ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXV, № 2, 1972 Механика

В. Ц. ГНУНИ

ДИНАМИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ МОМЕНТНОГО СОСТОЯНИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ С УЧЕТОМ ИНЕРЦИИ ДОКРИТИЧЕСКОГО СОСТОЯНИЯ*

Исследуются параметрические колебания замкнутой круговой цилиндрической оболочки.

При исследовании параметрических колебаний оболочек начальное состояние, как правило, принимается безмоментным и пренебрегается влиянием сил инерции докритического состояния.

В работах В. В. Болотина [1, 2] впервые четко доказывается необходимость наиболее полного и точного описания докритического состояния и показывается существенное влияние вынужденных колебаний начального состояния на параметрический резонанс. В работе Г. В. Мишенькова [3] результаты работы [2] обобщаются на случай цилиндрической оболочки и исследуется влияние тангенциальных сил инерции начального состояния на параметрические колебания.

В работе [4] при определении границ динамической неустойчивости пологой оболочки двоякой постоянной кривизны докритическое состояние принимается динамическим, моментным и нелинейным. Однако, в этой работе основные выводы строятся на основе весьма приближенного решения, полученного с помощью одночленной аппроксимации прогибов и функции усилий.

1. Пусть давление $q = q_0(x)\cos\theta t$ вызывает в оболочке некоторое осесимметричное моментное напряженное состояние. При определенных соотношениях параметров нагрузки это состояние может оказаться асимптотически неустойчивым [5].

Предполагается, что начальное состояние характеризуется прогибом w_0 и функцией усилий Φ_0. Переход к новому состоянию дает

$$w = w_0 + w_1, \quad \Phi = \Phi_0 + \Phi_1 \tag{1.1}$$

причем соотношения (1.1) связаны системой [6]

$$\begin{gathered}\frac{1}{Eh}\Delta^2\Phi + \frac{1}{R}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{2}L(w, w) = 0\\ \rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2\varepsilon\rho h\frac{\partial w}{\partial t} + D\Delta^2 w - \frac{1}{R}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} - L(w, \Phi) = q\end{gathered} \tag{1.2}$$

где обозначения общепринятые [5, 6].

* Работа доложена на конференции по колебаниям механических систем. Киев, июль 1971 г.

В дальнейшем рассматриваются следующие граничные условия на торцах оболочки:

$$
\begin{aligned}
&v=0,\quad T_1=0,\quad w=A_1\cos\theta t,\quad M_1=B_1\cos\theta t \qquad \text{при } x=0\\
&v=0,\quad T_1=0,\quad w=A_2\cos\theta t,\quad M_1=B_2\cos\theta t \qquad \text{при } x=l
\end{aligned}
\tag{1.3}
$$

где l—длина оболочки, A_i и B_i—заданные возмущения.

Подставляя соотношения (1.1) в систему (1.2) и граничные условия (1.3) и учитывая, что w_0, Φ_0 связаны системой

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{Eh}\frac{\partial^4\Phi_0}{\partial x^4}+\frac{1}{R}\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}=0\\
&\rho h\frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2}+2\varepsilon\rho h\frac{\partial w_0}{\partial t}+D\frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4}-\frac{1}{R}\frac{\partial^2\Phi_0}{\partial x^2}=q_0(x)\cos\theta t
\end{aligned}
\tag{1.4}
$$

при граничных условиях

$$
\begin{aligned}
&T_1^0=0,\quad w_0=A_1\cos\theta t,\quad M_1^0=B_1\cos\theta t \qquad \text{при } x=0\\
&T_1^0=0,\quad w_0=A_2\cos\theta t,\quad M_1^0=B_2\cos\theta t \qquad \text{при } x=l
\end{aligned}
\tag{1.5}
$$

получаются следующие уравнения „в вариациях“:

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{Eh}\Delta^2\Phi_1+\frac{1}{R}\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2}=0\\
&\rho h\frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2}+2\varepsilon\rho h\frac{\partial w_1}{\partial t}+D\Delta^2 w_1-\frac{1}{R}\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial x^2}-\\
&\qquad -\frac{\partial^2\Phi_0}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial y^2}=0
\end{aligned}
\tag{1.6}
$$

при граничных условиях

$$
v_1=0,\quad T_1^1=0,\quad w_1=0,\quad M_1^1=0 \quad \text{при}\quad x=0,\ x=l. \tag{1.7}
$$

В силу отсутствия продольных усилий в докритической стадии, систему (1.4) можно записать так:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial^2\Phi_0}{\partial x^2}=-\frac{Eh}{R}w_0\\
&\frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2}+2\varepsilon\frac{\partial w_0}{\partial t}+\frac{D}{\rho h}\frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4}+\frac{E}{\rho R^2}w_0=\frac{1}{\rho h}q_0(x)\cos\theta t
\end{aligned}
\tag{1.8}
$$

Решение второго уравнения системы (1.8) представляется в виде

$$
w_0=\varphi_1(x)\cos\theta t+\varphi_2(x)\sin\theta t \tag{1.9}
$$

где функции $\varphi_i(x)$ определяются из системы

$$
\begin{aligned}
&\frac{d^4\varphi_1}{dx^4}+\frac{1}{D}\left(\frac{Eh}{R^2}-\rho h\theta^2\right)\varphi_1+\frac{2}{D}\varepsilon\rho h\theta\varphi_2=\frac{1}{D}q_0(x)\\
&\frac{d^4\varphi_2}{dx^4}+\frac{1}{D}\left(\frac{Eh}{R^2}-\rho h\theta^2\right)\varphi_2-\frac{2}{D}\varepsilon\rho h\theta\varphi_1=0
\end{aligned}
\tag{1.10}
$$

при граничных условиях

$$\begin{aligned} &\varphi_1 = A_1, \quad -D\frac{d^2\varphi_1}{dx^2} = B_1, \quad \varphi_2 = 0, \quad \frac{d^2\varphi_2}{dx^2} = 0 \text{ при } x = 0 \\ &\varphi_1 = A_2, \quad -D\frac{d^2\varphi_1}{dx^2} = B_2, \quad \varphi_2 = 0, \quad \frac{d^2\varphi_2}{dx^2} = 0 \text{ при } x = l \end{aligned} \tag{1.11}$$

В (1.9) оставлены лишь члены, не затухающие во времени, так как исследуется асимптотическая устойчивость решения системы (1.8).

Решение системы (1.10) при граничных условиях (1.11) нетрудно построить. Найденное решение представляется в виде разложения

$$\varphi_i(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \psi_{ik} \cos \lambda_k x, \qquad \lambda_k = \frac{k\pi}{l} \tag{1.12}$$

где коэффициенты ψ_{ik} считаются известными и в дальнейшем подлежат определению для конкретных случаев нагружения и закрепления оболочки.

Подставляя (1.12) в (1.9), для докритических прогибов окончательно получается выражение

$$w_0 = \sum_{k=0}^{\infty} (\psi_{1k} \cos \theta t + \psi_{2k} \sin \theta t) \cos \lambda_k x \tag{1.13}$$

Решение системы (1.6) при граничных условиях (1.7) ищется в виде

$$\begin{aligned} &w_1 = \cos \mu_n y \sum_{m=1}^{\infty} a_m(t) \sin \lambda_m x \\ &\Phi_1 = \cos \mu_n y \sum_{m=1}^{\infty} b_m(t) \sin \lambda_m x, \quad \mu_n = \frac{n}{R} \end{aligned} \tag{1.14}$$

Подставляя (1.14) в систему (1.6), в силу (1.13) получаем

$$\frac{(\lambda_p^2 + \mu_n^2)^2}{Eh} b_p - \frac{\lambda_p^2}{R} a_p +$$

$$+ \frac{\mu_n^2}{2}\left(\sum_{m=1}^{q} \lambda_{q-m}^2 f_{q-m} a_m + \sum_{m=q}^{\infty} \lambda_{m-q}^2 f_{m-q} a_m - \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_{m+q}^2 f_{m+q} a_m \right) = 0$$

$$D(\lambda_p^2 + \mu_n^2)^2 + \frac{\lambda_p^2}{R} b_p - \frac{\mu_n^2}{2}\left[\sum_{m=1}^{q} \left(\lambda_{q-m}^2 b_m + \frac{Eh}{R} a_m \right) f_{m-q} + \right.$$

$$\left. + \sum_{m=q}^{\infty} \left(\lambda_{m-q}^2 b_m + \frac{Eh}{R} a_m \right) f_{m-q} - \sum_{m=1}^{\infty} \left(\lambda_{m+q}^2 b_m + \frac{Eh}{R} a_m \right) f_{m+q} \right] +$$

$$+ 2\varepsilon\rho h \frac{da_p}{dt} + \rho h \frac{d^2 a_p}{dt^2} = 0$$

где

$$f_j(t) = \psi_{1j} \cos \theta t + \psi_{2j} \sin \theta t$$

Исключая b_p и пренебрегая нелинейными членами, получаем следующее уравнение для любого n

$$E\frac{d^2A}{dt^2}+2\varepsilon E\frac{dA}{dt}+(\Omega^2+S_1\cos\theta t+S_2\sin\theta t)A=0 \qquad (1.15)$$

Здесь введены обозначения

$$A=\{a_1,\ a_2,\ a_3,\cdots\}$$

$$E=\begin{Vmatrix}1 & 0 & 0 & \cdots\\ 0 & 1 & 0 & \cdots\\ 0 & 0 & 1 & \cdots\\ \cdot & \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \end{Vmatrix}\qquad \Omega=\begin{Vmatrix}\omega_1 & 0 & 0 & \cdots\\ 0 & \omega_2 & 0 & \cdots\\ 0 & 0 & \omega_3 & \cdots\\ \cdot & \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \end{Vmatrix}$$

$$S_i=\begin{Vmatrix}2s_0^i-s_{1+1}^i & s_{2-1}^i-s_{2+1}^i & s_{3-1}^i-s_{3+1}^i & \cdots\\ s_{2-1}^i-s_{1+2}^i & 2s_0^i-s_{2+2}^i & s_{3-2}^i-s_{3+2}^i & \cdots\\ s_{3-1}^i-s_{1+3}^i & s_{3-2}^i-s_{2+3}^i & 2s_0^i-s_{3+3}^i & \cdots\\ \cdot & \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \end{Vmatrix}$$

$$\omega_p=\frac{1}{\rho h}\left[D(\lambda_p^2+\mu_n^2)^2+\frac{Eh}{R^2}\frac{\lambda_p^4}{(\lambda_p^2+\mu_n^2)^2}\right]$$

$$s_j^i=\frac{Eh\,\mu_n^2}{2R}\left\{1+\left[\frac{\lambda_m^2}{(\lambda_m^2+\mu_n^2)^2}+\frac{\lambda_p^2}{(\lambda_p^2+\mu_n^2)^2}\right]\lambda_j^2\right\}\psi_{ij}$$

$$(j=m-q,\quad q-m,\ m+q)$$

Принимая $A=e^{-\varepsilon t}B$, для определения вектора B получаем уравнение

$$E\frac{d^2B}{dt^2}+(\overline{\Omega}^2+S_1\cos\theta t+S_2\sin\theta t)B=0 \qquad (1.16)$$

где

$$\overline{\Omega}=\Omega-\varepsilon E.$$

Уравнение типа (1.16) хорошо исследовано в [5, 7, 8].

2. В качестве примера рассматривается частный случай, когда $q_0(x)=\text{const}$ и $A_i=0$, $B_i=0$ в (1.3). Тогда, принимая докритическое состояние оболочки безмоментным [9], показывается влияние поперечных сил инерции начального состояния на расположение областей главного параметрического резонанса.

Из второго уравнения системы (1.8) имеем

$$\frac{d^2w_0}{dt^2}+2\varepsilon\frac{dw_0}{dt}+\omega_0^2w_0=\frac{1}{\rho h}q_0\cos\theta t \qquad (2.1)$$

где

$$\omega_0^2 = E/\rho R^2$$

Установившимся решением уравнения (2.1) будет

$$w_0 = \frac{R^2}{Eh}(\nu_1 \cos \theta t + \nu_2 \sin \theta t) q_0 \tag{2.2}$$

где

$$\nu_1 = \frac{1 - \alpha\theta^2}{(1 - \alpha\theta^2)^2 + 4\varepsilon^2\alpha^2\theta^2}, \quad \nu_2 = \frac{2\varepsilon\alpha\theta}{(1 - \alpha\theta^2)^2 + 4\varepsilon^2\alpha^2\theta^2}, \quad \alpha = \frac{1}{\omega_0}.$$

В этом частном случае уравнение динамической устойчивости принимает вид

$$\frac{d^2 a_p}{dt^2} + 2\varepsilon \frac{da_p}{dt} + \omega_p^2 [1 - 2\mu (\nu_1 \cos \theta t + \nu_2 \sin \theta t)] a_p = 0 \tag{2.3}$$

где

$$\mu = \frac{Rq_0}{2T_2^*}, \quad T_2^* = \frac{1}{\mu_n^2}\left[D(\lambda_p^2 + \mu_n^2)^2 + \frac{Eh}{R^2}\frac{\lambda_p^4}{(\lambda_p^2 + \mu_n^2)^2}\right] \tag{2.4}$$

При $\nu_1 = 1$, $\nu_2 = 0$ получается известное [5] уравнение динамической устойчивости цилиндрической оболочки.

Пусть $\varepsilon = 0$, тогда $\nu_1 = (1 - \alpha\theta^2)^{-1}$, $\nu_2 = 0$ и при $\alpha\theta^2 = 1$ получается обычный резонанс, так как в этом случае $\theta = \omega_0$.

При малых значениях коэффициента возбуждения μ, границы области главного параметрического резонанса определяются из соотношения

$$\theta^2 = 4\omega_p^2 (1 \mp \mu\nu_1) \tag{2.5}$$

Введя обозначения $\overline{\theta}^2 = \alpha\theta^2$, $\overline{\omega}_p^2 = \alpha\omega_p^2$, из (2.5) находим уравнение

$$\overline{\theta}^4 - (1 + 4\overline{\omega}_p^2 \pm \sqrt{(1 - 4\overline{\omega}_p^2)^2 \pm 16\,\overline{\omega}_p^2\mu})$$

откуда

$$\overline{\theta}^2 = 0.5\,(1 + 4\overline{\omega}_p^2 \pm \sqrt{(1 - 4\overline{\omega}_p^2)^2 \pm 16\,\overline{\omega}_p^2\mu}) \tag{2.6}$$

Таким образом, границы главной области динамической неустойчивости будут

$$\begin{aligned} \overline{\theta}_1^2 &= 0.5\,(1 + 4\overline{\omega}_p^2 - \sqrt{(1 - 4\overline{\omega}_p^2)^2 + 16\,\overline{\omega}_p^2\mu}) \\ \overline{\theta}_2^2 &= 0.5\,(1 + 4\overline{\omega}_p^2 - \sqrt{(1 - 4\overline{\omega}_p^2)^2 - 16\,\overline{\omega}_p^2\mu}) \end{aligned} \tag{2.7}$$

Кроме области (2.7), получаются резонансные колебания также в области

$$\begin{aligned} \overline{\theta}_3^2 &= 0.5\,(1 + 4\overline{\omega}_p^2 + \sqrt{(1 - 4\overline{\omega}_p^2)^2 - 16\,\overline{\omega}_p^2\mu}) \\ \overline{\theta}_4^2 &= 0.5\,(1 + 4\overline{\omega}_p^2 + \sqrt{(1 - 4\overline{\omega}_p^2)^2 + 16\,\overline{\omega}_p^2\mu}) \end{aligned} \tag{2.8}$$

Необходимо отметить, что при $\sqrt{\mu} \geqslant 0.25\,\overline{\omega}^{-1} - \overline{\omega}$ обе области (2.7) и (2.8) сливаются.

Пусть $l = R = 100\,h$, $\nu = 0.3$, тогда наименьшее значение $\overline{\omega}_p^2$ достигается при $p = 1$, $n = 7$ и равно 0.06. Из формул (2.7), (2.8) при $\mu = 0.25$ имеем $\overline{\theta_1^2} = 0.17$, $\overline{\theta_2^2} = 0.33$ и $\overline{\theta_3^2} = 0.91$, $\overline{\theta_4^2} = 1.1$, где первые две цифры определяют область главного параметрического резонанса, а последние две—область резонансных колебаний около частоты ω_0. При $\nu_1 = 1$ получается $\overline{\theta_1^2} = 0.16$, $\overline{\theta_2^2} = 0.30$.

Таким образом, учет поперечных сил инерции начального состояния количественно и качественно влияет на расположение границ динамической неустойчивости.

Институт механики
АН Армянской ССР

Поступила 14 VI 1971

Վ. Ց. ԳՆՈՒՆԻ

ԳԼԱՆԱՅԻՆ ԹԱՂԱՆԹԻ ՄՈՄԵՆՏԱՅԻՆ ՎԻՃԱԿԻ ԴԻՆԱՄԻԿ ԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅՈՒՆԸ, ՄԻՆՉԿՐԻՏԻԿԱԿԱՆ ՎԻՃԱԿԻ ԻՆԵՐՑԻԱՅԻ ՀԱՇՎԱՌՄԱՄԲ

Ամփոփում

Դիտարկված է փակ գլանային թաղանթի պարամետրական տատանումների խնդիրը, սկզբնական վիճակի ընդլայնական իներցիոն ուժերի հաշվառմամբ։

Խնդիրը բերվում է լավ ուսումնասիրված հավասարման։

THE DYNAMIC STABILITY OF MOMENT STATE OF A GYLINDRICAL SHELL, TAKING ACCOUNT OF PRECRITICAL STATE INERTIA

V. Ts. GNUNY

Summary

A problem of parametric oscillation of a closed cylindrical shell, taking account of transverse forces of inertia of primary moment state, is considered.

The problem is reduced to a familiar equation.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Болотин В. В.* Некоторые нелинейные задачи динамической устойчивости пластинок. Изв. АН СССР, ОТН, № 10, 1954.

2. *Болотин В. В.* О взаимодействии вынужденных и параметрически возбуждаемых колебаний. Изв. АН СССР, ОТН, № 4, 1956.
3. *Мишенков Г. В.* К вопросу о взаимодействии параметрически вынужденных колебаний упругих панелей. Изв. АН Арм. ССР, серия физ.-мат. наук, т. XVIII, № 1, 1965.
4. *Гнуни В. Ц.* О границах динамической неустойчивости оболочек. Тр. конф. по теории пластин и оболочек, Казань, 1960.
5. *Болотин В. В.* Динамическая устойчивость упругих систем. ГИТТЛ, М., 1956.
6. *Вольмир А. С.* Устойчивость упругих систем. Физматгиз, М., 1963.
7. *Малкин И. Г.* Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. ГИТТЛ, М., 1956.
8. *Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. Изд. Наука, М., 1970.
9. *Гнуни В. Ц., Мовсисян Л. А.* Об устойчивости моментного состояния цилиндрической оболочки. Прикл. механика, т. V, вып. 6, 1969.