.382864$$

Далее, из любых трех уравнений системы (7) определяем координаты центра вращения коромысла:




Фиг. 3.

$$x_1 = 0.392898 \qquad x_2 = -4.795646$$
$$y_1 = 4.849263 \qquad y_2 = -1.505832$$
$$z_1 = -3.611078 \qquad z_2 = 0.412316$$

Из уравнений (12) определяем длину коромысла

$$R_1 = 3.0008$$
$$R_2 = 5.757843$$

Полученный механизм для значения $R_1$ показан на фиг. 3.

Ереванский государственный университет

Поступила 11 VII 1971

Հ. Ա. ՀՈՎՀԱՆՆԻՍՅԱՆ

## ՏԱՐԱԾԱԿԱՆ ՔԱՌՕՂԱԿ ՄԵԽԱՆԻԶՄԻ (ՊՀԳԳ)՝ ԸՍՏ ՇԱՐԺԱԹԵՎԱՅԻՆ ՀԱՐԹՈՒԹՅԱՆ ՆՈՐՄԱԼԻ ՈՒՂՂՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՍԻՆԹԵԶԻ ՀԱՐՑԻ ՄԱՍԻՆ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

*Հոդվածում տրված է տարածական քառօղակ մեխանիզմի (պտտման-համընթաց-գնդային-գնդային) սինթեզը ըստ շարժաթևի հարթության նորմալի տրված չորս ու հինգ ուղղությունների։*

*Նորմալի տրված հինգ ուղղությունների դեպքում ստացված է խորանարդ հավասարում շարժաթևի երկարության նկատմամբ։*

*Դիտարկված մեթոդով կարելի է կատարել սինթեզ նաև տրված վեց ուղղությունների դեպքում։*

*Լուծված է թվային օրինակ տրված հինգ ուղղությունների դեպքում։*

## ON SYNTHESIS OF A SPATIAL FOUR-LINK MECHANISM (RPSS) IN TNE DIRECTIONS OF THE NORMAL OF THE CONNECTING ROD PLANE

H. A. HOVANESIAN

S u m m a r y

A solution is presented to the problem of synthesis of a spatial four-link mechanism (rotary-progressive-spherical-spherical) in five directions of the normal of the connecting rod plane.

A cubic equation relative to the connecting rod length is obtained with the five directions specified.

The method discussed may be used to solve the problem of synthesis in six directions of the normal of the connecting rod plane.

A numerical example is solved for the case of five directions.

### ЛИТЕРАТУРА

1. *Оганесян А. А., Шахбазян К. Х.* Синтез пространственного четырехзвенника по заданным направлениям нормали шатунной плоскости. Изв. АН Арм. ССР, Механика, т. 24, № 1, 1971.
2. *Уилсон.* Аналитический кинематический синтез механизмов посредством конечных перемещений. Тр. американского общества инженеров-механиков. Серия В, № 2, 1965.
3. *Рос.* Теория конечных положений в применении к синтезу механизмов. Приклад. механика, № 4, 1967.