

Н. Х. АРУТЮНЯН, С. М. МХИТАРЯН

НЕКОТОРЫЕ КОНТАКТНЫЕ ЗАДАЧИ
ДЛЯ ПОЛУПЛОСКОСТИ С ЧАСТИЧНО
СКРЕПЛЕННЫМИ УПРУГИМИ НАКЛАДКАМИ

В настоящей работе рассматриваются некоторые контактные задачи для упругой полуплоскости, усиленной на конечном отрезке своей границы частично скрепленными с ней упругими накладками малой толщины. Характерной особенностью поставленных здесь задач, в отличие от тех, которые были рассмотрены в предыдущих работах авторов [1, 2, 3], является то, что на концах частично скрепленной упругой накладки возникают конечные напряжения, подлежащие определению.

Решение этих задач сводится к решению сингулярных интегро-дифференциальных уравнений с ядром Коши. В работе предлагается эффективный способ решения этих уравнений, состоящий в их сведении к вполне регулярным или квазивполне регулярным бесконечным системам линейных уравнений простой структуры. Это позволяет с любой наперед заданной точностью определить входящие в ряды неизвестные коэффициенты, при помощи которых представляются контактные напряжения под упругими накладками.

Исследованные здесь задачи тесно примыкают к вопросам передачи нагрузки от стрингеров к упругим телам и имеют прикладное значение.

Насколько нам известно, рассматриваемые в настоящей работе задачи ставятся и решаются впервые.

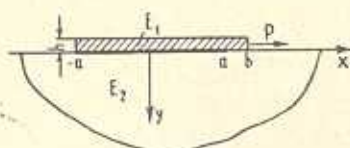
§ 1. Постановка задач и вывод определяющих уравнений

Пусть упругая полуплоскость на конечном отрезке $[-a, b]$ ($0 < a < b$) своей границы усилена упругой накладкой постоянной достаточно малой толщины h , намного меньшей a ($h \ll a$), приваренной или приклеенной к полуплоскости только по отрезку $[-a, a]$, так что часть $[a, b]$ накладки не скреплена с основанием, то есть полуплоскостью. Кроме того, пусть к одному из концов накладки, например, к правому концу, приложена сосредоточенная сила P , направленная вдоль ее оси (фиг. 1).

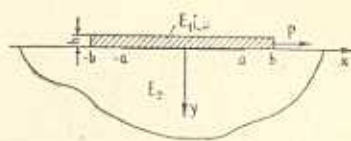
Во второй задаче предполагается, что полуплоскость усилена на конечном отрезке $[-b, b]$ своей границы упругой накладкой достаточно малой толщины h , также частично скрепленной с полуплоскостью, а именно: по отрезку $[-a, a]$, так что части $[-a, -b]$ и $[b, a]$ накладки не скреплены с основанием. Здесь также считается, что к

одному из концов накладки, например, к правому концу, приложена сосредоточенная сила P , направленная вдоль ее оси (фиг. 2).

В дальнейшем эти задачи кратко будем именовать первой и второй контактными задачами соответственно.



Фиг. 1.



Фиг. 2.

Отметим, что накладки могут быть нагружены и сосредоточенными силами, направленными вдоль их осей и приложенными к левым концам или одновременно к обоим концам накладок. Решения поставленных задач в этих случаях нагружения накладок получаются из указанных двух на основании принципа наложения. Однако следует отметить то важное обстоятельство, что, когда накладки нагружены сосредоточенными силами, которые вызывают сжатие накладок в осевом направлении, обсуждаемые нами задачи можно поставить иначе. А именно, можно поставить как задачи о потере формы устойчивости упругих стержней на упругом основании, представляющие обобщение известной задачи Эйлера. Рассмотрение этого круга вопросов выходит за рамки настоящей работы и им будет посвящено отдельное исследование авторов.

Очевидно, что упомянутые контактные задачи можно рассматривать и для упругой полубесконечной пластины, когда на конечном отрезке своей кромки она усилена описанным выше образом упругими накладками малой толщины. При этом предполагается, что контактные напряжения по поперечному сечению накладок распределены равномерно, а пластина находится в обобщенном плоском напряженном состоянии. Решения этих задач будут отличаться от решений соответствующих задач для полупространства, находящегося в условиях плоской деформации, лишь некоторыми постоянными. Поэтому во всем дальнейшем мы ограничимся рассмотрением указанных контактных задач только для упругого полупространства, находящегося в условиях плоской деформации, то есть полуплоскости.

Наша задача заключается в определении закона распределения контактных напряжений вдоль отрезков креплений упругих накладок с упругой полуплоскостью. Как и в работах [1, 2, 3, 4], будем предполагать, что вследствие малости толщины h жесткость накладок на изгиб пренебрежимо мала, и поэтому можно пренебречь нормальным давлением накладок на полуплоскость. Иначе говоря, примем, что под накладками действуют только тангенциальные контактные напряжения, то есть они находятся в одноосном напряженном состоянии.

Предположение о малости нормального давления можно обосновать при помощи следующих рассуждений, позволяющих получить для него конкретную оценку. Сначала обратимся к случаю бесконечной в обоих направлениях накладки, скрепленной с полубесконечной пластиной или полуплоскостью и нагруженной сосредоточенной силой P . Эта задача исследована в работе [4] и известна как задача Мелана. В указанной работе предполагается, что накладка и пластина изготовлены из одинаковых материалов, но имеют разную ширину. Считая, что и накладка и пластина имеют одинаковую ширину, на основании решения известной задачи Фламана, напряжения в любой точке (x, y) пластины, ориентированной показанным выше образом, даются следующими простыми формулами:

$$\sigma_y = -\frac{2P}{\pi} \frac{xy^2}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{2P}{\pi} \frac{x^2y}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\sigma_x = -\frac{2P}{\pi} \frac{x^3}{(x^2 + y^2)^2}$$

Из этих формул непосредственно следует, что при малых y и при любом фиксированном x напряжения будут порядков

$$\sigma_y = O(y^2), \quad \tau_{xy} = O(y), \quad \sigma_x = O(1)$$

на основании чего можно считать, что $\sigma_y \approx 0$, $\tau_{xy} \approx 0$ и $\sigma_x \neq 0$, то есть пограничный слой упругой полубесконечной пластины малой толщины под действием сосредоточенной силы P , приложенной на ее границе в начале координат, находится в одноосном напряженном состоянии.

Обратимся теперь к случаю накладки конечной длины, полностью скрепленной по отрезку $[-a, a]$ с упругой полуплоскостью и нагруженной так, как показано на фиг. 1. В том случае, когда сосредоточенная сила P приложена к правому концу накладки в ее наименьшей точке, нормальные контактные напряжения отсутствуют. Это следует из того, что закон распределения нормальных напряжений должен быть кососимметрическим и если эти напряжения не равны нулю, то дают неуравновешенный момент. Следовательно, нормальные контактные напряжения под накладкой возникают благодаря наличию момента сосредоточенной силы P относительно оси, перпендикулярной к упругой полуплоскости и проходящей через начало координат. Под действием нормальной кососимметрической нагрузки накладка будет изгибаться. Очевидно, что эта нагрузка по абсолютной величине будет наибольшей в случае абсолютно жесткой накладки, то есть в случае штампа. Таким образом, нормальное давление под упругой накладкой по абсолютной величине не превосходит абсолютного значения нормального давления под абсолютно жесткой накладкой.

Это ясно и из следующих соображений. При деформации полуплоскости со скрепленной накладкой под действием приложенной внешней нагрузки в ней накапливается потенциальная энергия деформации



определенной величины. Когда накладка абсолютно жестка, эта энергия накапливается только в упругой полуплоскости и полностью расходуется для ее деформации. Когда же накладка упругая, часть потенциальной энергии, накопленной в усиленной накладке полуплоскости, расходуется для деформации накладки, а другая часть — для деформации полуплоскости. Отсюда следует, что когда жесткая накладка становится упругой, то она берет на себя часть контактных напряжений, действующих под абсолютно жесткой накладкой, то есть расслабляет поле этих последних напряжений, снимает часть этих напряжений.

Таким образом, нормальные контактные напряжения под упругой накладкой указанным образом можно сравнить с теми же напряжениями под абсолютно жесткой накладкой. Но в случае абсолютно жесткой накладки соответствующая контактная задача известна. Ее решение приведено в [5]. Запишем это решение, ограничиваясь только формулой для интересующего нас нормального контактного давления

$$p(x) = \frac{(x+1)M}{\pi \sqrt{x} (1+4\beta^2) a^2} \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} \left[2\beta a \sin\left(\beta \ln \frac{a+x}{a-x}\right) + x \cos\left(\beta \ln \frac{a+x}{a-x}\right) \right]$$

где x и β — упругие постоянные для полуплоскости, а M — момент силы P относительно начала координат. Поскольку $M \leq Ph = \sigma_x^{(yn)}(a) h^2$, где $\sigma_x^{(yn)}(a) = P/h$ — осевое напряжение, которое действует на конце $x = a$ накладки, можем записать

$$p(x) = \frac{(x+1) \sigma_x^{(yn)}(a) h^2}{\pi \sqrt{x} (1+4\beta^2) \sqrt{a^2-x^2}} \left[2\beta a \sin\left(\beta \ln \frac{a+x}{a-x}\right) + x \cos\left(\beta \ln \frac{a+x}{a-x}\right) \right]$$

Приняв во внимание сказанное выше, на основании последней формулы можем утверждать, что при $-l \leq x \leq l$, где $l < a$,

$$|\sigma_y^{(yn)}(x)| \leq |\sigma_y^{(ж)}(x)| = \sigma_x^{(yn)}(a) O\left(\frac{h^2}{a^2}\right) \quad (1.1)$$

где $\sigma_y^{(yn)}(x)$ — нормальные контактные напряжения под упругой накладкой, а $\sigma_y^{(ж)}$ — те же напряжения под абсолютно жесткой накладкой.

В концевых точках накладки, расположенных на границе полуплоскости, оба напряжения $\sigma_y^{(yn)}$ и $\sigma_x^{(yn)}$, как было доказано в работе [3], обращаются в бесконечность и можно считать, что полученная оценка (1.1) будет верна и в этом случае.

Формула (1.1) показывает, что нормальные напряжения под накладкой по сравнению с осевым напряжением — малые величины по-

рядка $O(h^2/a^2)$, что позволяет ими пренебречь в рассматриваемых нами задачах. Этим подтверждается высказанное выше предположение о малости нормального давления под накладкой, когда накладка полностью скреплена с полуплоскостью. Однако очевидно, что оценка (1.1) имеет место и в случае неполного скрепления накладки с полуплоскостью.

Основываясь на сделанных физических предположениях, перейдем теперь к определяющим уравнениям, которыми будут описываться рассматриваемые нами задачи. Поступая совершенно аналогично тому, что было сделано в работах [1, 2, 3], находим, что решение указанных выше задач сводится к решению следующего сингулярного интегро-дифференциального уравнения с ядром Коши:

$$\int_{-a}^a \frac{\varphi'(s) ds}{s-x} = \lambda \varphi(x), \quad \lambda = \frac{\pi E_2}{2(1-\nu^2) h E_1} \quad (1.2)$$

при граничных условиях

$$\varphi(-a) = 0, \quad \varphi(a) = P \quad (1.3)$$

Здесь приняты следующие обозначения: $\varphi'(x) = \tau(x)$ — неизвестное тангенциальное контактное напряжение, действующее вдоль линий креплений накладок с полуплоскостью, ν — коэффициент Пуассона, E_2 — модуль Юнга для материала полуплоскости, E_1 — модуль Юнга накладки, а функция $\varphi(x)$ определяется равенством

$$\varphi(x) = \int_{-a}^x \varphi'(s) ds = \int_a^x \tau(s) ds \quad (1.4)$$

Кроме того, следует отметить, что в (1.2) интеграл понимается в смысле главного значения по Коши.

В случае первой контактной задачи мы должны строить неограниченное на конце $x = -a$ и ограниченное на конце $x = a$ интервала интегрирования решение интегро-дифференциального уравнения (1.2) при граничных условиях (1.3). В случае второй контактной задачи мы должны строить ограниченное на обоих концах $x = \pm a$ интервала интегрирования решение того же уравнения при тех же граничных условиях.

Отметим, что поставленные контактные задачи имеют смысл только для упругой накладки, поскольку для жесткой накладки (штампа) уравнение (1.2) не имеет решения, ограниченного на одном или на обоих концах накладки.

Без ограничения общности предлагаемого здесь способа решения задач можно предположить, что модуль Юнга накладки или ее поперечное сечение являются переменными величинами, а упругая полуплоскость на бесконечности нагружена наперед заданными усилиями. Поскольку учет этих факторов не имеет сколько-нибудь принципиального

значения, то мы ограничимся исследованием рассматриваемых нами задач в постановке, когда соответствующее интегро-дифференциальное уравнение имеет простейший вид (1.2).

В дальнейшем будет показано, что решение интегро-дифференциального уравнения (1.2) при граничных условиях (1.3) сводится к решению бесконечных систем линейных уравнений. Доказывается, что эти бесконечные системы при малых значениях λ вполне регулярны, а при больших значениях λ квазивполне регулярны. В этом результате отражается принятая нами физическая модель рассматриваемых задач, а именно, модель одномерного упругого континуума накладки. Чтобы пояснить это подробнее, обратимся к уравнению (1.2). Из указанного уравнения непосредственно следует, что при больших λ можно положить $\varphi(x) \approx 0$ или, что то же самое, согласно (1.4) $\tau(x) \approx 0$, то есть под накладкой, нагруженной сосредоточенной силой P конечной величины, не возникает никаких контактных напряжений (нормальные напряжения равны нулю по предположению). Полученный абсурд показывает, что при больших λ модель одномерного упругого континуума накладки не годится. Но как раз при больших λ , как отмечалось выше, соответствующие бесконечные системы квазивполне регулярны.

Сказанное позволяет утверждать, что предложенный нами способ решения определяющих уравнений, а именно, сведение их решения к решению вполне регулярных или квазивполне регулярных бесконечных систем линейных уравнений представляется естественным, поскольку в нем отражается сама физическая модель поставленных задач.

Отметим еще следующее. Граничные условия (1.4) выражают тот факт, что приложенная к концу накладки сосредоточенная сила P полностью передается накладке в смысле, что на ее концах не возникают сосредоточенные осевые напряжения. Этот факт вытекает из предположения одномерности напряженного состояния накладки и доказан в работах [6, 7].

В заключение параграфа несколько видоизменим определяющие уравнения. Заменяя в соотношениях (1.2) — (1.4) x на ax , s на as , приходим к сингулярному интегро-дифференциальному уравнению

$$\int_{-1}^1 \frac{\varphi'(s) ds}{s-x} = \lambda a \varphi(x) \quad \left(\lambda = \frac{\pi E_2}{2(1-\nu^2) h E_1} \right) \quad (1.5)$$

при граничных условиях

$$\varphi(-1) = 0, \quad \varphi(1) = P \quad (1.6)$$

где

$$\tilde{\varphi}(x) = \int_{-1}^1 \tau^*(s) ds, \quad \tau^*(x) = a\tau(ax) \quad (1.7)$$

Теперь тангенциальное контактное напряжение будет определяться формулой

$$\tau(x) = \frac{1}{a} \varphi' \left(\frac{x}{a} \right) \quad (-a < x < a) \quad (1.8)$$

Таким образом, решение первой контактной задачи сводится к построению такого решения интегро-дифференциального уравнения (1.5) при граничных условиях (1.6), которое не ограничено на конце $x = -1$ и ограничено на $x = 1$ интервала интегрирования. Решение второй контактной задачи сводится к построению такого решения того же самого уравнения (1.5) при тех же граничных условиях (1.6), которое ограничено на обоих концах $x = \pm 1$ интервала интегрирования.

§ 2. Об особенностях контактных напряжений на концах упругих накладок

В классических контактных задачах линейной теории упругости особенности, присущие контактным напряжениям на концах участков соприкосновения упругих тел, имеют, вообще говоря, вид квадратного корня. Оказывается, что особенности такого же типа присущи контактным напряжениям на концах упругих накладок и в случае рассматриваемых нами задач в указанной выше постановке. Докажем этот факт, следуя работе [3], в случае первой контактной задачи. Для этой цели нам понадобятся следующие результаты из [8], относящиеся к поведению интеграла типа Коши вблизи концов линии интегрирования, применительно к нашему случаю.

Пусть $[a, b]$ конечный отрезок действительной оси и пусть плотность интеграла типа Коши

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{\varphi(s) ds}{s-z}$$

в окрестности одного из концов a или b , которую обозначим через c , представим в виде

$$\varphi(x) = \frac{\varphi^*(x)}{|x-c|^\alpha} \quad (0 < \alpha < 1) \quad (2.1)$$

где функция $\varphi^*(x)$ в окрестности точки c удовлетворяет условию Гельдера, то есть принадлежит классу H в окрестности точки c .

Тогда утверждается, что

$$\Phi(x) = \pm \frac{\operatorname{ctg} \alpha \pi}{2i} \frac{\varphi^*(c)}{|x-c|^\alpha} + \Phi^*(x)$$

где верхний знак берется при $c = a$, а нижний при $c = b$. При этом справедливо представление

$$\Phi^*(x) = \frac{\Phi^{**}(x)}{|x - c|^{\alpha}}, \quad (x_0 < a) \quad (2.2)$$

где $\Phi^{**}(x)$ принадлежит классу H в окрестности точки c .

Теперь заметим следующее. Потенциальная энергия, накопленная в упругой полуплоскости вследствие ее деформации контактными напряжениями под упругой накладкой, должна быть величиной конечной. Поэтому возможная особенность контактных напряжений на интересующем нас левом конце накладки должна быть интегрируемого порядка. Сказанное позволяет утверждать, что контактное напряжение в обсуждаемом случае можно представить в виде

$$\tau^*(x) = a \tau(ax) = \frac{\chi(x, \lambda)}{(1+x)^{\alpha}} \quad (0 < \alpha < 1) \quad (2.3)$$

где $\chi(x, \lambda)$ — непрерывная по x функция на отрезке $[-1, 1]$, удовлетворяющая условию Гельдера с некоторым показателем.

Займемся определением α . Приняв во внимание формулу (1.7), на основе (2.1) и (2.3) интегро-дифференциальное уравнение (1.5) представим в виде

$$\pi \operatorname{ctg} \alpha \pi \frac{\chi(-1, \lambda)}{(1+x)^{\alpha}} + \Phi^*(x) = \lambda a \varphi(x) \quad (2.4)$$

функция $\Phi^*(x)$ согласно (2.2) обладает свойством

$$(1+x)^{\alpha} \Phi^*(x) \rightarrow 0 \quad (2.5)$$

Обе части равенства (2.4) умножим на $(1+x)^{\alpha}$ и перейдем к пределу $x \rightarrow -1$. Учитывая (2.5) и то, что по формуле (1.7) функция $\varphi(x)$ непрерывна на отрезке $[-1, 1]$, для определения неизвестной степени α получим уравнение $\operatorname{ctg} \alpha \pi = 0$, откуда $\alpha = \frac{1}{2}$.

Таким образом, контактное напряжение вдоль участка соединения накладки с полуплоскостью имеет вид

$$\tau^*(x) = a \tau(ax) = \frac{\chi(x, \lambda)}{\sqrt{1+x}} \quad (2.6)$$

Из дальнейших рассмотрений будет видно, что функция $\chi(x, \lambda)$, принадлежащая классу H по переменной x , по переменной λ является целой функцией, отличной от нуля в области изменения своих аргументов. Сказанное и означает, что присущая контактным напряжениям особенность на конце $x = -1$ упругой накладки характеризуется квадратным корнем по формуле (2.6).

На другом конце $x = 1$ накладки контактное напряжение, как было отмечено выше, ограничено и подлежит определению. Контактное напряжение ограничено и во второй задаче, но на обоих концах накладки. Эти величины также должны быть определены.

§ 3. Сведение определяющих уравнений к бесконечным системам линейных уравнений

Как и в работе [3], сведение определяющих уравнений к бесконечным системам линейных уравнений здесь будет основываться на использовании некоторых важных интегральных соотношений для классических многочленов Якоби и Чебышева*. Нужные нам соотношения известны [9] и имеют вид

$$\int_{-1}^1 \frac{P_n^{(1/2, -1/2)}(s)}{s-x} \sqrt{\frac{1-s}{1+s}} ds = -\pi P_n^{(-1/2, 1/2)}(x) \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (3.1)$$

$$\int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-s^2} U_{n-1}(s)}{s-x} ds = -\pi T_n(x) \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (3.2)$$

Здесь $P_n^{(1/2, -1/2)}(x)$ и $P_n^{(-1/2, 1/2)}(x)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) — известные многочлены Якоби $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$, когда $\alpha = -\beta = 1/2$ и $-\alpha = \beta = 1/2$ соответственно. Эти многочлены, ортогональные на отрезке $[-1, 1]$ действительной оси по весу $\sqrt{(1-x)/(1+x)}$ и $\sqrt{(1+x)/(1-x)}$, соответственно, даются формулами

$$P_n^{(1/2, -1/2)}(x) = \frac{(2n-1)!!}{2n!!} \sin \frac{(2n+1)t}{2} \Big/ \sin \frac{t}{2} \quad x = \cos t \quad (3.3)$$

$$P_n^{(-1/2, 1/2)}(x) = \frac{(2n-1)!!}{2n!!} \cos \frac{(2n+1)t}{2} \Big/ \cos \frac{t}{2} \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

где считается, что $(-1)!! = 0!! = 1$.

Фигурирующие в соотношениях (3.2) $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$ и $U_{n-1}(x) = \sin(n \arccos x) / \sin(\arccos x)$ — известные многочлены Чебышева первого и второго рода соответственно.

Отметим, что имеет место и другое важное соотношение, получающееся из (3.1), если в нем поменять местами верхние индексы и соответствующим образом весовые функции.

* В указанной работе были использованы только многочлены Чебышева первого и второго рода.

Перейдем теперь к изложению способа сведения интегро-дифференциального уравнения (1.5) при граничных условиях (1.6) к бесконечной системе линейных уравнений. Сначала рассмотрим первую контактную задачу. Приняв во внимание сказанное в предыдущем параграфе относительно контактного напряжения под упругой накладкой, функцию $\varphi'(x)$ представим в виде

$$\varphi'(x) = x'_{-1} + \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \sum_{n=0}^{\infty} x'_n P_n^{(1/2, -1/2)}(x) \quad (-1 < x \leq 1) \quad (3.4)$$

Здесь коэффициенты $\{x'_n\}_{n=0}^{\infty}$ неизвестны и подлежат определению, притом x'_{-1} , точнее говоря, согласно (1.8) x'_{-1}/a дает значение контактного напряжения на конце $x = a$ накладки.

При помощи формул (1.7), (1.8) и (3.4) находим

$$\varphi(x) = x'_{-1}(1+x) + \sum_{n=0}^{\infty} x'_n I_n(x) \quad (-1 \leq x \leq 1) \quad (3.5)$$

где

$$I_n(x) = \int_{-1}^x \sqrt{\frac{1-s}{1+s}} P_n^{(1/2, -1/2)}(s) ds \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

Положив в последней формуле $x = \cos t$, $s = \cos u$ и воспользовавшись первой из формул (3.3), будем иметь

$$I_n(x) = \begin{cases} \pi - t + \sin t, & \text{при } n=0 \\ x = \cos t \quad (0 \leq t \leq \pi) \\ \frac{(2n-1)!!}{2n!!} \left[\frac{\sin(n+1)t}{n+1} - \frac{\sin nt}{n} \right], & \text{при } n=1, 2, \dots \end{cases} \quad (3.6)$$

Подставим теперь в (3.5) $x = 1$ или, что то же самое, в (3.6) $t = 0$ и учтём граничные условия (1.6). Получим, что

$$x'_{-1} = \frac{P - \pi x'_0}{2} \quad (3.7)$$

Приняв во внимание последнюю формулу, выражения функций $\varphi'(x)$ и $\varphi(x)$ из (3.4) и (3.5) подставим в интегро-дифференциальное уравнение (1.5). После элементарных операций придем к равенству

$$\pi \sum_{n=0}^{\infty} x'_n P_n^{(-1/2, 1/2)}(x) = \frac{P}{2} \ln \frac{1-x}{1+x} - \frac{P\alpha\lambda}{2} (1+x) + \sum_{n=0}^{\infty} x'_n d_n(x)$$

где

$$d_n(x) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2} \ln \frac{1-x}{1+x} + \frac{\lambda a \pi}{2} (1+x) - \lambda a I_0(x), & n=0 \\ -\lambda a I_n(x) & (n=1, 2, \dots) \end{cases} \quad (3.8)$$

Обе части последнего равенства умножим на $P_m^{(-1/2, 1/2)}(x) \sqrt{(1+x)/(1-x)}$ ($m=0, 1, 2, \dots$) и проинтегрируем в интервале $(-1, 1)$. Используя свойство ортогональности этих функций и везде перейдя к переменной t по формуле $x = \cos t$, получим бесконечную систему линейных уравнений

$$x_m = \frac{1}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} K_{m,n}^{(1)} x_n + a_m^{(1)} \quad (m=0, 1, 2, \dots) \quad (3.9)$$

где введены обозначения

$$K_{m,n}^{(1)} = \int_0^{\pi} d_n(\cos t) [\cos(m+1)t + \cos mt] dt \quad (m, n=0, 1, 2, \dots) \quad (3.10)$$

$$a_m^{(1)} = \frac{P}{\pi^2} \int_0^{\pi} \ln \left(\operatorname{tg} \frac{t}{2} \right) [\cos(m+1)t + \cos mt] dt - \\ - \frac{\lambda a P}{2\pi^2} \int_0^{\pi} (1 + \cos t) [\cos(m+1)t + \cos mt] dt \\ (m=0, 1, 2, \dots)$$

$$x_m = \frac{(2m-1)!!}{2m!!} x'_m$$

$$d_n(\cos t) = \begin{cases} -\pi \ln \left(\operatorname{tg} \frac{t}{2} \right) + \lambda a \pi \cos^2 \frac{t}{2} - \\ -\lambda a (\pi - t + \sin t) & \text{при } n=0 \\ -\lambda a \left[\frac{\sin(n+1)t}{n+1} - \frac{\sin nt}{n} \right] & \text{при } n=1, 2, \dots \end{cases} \quad (3.11)$$

Чтобы выписать явные выражения для ядра $\{K_{m,n}^{(1)}\}_{m,n=0}^{\infty}$ и свободного члена $\{a_m^{(1)}\}_{m=1}^{\infty}$, следует пользоваться известным разложением [9]

$$\ln \left(\operatorname{tg} \frac{t}{2} \right) = -2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2k-1)t}{2k-1} \quad (0 < t < \pi)$$

и формулами (3.6) и (3.8). Пропустив промежуточные элементарные выкладки, приведем их окончательные выражения

$$\begin{aligned}
 K_{m, n}^{(1)} = & \left\{ \begin{aligned}
 & \pi^2 + \frac{3\lambda a \pi^2}{4} - \lambda a \left(4 + \pi - \frac{\pi^2}{2} \right) \\
 & \quad n = 0, \quad m = 0 \\
 & \pi^2 + \frac{\lambda a \pi^2}{4} + \frac{2\lambda a}{3} \\
 & \quad n = 0, \quad m = 1 \\
 & \frac{\pi^2}{2k-1} + \frac{2\lambda a (2k+3)}{(2k+1)^2 (2k-1)} \\
 & \quad n = 0, \quad m = 2k \quad (k = 1, 2, \dots) \\
 & \frac{\pi^2}{2k-1} + \frac{2\lambda a (2k-3)}{(2k-1)^2 (2k+1)} \\
 & \quad n = 0, \quad m = 2k-1 \quad (k = 2, 3, \dots) \\
 & -2\lambda a \left\{ \frac{1 - (-1)^{n+m}}{(n^2 - m^2)(n+m+2)} - \frac{1 + (-1)^{n+m}}{(n-m-1)[(n+1)^2 - m^2]} \right\} \\
 & \quad n \neq m, \quad n \neq m-1, \quad n \neq m+1 \\
 & \quad - \frac{4\lambda a}{2m+1}, \quad \text{при } n = m \\
 & \quad - \frac{8\lambda a m}{4m^2 - 1}, \quad \text{при } n = m-1 \\
 & \quad \frac{8\lambda a (m+1)}{(2m+3)(2m+1)}, \quad \text{при } n = m+1 \\
 & \left. \begin{aligned}
 & - \frac{P}{\pi} - \frac{3\lambda a P}{4\pi}, \quad m = 0 \\
 & - \frac{P}{\pi} - \frac{\lambda a P}{4\pi}, \quad m = 1 \\
 & - \frac{P}{\pi (2k+1)}, \quad m = 2k \\
 & - \frac{P}{\pi (2k-1)}, \quad m = 2k-1 \quad (k = 1, 2, \dots)
 \end{aligned} \right\}
 \end{aligned} \right. \quad (3.12)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a_m^{(1)} = & \left\{ \begin{aligned}
 & - \frac{P}{\pi} - \frac{3\lambda a P}{4\pi}, \quad m = 0 \\
 & - \frac{P}{\pi} - \frac{\lambda a P}{4\pi}, \quad m = 1 \\
 & - \frac{P}{\pi (2k+1)}, \quad m = 2k \\
 & - \frac{P}{\pi (2k-1)}, \quad m = 2k-1 \quad (k = 1, 2, \dots)
 \end{aligned} \right. \quad (3.13)
 \end{aligned}$$

Таким образом, решение первой контактной задачи сведено к решению бесконечной системы линейных уравнений (3.9) с ядром $[K_{m, n}^{(1)}]_{m, n=0}^{\infty}$ и свободным членом $\{a_m^{(1)}\}_{m=0}^{\infty}$, которые имеют довольно простые выражения и даются формулами (3.12) и (3.13). После того как определен коэффициент x_0 или же $x'_0 = 2x_0$, коэффициент x'_{-1} определится из соотношения (3.7).

Обратимся теперь ко второй контактной задаче. Согласно изложенному в предыдущих параграфах, можно полагать

$$\varphi'(x) = \frac{y_{-1} - y_0}{2} x + \frac{y_{-1} + y_0}{2} + \sqrt{1-x^2} \sum_{n=1}^{\infty} y_n U_{n-1}(x) \quad (3.14)$$

($-1 \leq x \leq 1$)

где $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ — неизвестные коэффициенты, подлежащие определению, притом y_{-1} и y_0 , точнее говоря, согласно (1.8), y_{-1}/a и y_0/a являются значениями контактного напряжения на концах накладки.

Функция $\varphi(x)$ из (1.7) будет даваться формулой

$$\varphi(x) = \frac{y_{-1} - y_0}{2} (x^2 - 1) + \frac{y_{-1} + y_0}{2} (x + 1) + \sum_{n=1}^{\infty} y_n J_n(x) \quad (3.15)$$

($-1 \leq x \leq 1$)

где

$$J_n(x) = \int_{-1}^x \sqrt{1-s^2} U_{n-1}(s) ds \quad (n=1, 2, \dots)$$

Легко видеть, что

$$J_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left(\pi - t + \frac{\sin 2t}{2} \right) & \text{при } n=1 \\ & (0 \leq t \leq \pi) \quad x = \cos t \\ \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(n+1)t}{n+1} - \frac{\sin(n-1)t}{n-1} \right] & \text{при } n=2, 3, \dots \end{cases} \quad (3.16)$$

Удовлетворив граничным условиям (1.6), находим

$$y_{-1} = P - x_0 - \frac{\pi}{2} x_1 \quad (3.17)$$

Если теперь подставить выражения $\varphi'(x)$ и $\varphi(x)$ из (3.14) и (3.15) в интегро-дифференциальное уравнение (1.5) и пользоваться соотношениями (3.2), (3.16) и (3.17), то совершенно аналогичным способом, который был изложен выше, получим относительно неизвестных коэффициентов $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ следующую бесконечную систему уравнений:

$$y_m = \sum_{n=0}^{\infty} K_{m,n}^{(2)} y_n + a_m^{(2)} \quad (m=0, 1, 2, \dots) \quad (3.18)$$

где

$$K_{m,n}^{(2)} = \begin{cases} 0 & \text{при } m=n=0 \\ -\frac{4}{\lambda a \pi} \int_0^{\pi} h_n(t) dt, & m=0, \quad n=1, 2, \dots \\ \frac{2}{\pi^2} \int_0^{\pi} h_n(t) \cos mt dt, & m=1, 2, \dots; \quad n=0, 1, 2, \dots \end{cases} \quad (3.19)$$

$$a_m^{(2)} = \begin{cases} -\frac{3P}{2} & \text{при } m=0 \\ \frac{2P}{\pi^2} \int_0^{\pi} \left[2\cos^2 \frac{t}{2} \ln \left(\operatorname{tg} \frac{t}{2} \right) - \lambda a \cos^2 \frac{t}{2} + \frac{\lambda a \sin^2 t}{4} \right] \cos mt dt & (m=1, 2, \dots) \end{cases}$$

$$h_0(t) = -2 \left[1 + \cos t \ln \left(\operatorname{tg} \frac{t}{2} \right) \right] - \frac{\lambda a \sin^2 t}{2}$$

$$h_1(t) = -\frac{\pi}{2} \left[1 + 2\cos^2 \frac{t}{2} \ln \left(\operatorname{tg} \frac{t}{2} \right) \right] - \frac{\pi \lambda a \sin^2 t}{8} +$$

$$+ \frac{\pi \lambda a}{2} \cos^2 \frac{t}{2} - \frac{\lambda a}{2} \left(\pi - t + \frac{\sin 2t}{2} \right) \quad (3.20)$$

$$h_n(t) = -\frac{\lambda a}{2} \left[\frac{\sin(n+1)t}{n+1} - \frac{\sin(n-1)t}{n-1} \right], \quad n=2, 3, \dots$$

Явные выражения $\{K_{m,n}^{(2)}\}_{m,n=0}^{\infty}$ и $\{a_m^{(2)}\}_{m=0}^{\infty}$ будут следующие:

$$K_{m,n}^{(2)} = \begin{cases} 0, & \text{при } n=m=0 \\ -\frac{\pi}{4}, & \text{при } n=1, m=0 \\ \frac{8n[(-1)^n + 1]}{\pi(n^2 - 1)}, & \text{при } n=2, 3, \dots; m=0 \\ \frac{2}{\pi} \left(\frac{4}{3} + \frac{\lambda a}{8} \right), & n=0, m=2 \\ \frac{8k}{\pi(4k^2 - 1)}, & n=0, m=2k \quad (k=2, 3, \dots) \\ 0, & n=0, m=2k-1 \quad (k=1, 2, 3, \dots) \\ -\frac{\pi^2}{2} \left(\frac{\lambda a}{4} + 1 \right) + \frac{4\lambda a}{3}, & n=1, m=1 \\ -\pi^2 \left(\frac{\lambda a}{32} + \frac{1}{3} \right), & n=1, m=2 \\ \frac{4\lambda a}{(2k-1)^2 [(2k-1)^2 - 4]} - \frac{\pi^2}{2(2k-1)}, & n=1, m=2k-1 \\ & (k=2, 3, \dots) \\ -\frac{\pi^2 k}{4k^2 - 1}, & n=1, m=2k \\ \frac{4\lambda a n [(-1)^{n+m} + 1]}{\pi^2 [(n-m)^2 - 1] [(n+m)^2 - 1]}, & \left. \begin{array}{l} n \neq m-1 \\ n \neq m+1 \end{array} \right\} n=2, 3, \dots \\ 0, & \left. \begin{array}{l} n=m-1 \\ n=m+1 \end{array} \right\} m=1, 2, \dots \end{cases} \quad (3.21)$$

$$a_m^{(2)} = \begin{cases} -\frac{3P}{2}, & m=0 \\ -\frac{2P}{\pi} \left(\frac{\lambda a}{4} + 1 \right), & m=1 \\ -\frac{2P}{\pi} \left(\frac{\lambda a}{16} + \frac{2}{3} \right), & m=2 \\ -\frac{2P}{\pi(2k-1)}, & m=2k-1 \\ -\frac{4kP}{\pi(4k^2-1)}, & m=2k \end{cases} \quad (3.22)$$

($k=2, 3, \dots$)

Таким образом, решение второй контактной задачи сводится к решению бесконечной системы (3.18) с ядром $\{K_{m,n}^{(2)}\}_{m,n=0}^{\infty}$ и свободным членом $\{a_m^{(2)}\}_{m=0}^{\infty}$, которые даются формулами (3.21) и (3.22). После того как определены коэффициенты y_0 и y_1 , коэффициент y_{-1} определится из (3.17).

§ 4. Исследование бесконечных систем линейных уравнений

Исследование бесконечных систем уравнений (3.9) и (3.18) удобнее провести, отталкиваясь от выражений ядер в виде (3.10) и (3.19).

Сначала рассмотрим бесконечную систему (3.9). Составим суммы

$$S_m^{(1)} = \frac{1}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} |K_{m,n}^{(1)}| \quad (m=0, 1, 2, \dots)$$

Можем записать

$$S_m^{(1)} = \frac{1}{\pi^2} \left[|K_{m,0}^{(1)}| + \sum_{n=1}^{\infty} |K_{m,n}^{(1)}| \right]$$

Чтобы оценить входящие в последнюю формулу суммы, воспользуемся формулами (3.10) и (3.11), которые дают

$$K_{m,n}^{(1)} = -\lambda a \left[\frac{P_{m+1,n+1} + P_{m,n+1}}{n+1} - \frac{P_{m+1,n} + P_{m,n}}{n} \right] \quad (4.1)$$

($n=1, 2, \dots; m=0, 1, 2, \dots$)

где

$$P_{m,n} = \int_0^{\pi} \cos mt \sin nt dt = \begin{cases} 0, & \text{при } n=m \\ \frac{[(-1)^{n+m} - 1]^n}{n^2 - m^2}, & n \neq m \end{cases} \quad (4.2)$$

Приняв во внимание (4.1), будем иметь

$$S_m^{(1)} = \frac{1}{\pi^2} \left| |K_{m,0}^{(1)}| + \lambda \alpha \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{P_{m+1,n+1} + P_{m,n+1}}{n+1} - \frac{P_{m+1,n} + P_{m,n}}{n} \right| \right| \ll$$

$$\ll \frac{1}{\pi^2} \left\{ |K_{m,0}^{(1)}| + \lambda \alpha \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|P_{m+1,n+1}|}{n+1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|P_{m,n+1}|}{n+1} + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|P_{m+1,n}|}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|P_{m,n}|}{n} \right] \right\}$$

или же

$$S_m^{(1)} \ll \frac{1}{\pi^2} [|K_{m,0}^{(1)}| + \lambda \alpha (Q_{m+1} + Q_m + R_{m+1} + R_m)] \quad (4.3)$$

где

$$Q_m = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|P_{m,n+1}|}{n+1}$$

$$(m = 0, 1, 2, \dots)$$

$$R_m = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|P_{m,n}|}{n}$$

Далее оценим суммы R_m . Имеем согласно (4.2)

$$R_m = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|[(-1)^{n+m} - 1]|}{|n^2 - m^2|} \ll 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|n^2 - m^2|} =$$

$$= 2 \left[\sum_{n=1}^{m-1} \frac{1}{m^2 - n^2} + \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - m^2} \right]$$

Поскольку функция $f(x) = 1/(m^2 - x^2)$ в интервале $(1 < x < m)$ монотонно возрастает, то справедливо неравенство

$$\sum_{n=1}^{m-1} \frac{1}{m^2 - n^2} < \frac{1}{2m-1} + \int_1^{m-1} \frac{dx}{m^2 - x^2}$$

которое дает

$$\sum_{n=1}^{m-1} \frac{1}{m^2 - n^2} < \frac{1}{2m-1} + \frac{\ln(2m-1)}{2m} \quad (m = 1, 2, \dots)$$

Совершенно аналогичным образом показывается, что

$$\sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - m^2} < \frac{1}{2m+1} + \frac{\ln(2m+1)}{2m} \quad (m = 1, 2, \dots)$$

Следовательно,

$$R_m < 2 \left[\frac{4m}{4m^2 - 1} + \frac{\ln(4m^2 - 1)}{2m} \right] \quad (m = 1, 2, \dots)$$

Отсюда непосредственно следует, что

$$R_m = o\left(\frac{\ln(m)}{m}\right) \quad \text{при} \quad m \rightarrow \infty$$

то есть $R_m \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$ как $\ln(m)/m$.

Точно такой же порядок имеют и другие суммы, входящие в неравенство (4.3). С другой стороны, $|K_{m,0}^{(1)}|$, как видно из формулы (3.12), при $m \rightarrow \infty$ стремится к нулю как $1/m$. Сказанное позволяет утверждать, что

$$S_m^{(1)} = o\left(\frac{\ln(m)}{m}\right) \quad \text{при} \quad m \rightarrow \infty$$

Это и означает, что бесконечная система уравнений (3.9) при любом значении физического параметра λ квазивполне регулярна, притом суммы $S_m^{(1)}$ при $m \rightarrow \infty$ стремятся к нулю довольно быстро, а именно, как $\ln(m)/m$. На самом деле порядок убывания сумм $S_m^{(1)}$ выше указанного, что можно получить, отправляясь от выражения ядра $\{K_{m,n}^{(1)}\}_{m,n=0}^{\infty}$, из формулы (3.12). На этом, однако, останавливаться не будем.

Свободные члены $a_m^{(1)}$ бесконечной системы (3.9) не только ограничены, но и стремятся к нулю при $m \rightarrow \infty$ как $1/m$. Это видно из (3.13).

Итак, решение бесконечной системы можно получить с любой необходимой точностью.

Обращаясь к бесконечной системе уравнений (3.18), следует лишь отметить, что ее исследование можно провести совершенно аналогичным образом и для нее имеют место те же самые результаты.

Преобразуем теперь бесконечные системы уравнений (3.9) и (3.18) к виду, в некотором смысле более регулярному. Бесконечную систему (3.9) представим в виде

$$x_m = \frac{1}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} K_{m,n}^{(1)} x_n + \frac{1}{\pi^2} K_{m,0}^{(1)} x_0 + a_m^{(1)} \quad (m = 1, 2, \dots) \quad (4.4)$$

Пусть $\{x_m^{(1)}\}_{m=1}^{\infty}$ и $\{x_m^{(2)}\}_{m=1}^{\infty}$ будут решениями бесконечной системы (4.4) при правых частях, равных $\{a_m^{(1)}\}_{m=1}^{\infty}$ и $\frac{1}{\pi^2} \{K_{m,0}^{(1)}\}_{m=1}^{\infty}$ соответственно. Тогда решение $\{X_m\}_{m=1}^{\infty}$ системы (4.4) будет даваться формулой

$$x_m = x_m^{(1)} + x_0 x_m^{(2)} \quad (m = 1, 2, \dots) \quad (4.5)$$

С другой стороны, первое уравнение (3.9), т. е. уравнение при $m = 0$, дает

$$\left[1 - \frac{1}{\pi^2} K_{0,0}^{(1)} \right] x_0 = \frac{1}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} K_{0,n}^{(1)} x_n + a_0^{(1)}$$

Учитывая (4.5), отсюда находим

$$x_0 = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} K_{0,n}^{(1)} x_n^{(1)} + \pi^2 a_0^{(1)}}{\pi^2 - K_{0,0}^{(1)} - \sum_{n=1}^{\infty} K_{0,n}^{(1)} x_n^{(2)}} \quad (4.6)$$

то есть после того как точно или приближенно определены $\{x_m^{(1)}\}_{m=1}^{\infty}$ и $\{x_m^{(2)}\}_{m=1}^{\infty}$ из бесконечной системы (4.4) при правых частях, равных $\{a_m^{(1)}\}_{m=1}^{\infty}$ и $\frac{1}{\pi^2} \{K_{m,0}^{(1)}\}_{m=1}^{\infty}$ соответственно, коэффициент x_0 точно или приближенно определится по формуле (4.6).

Таким образом, вместо бесконечной системы уравнений (3.9) можно рассматривать бесконечную систему

$$x_m = \frac{1}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} K_{m,n}^{(1)} x_n + b_m^{(1)} \quad (m = 1, 2, \dots) \quad (4.7)$$

где

$$b_m^{(1)} = a_m^{(1)} \quad \text{или} \quad b_m^{(1)} = \frac{1}{\pi^2} K_{m,0}^{(1)} \quad (m = 1, 2, \dots).$$

Аналогичное преобразование приводит бесконечную систему (3.18) к системе

$$y_m = \sum_{n=2}^{\infty} K_{m,n}^{(2)} y_n + b_m^{(2)} \quad (m = 2, 3, \dots) \quad (4.8)$$

где $b_m^{(2)} = a_m^{(2)}$ или $b_m^{(2)} = K_{m,0}^{(2)}$, или $b_m^{(2)} = K_{m,1}^{(2)}$ ($m = 2, 3, \dots$). Если $\{y_m^{(1)}\}_{m=2}^{\infty}$, $\{y_m^{(2)}\}_{m=2}^{\infty}$ и $\{y_m^{(3)}\}_{m=2}^{\infty}$ являются решениями бесконечной системы (4.8) при правых частях, совпадающих с $\{a_m^{(2)}\}_{m=2}^{\infty}$, $\{K_{m,0}^{(2)}\}_{m=2}^{\infty}$ и $\{K_{m,1}^{(2)}\}_{m=2}^{\infty}$ соответственно, то коэффициенты y_0 и y_1 будут определяться из следующей системы двух уравнений

$$\begin{aligned} \left[1 - K_{0,0}^{(2)} - \sum_{n=2}^{\infty} K_{0,n}^{(2)} y_n^{(2)} \right] y_0 - \left[K_{0,1}^{(2)} + \sum_{n=2}^{\infty} K_{0,n}^{(2)} y_n^{(3)} \right] y_1 = \\ = \sum_{n=2}^{\infty} K_{0,n}^{(2)} y_n^{(1)} + a_0^{(2)} \\ - \left[K_{1,0}^{(2)} + \sum_{n=2}^{\infty} K_{1,n}^{(2)} y_n^{(2)} \right] y_0 + \left[1 - K_{1,1}^{(2)} - \sum_{n=2}^{\infty} K_{1,n}^{(2)} y_n^{(3)} \right] y_1 = \\ = \sum_{n=2}^{\infty} K_{1,n}^{(2)} y_n^{(1)} + a_1^{(2)} \end{aligned}$$

Квазиволномерегулярность бесконечных систем уравнений (4.7) и (4.8) при любом значении параметра λ была доказана выше. Докажем теперь, что указанные бесконечные системы при определенных значениях параметра λ вполне регулярны.

Сначала рассмотрим систему (4.7). Составим суммы

$$R_m^{(1)} = \frac{1}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} |K_{m,n}^{(1)}| \quad (m=1, 2, \dots)$$

Согласно (4.1) будем иметь

$$R_m^{(1)} \leq \frac{\lambda a}{\pi^2} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|P_{m+1,n+1}|}{n+1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|P_{m,n+1}|}{n+1} + \right. \\ \left. + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|P_{m+1,n}|}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|P_{m,n}|}{n} \right] \quad (4.9)$$

Вспользуемся известным неравенством Коши-Буняковского

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k \right| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 \sum_{k=1}^{\infty} |b_k|^2}$$

где последовательности $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ принадлежат координатному гильбертову пространству l_2 , то есть

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 < \infty, \quad \sum_{k=1}^{\infty} |b_k|^2 < \infty$$

Применив это неравенство, можем записать

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|P_{m,n}|}{n} \leq \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{n=1}^{\infty} |P_{m,n}|^2}$$

То, что последовательность $\{P_{m,n}\}_{n=1}^{\infty}$ при любом фиксированном m ($m=1, 2, \dots$) принадлежит l_2 , вытекает из следующего. При фиксированном m последовательность $\frac{2}{\pi} |P_{m,n}|_{n=1}^{\infty}$ является последовательностью коэффициентов Фурье функции $\cos mt$, принадлежащей пространству $L_2(0, \pi)$, по полной ортогональной системе функций $\{\sin nt\}_{n=1}^{\infty}$, которая также входит в пространство $L_2(0, \pi)$. Поэтому на основании известного неравенства Бесселя из теории рядов Фурье

$$\frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} |P_{m,n}|^2 \leq \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos^2 mt dt = 1 \quad (m=1, 2, \dots)$$

Следовательно,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|P_{m, n}|^2}{n^2} \leq \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \frac{\pi^2}{4}}$$

Заметив, что [9]

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

будем иметь

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|P_{m, n}|^2}{n^2} \leq \frac{\pi^2}{2\sqrt{6}} \quad (m = 1, 2, \dots)$$

Точно такие же оценки имеют место и для других сумм, входящих в неравенство (4.9). При помощи этих оценок получим

$$R_m^{(1)} < \frac{2\lambda a}{\sqrt{6}} \quad (m = 1, 2, \dots)$$

Требуем, чтобы было

$$\frac{2\lambda a}{\sqrt{6}} < 1$$

откуда $\lambda < \sqrt{6}/2a$.

Таким образом, бесконечная система линейных уравнений (4.7) при $\lambda < \sqrt{6}/2a$ вполне регулярна.

Совершенно аналогичным образом, приняв во внимание формулы (3.19) и (3.20), докажем, что бесконечная система уравнений (4.8) вполне регулярна при $\lambda < \sqrt{6}/a$. На самом деле, указанные бесконечные системы вполне регулярны при более широком интервале изменения физического параметра λ . На этом вопросе, однако, останавливаться не будем.

Таким образом, можно считать, что для бесконечных систем уравнений (3.9) и (3.18), квазивполнерегулярных в общем случае, вполне регулярность при указанных значениях параметра λ начинается фактически с первого и второго номеров соответственно.

Ն. Խ. ՀԱՐՈՒԹՅՈՒՆՅԱՆ, Ս. Մ. ՄԽԻՐԱՐՅԱՆ

ԱՌԱՋԳԱԿԱՆ ՎԵՐԱԳԻՐՆԵՐՈՎ ՄԱՍՆԱԿԻՈՐԵՆ ԱՄՐԱՑՎԱԾ
ԿԻՍԱՀԱՐԹՈՒԹՅԱՆ ՀԱՄԱՐ ՄԻ ՔԱՆԻ ԿՈՆՏԱԿՏԱՑԻՆ ԽՆԴԻՐՆԵՐ

Ա մ փ ո փ ու մ

Աշխատանքում դիտարկվում են առաձգական կիսահարթության համար, որը իր եզրագծի վերջավոր հատվածի վրա ուժեղացված է փոքր հաստությու՛ն ունեցող առաձգական վերադիրնե՛րով, մի քանի կոնտակտային խնդիրներ: Այստեղ զրված խնդիրների առանձնահատկությունը, ի տարբերություն այն խնդիրների, որոնք դիտարկված են հեղինակների նախորդ աշխատանքներում [1, 2, 3], կայանում է նրանում, որ հիմքի հետ մասնակիորեն ամրացված առաձգական վերադիրների ծայրակետերում լարումները վերջավոր են (նրանք անվերջ են նշված աշխատանքներում):

Այդ խնդիրների լուծումը բերվում է Կոշու կորիզով սինգուլյար ինտեգրո-դիֆերենցիալ հավասարումների լուծմանը որոշակի եզրային պայմանների դեպքում: Առաջարկվում է այդ հավասարումների լուծման էֆեկտիվ եղանակ:

CERTAIN CONTACT PROBLEM FOR A SEMI-PLANE WITH
PARTLY FASTENED ELASTIC STIFFENERS

N. Kh. ARUTIUNIAN, S. M. MKHITARIAN

S u m m a r y

Certain contact problems are considered for an elastic semi-plane, reinforced over the finite segment of its boundary by elastic stiffeners of a small thickness partly fastened to the semi-plane. A characteristic feature of the problems in question, unlike those studies in the previous contributions by the present authors [1, 2, 3], lies in the fact that at the ends of a partly fastened elastic stiffener certain finite stresses (infinite in the above references) develop which are to be determined.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Арутюнян Н. Х. Контактная задача для полуплоскости с упругим креплением. ПММ, т. 32, вып. 4, 1968, 632—646.
2. Арутюнян Н. Х., Мхитарян С. М. Периодическая контактная задача для полуплоскости с упругими накладками. ПММ, т. 33, вып. 5, 1969, 813—843.
3. Arutunyan N. K. and Mkhitaryan S. M. Some contact problems for a semi-plane with elastic stiffeners. Trends in elasticity and thermoelasticity; Witold Nowacki Anniversary Volume. Wolters-Noordhoff Publishing, 1971, p. 3—20
4. Melan E. Ein Beitrag zur Theorie geschweisster Verbindungen. Ingenieur Archiv, vol. 3, No 2, 1932, p. 123—129
5. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. Изд. 5, М., „Наука“, 1966.

6. *Reissner E.* Note on the Problem of the Distribution of Stress in a Thin Stiffened Elastic Sheet. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, Vol. 26, 1940, p. 300—305.
7. *Стернберг Е., Муки Р.* Передача нагрузки от растягиваемого поперечного стержня к полубесконечной упругой пластине. *Прикладная механика, Труды американского о-ва инженеров-механиков, русский перевод, серия Е, т. 35, № 4, 1968, 124—135.*
8. *Мухомелишвили Н. И.* Сиггулярные интегральные уравнения. Изд. 3, М., „Наука“, 1968.
9. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Изд. 4, М., Физматгиз, 1962.