ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXV, № 1, 1972 Механика

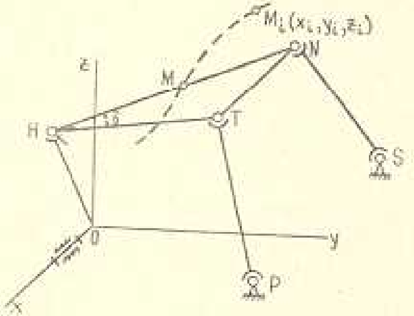
К. Х. ШАХБАЗЯН, С. Б. ГАРАНЯН

СИНТЕЗ ОДНОКОНТУРНОГО ПРОСТРАНСТВЕННОГО ПЯТИЗВЕННОГО МЕХАНИЗМА ПО ИЗВЕСТНЫМ ДИСКРЕТНЫМ ПОЛОЖЕНИЯМ ШАТУННОЙ ТОЧКИ

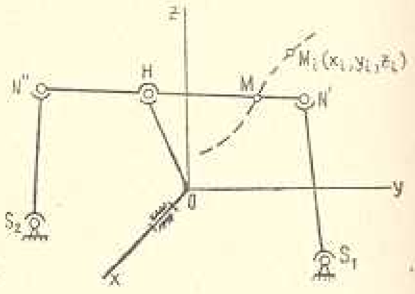
Необходимость решения многих важных задач проектирования исполнительных механизмов для систем ориентации, космической техники, машин-автоматов и т. д. обусловили быстрое развитие теории синтеза пространственных механизмов.

Авторами работ [1]—[5], [7] созданы основные положения пространственной кинематической геометрии. Частная задача синтеза механизма, воспроизводящего заданные в пространстве точки, решена (методом квадратического приближения) в работе [6].

В данной статье дан синтез пространственного пятизвенного механизма типа ВССССС (фиг. 2), предназначенного также для воспроизведения заданных в пространстве точек. Этот механизм, по-видимому, — наиболее приемлемый среди пятизвенных механизмов для воспроизведения пространственных точек. Например, по сравнению с механизмом 1 (фиг. 1), он обладает следующими преимуществами:



Фиг. 1.



Фиг. 2.

а) отсутствие недостатков, связанных с наличием сферической пары с пальцем;

б) одноконтурность механизма;

в) простота синтеза (меньший объем расчетных формул, следовательно, и вычислений).

Отметим, кстати, что при подсчете степени подвижности механизмов, изображенных на фиг. 1 и 2, следует учесть, что они соответственно имеют два и три плавающих звена.

В основе нижеизложенного интерполяционного синтеза лежит обобщенное на пространственный случай основное расчетное уравнение работы [8].

Постановка задачи. Пусть в системе $x\ y\ z$ дано n точек $M_i\ (M_{ix},\ M_{iy},\ M_{iz})$, $i = (1,\ 2, \ldots,\ n)$.

Требуется спроектировать пространственный пятизвенный механизм, имеющий на шатуне точку, траектория которой проходит через заданные точки M_i.

Для наглядности данную задачу разобъем на составные, совокупность решений которых даст решение поставленной задачи.

1. *Определение области существования некоторых свободных параметров и их выбор.* Для изображенного на фиг. 1 пятизвенного механизма выбираем плоскость и центр вращения шарнирной точки H кривошипа OH

$$H_y^2 + H_z^2 = b^2 \tag{1}$$

Обозначим длину отрезков $M_i H_i$ через d. Тогда первую составную задачу можно сформулировать так.

Параметры b и d выбрать так, чтобы на окружности (1) можно было отыскать точки $H_i\ (H_{ix},\ H_{iy})$, соответствующие расстояния которых до заданных точек M_i были бы постоянной величиной, равной d.

Значения параметров b и d в зависимости от координат заданных точек $M_i\ (M_{ix},\ M_{iy},\ M_{iz})$ можно выбрать по условиям

$$d \geqslant |M_{ix}|_{\max},\ 2(d+b) \geqslant a \tag{2}$$

где a — наибольшая из величин $|M_{iy}|_{\max}$ и $|M_{iz}|_{\max}$.

Условия (2) являются необходимыми, но недостаточными для существования решения задачи 1 и служат лишь для непосредственного выбора значений b и d. Далее эти значения проверяются по условию

$$(M_{ix}^2 + M_{iy}^2 + M_{iz}^2 - d^2 + b^2)^2 - 4b^2(M_{iz}^2 + M_{iy}^2) \leqslant 0 \tag{3}$$

являющемуся необходимым и достаточным для существования решения задачи. Как и следовало ожидать, случай равенства в условии (3) определяет поверхность тора.

После выбора b и d из нижеследующей системы

$$\begin{aligned} &M_{ix}^2 + (M_{iy} - H_{iy})^2 + (M_{iz} - H_{iz})^2 = d^2 \\ &H_{iy}^2 + H_{iz}^2 = b^2 \end{aligned} \tag{4}$$

определяем ординаты точек H_i

$$H_{iy} = \frac{V_i \pm \sqrt{V_i^2 - m_i \cdot \rho_{ix}^2}}{2\rho_{ix}^2} \tag{5}$$

где

$$\rho_{ix}^2 = M_{iy}^2 + M_{iz}^2$$

$$V_i = M_{iy}(M_{ix}^2 + \rho_{ix}^2 + b^2 - d^2)$$

$$m_i = (M_{ix}^2 + \rho_{ix}^2 + b^2 - d^2)^2 - 4b^2 M_{iz}^2$$

Имея H_{iy}, по формуле

$$\varphi_i = \arccos \frac{H_{iy}}{b} \tag{6}$$

определим углы наклона кривошипа.

Из уравнения (1) найдем величины H_{iz}.

Направляющие косинусы прямых $H_i M_i$ определим по формулам

$$\cos\alpha_i = \frac{M_{ix}}{d}, \quad \cos\beta_i = \frac{M_{iy} - H_{iy}}{d}, \quad \cos\gamma_i = \frac{M_{iz} - H_{iz}}{d} \tag{7}$$

2. *Синтез шатуна.* Имея координаты точки $H_i(H_{iy}, H_{iz})$ и направляющие косинусы прямых $H_i M_i$, можем приступить к решению следующей задачи.

В пространстве $x\,y\,z$ дано несколько положений $H_i M_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ некоторой прямой HM (ось шатуна).

Требуется на прямой HM отыскать точку N, положения N_i которой лежат на некоторой сферической поверхности. (Эту задачу, по аналогии с подобной плоской задачей, можно назвать также задачей синтеза по положениям оси шатуна).

Центр сферы S есть точка пересечения плоскостей симметрии отрезков между искомыми точками N_i. Уравнения этих плоскостей (их число на единицу меньше числа заданных прямых) можно представить в виде

$$(N_{jx} - N_{1x})(2x - N_{jx} - N_{1x}) + (N_{jy} - N_{1y})(2y - N_{jy} - N_{1y}) +$$
$$+ (N_{jz} - N_{1z})(2z - N_{jz} - N_{1z}) = 0 \tag{8}$$
$$j = (2, 3, \ldots, n)$$

Координаты искомой точки N_i через неизвестную длину l $(l = H_i N_i)$ и координаты точки H_i выражаются соотношениями

$$N_{ix} = l\cos\alpha_i$$
$$N_{iy} = H_{iy} + l\cos\beta_i \tag{9}$$
$$N_{iz} = H_{iz} + l\cos\gamma_i$$

Отметим, что длина l может принимать также отрицательные значения, означающие, что искомые точки лежат на той стороне от точки H, которая соответствует отрицательному направлению прямой. Это объясняется тем, что если α_i, β_i, γ_i — углы наклона прямой $H_i M_i$, то $180° + \alpha_i$, $180° + \beta_i$, $180° + \gamma_i$ — также углы наклона этой прямой.

С учетом равенств (9) уравнения (8) после преобразований можно представить в виде

$$lB_jx + (C_j + lD_j)\,y + (Q_j + lF_j)\,z + lE_j = 0 \qquad (10)$$

где

$$\begin{aligned} &C_j = H_{jy} - H_{1y}\\ &Q_j = H_{jz} - H_{1z}\\ &B_j = \cos\alpha_j - \cos\alpha_1\\ &D_j = \cos\beta_j - \cos\beta_1\\ &F_j = \cos\gamma_j - \cos\gamma_1\\ &E_j = H_{1y}\cos\beta_1 + H_{1z}\cos\gamma_1 - (H_{jy}\cos\beta_j + H_{jz}\cos\gamma_j)\\ &j = (2,\ 3,\ \ldots,\ n) \end{aligned} \qquad (10')$$

Для определения координат центра $S\,(x,\ y,\ z)$ сферы, уравнения (10) должны рассматривать как одну систему

$$\begin{aligned} &lB_2x + (C_2 + lD_2)\,y + (Q_2 + lF_2)\,z + lE_2 = 0\\ &lB_3x + (C_3 + lD_3)\,y + (Q_3 + lF_3)\,z + lE_3 = 0\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &lB_nx + (C_n + lD_n)\,y + (Q_n + lF_n)\,z + lE_n = 0 \end{aligned} \qquad (10'')$$

Если заданное число положений прямой HM меньше пяти, то, как видно из системы (10), для определенности ее решений надо произвольно задаваться значениями $5-n$ параметров, за исключением тех значений, при которых ранг системы может оказаться меньше числа неизвестных, подлежащих определению.

В общем случае поставленную задачу можно решить для $n = 7$ (см., например, [3]).

Ниже мы ограничимся решением задачи для $n = 5$.

При этом система (10″) имеет определенное решение, если

$$\Delta = \begin{vmatrix} B_2 & C_2 + lD_2 & Q_2 + lF_2 & E_2\\ B_3 & C_3 + lD_3 & Q_3 + lF_3 & F_3\\ B_4 & C_4 + lD_4 & Q_4 + lF_4 & E_4\\ B_5 & C_5 + lD_5 & Q_5 + lF_5 & E_5 \end{vmatrix} = 0 \qquad (11)$$

и

$$r = 3 \qquad (12)$$

где Δ — определитель расширенной матрицы системы

r — ранг матрицы

$$\begin{vmatrix} B_2 & C_2 + lD_2 & Q_2 + lF_2 & E_2\\ B_3 & C_3 + lD_3 & Q_3 + lF_3 & E_3\\ B_4 & C_4 + lD_4 & Q_4 + lF_4 & E_4 \end{vmatrix}$$

Условие (11) приводится к уравнению

$$p_5 l^2 + q_5 l + k_5 = 0 \tag{13}$$

что всегда имеет место, если

$$q_5^2 - 4p_5 k_5 \geqslant 0 \tag{14}$$

где

$$p_5 = \begin{vmatrix} B_2 & D_2 & F_2 & E_2 \\ B_3 & D_3 & F_3 & E_3 \\ B_4 & D_4 & F_4 & E_4 \\ B_5 & D_5 & F_5 & E_5 \end{vmatrix}, \qquad k_5 = \begin{vmatrix} B_2 & C_2 & Q_2 & E_2 \\ B_3 & C_3 & Q_3 & E_3 \\ B_4 & C_4 & Q_4 & E_4 \\ B_5 & C_5 & Q_5 & E_5 \end{vmatrix}$$

$$q_5 = \begin{vmatrix} B_2 & D_2 & Q_2 & E_2 \\ B_3 & D_3 & Q_3 & E_3 \\ B_4 & D_4 & Q_4 & E_4 \\ B_5 & D_5 & Q_5 & E_5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} B_2 & C_2 & F_2 & E_2 \\ B_3 & C_3 & F_3 & E_3 \\ B_4 & C_4 & F_4 & E_4 \\ B_5 & C_5 & F_5 & E_5 \end{vmatrix} \tag{15}$$

Уравнение (13) есть основное расчетное уравнение при синтезе изложенным здесь способом.

Если условие (14) не выполняется, то следует варьировать значениями свободно выбранных параметров b и d.

Установив совместность системы (10″), определяем корни $l = l_1$ и $l = l_2$ уравнения (13).

Координаты двух шарнирных точек N' и N'' оси шатуна определяются по формулам (9), а координаты их центров $S_1(x_1, y_1, z_1)$ и $S_2(x_2, y_2, z_2)$ — из первых трех уравнений системы (10″).

Длина шатуна вычисляется по формуле

$$L = |l_1 - l_2| \tag{16}$$

3. *Синтез ведомых звеньев.* Ведомые звенья определяются парами точек N', S_1 и N'', S_2. Так как координаты этих точек уже определены, то для завершения синтеза остается лишь определить их длины

$$N'S_1 = \sqrt{(x_1 - N'_{1x})^2 + (y_1 - N'_{1y})^2 + (z_1 - N'_{1z})^2} \tag{17}$$

$$N''S_2 = \sqrt{(x_2 - N''_{1x})^2 + (y_2 - N''_{1y})^2 + (z_2 - N''_{1z})^2} \tag{18}$$

Замечание: Основное расчетное уравнение позволяет поставленную задачу решать без помощи ЭВМ. Однако, запрограммирование задачи позволит не только намного ускорить процесс проектирования, но и варьированием свободно выбранных параметров получить сколько угодно решений задачи, тем самым давая возможность выбрать механизм, удовлетворяющий также дополнительным требованиям синтеза.

Пример. В системе координат $x\ y\ z$ заданы пять точек $M_1(0,\ 0.2,\ 0.4)$, $M_2(0.5,\ 0.5,\ 1)$, $M_3(0.3,\ 0.6,\ 0.6)$, $M_4(0.4,\ 1,\ 0.8)$, $M_5(-0.6,\ 1.1,\ 1.3)$. Требуется определить размеры и расположение пятизвенного направляющего механизма (фиг. 2), воспроизводящего данные точки.

По условиям (2) выбрано $b = d = 1$. Эти значения проверены по неравенству (3).

Из (15) получено

$$p_5 = -0.032279, \quad q_5 = 0.017862, \quad k_5 = 0.052216$$

Определены корни уравнения (13)

$$l_1 = -1.024939, \quad l_2 = 1.578302$$

По (16) вычислена длина шатуна

$$L = 2.603241$$

По (9) определены координаты подвижных шарнирных точек ведомых звеньев в некотором положении (расчеты произведены для первого положения).

$$N'_{1x} = 0, \quad N'_{1y} = -1.767795, \quad N'_{1z} = 0.877663$$

$$N''_{1x} = 0, \quad N''_{1y} = 0.761982, \quad N''_{1z} = 0.263584$$

По (10'') определены координаты неподвижных шарнирных точек ведомых звеньев

$$x_1 = 0.255864, \quad y_1 = -1.005876, \quad z_1 = 0.773898$$

$$x_2 = -0.148982, \quad y_2 = 1.168704, \quad z_2 = 1.116284$$

Косинусы углов наклона кривошипа равны ординатам точек H_i. Наконец, по (17) и (18) определены длины ведомых звеньев

$$N'S_1 = 0.810398, \quad N''S_2 = 0.956407$$

Ереванский государственный университет
Ереванский политехнический институт им. К. Маркса

Поступила 9 IX 1971

Կ. Խ. ՇԱՀԲԱԶՅԱՆ, Ս. Բ. ԳԱՐԱՆՅԱՆ

ՏԱՐԱԾԱԿԱՆ ՄԻԱԿՈՆՏՈՒՐ ՀՆԳՕՂԱԿ ՄԵԽԱՆԻԶՄԻ ՍԻՆԹԵԶԸ ԸՍՏ ՇԱՐԺԱԹԵՎԱՅԻՆ ԿԵՏԻ ՆԱԽԱՊԵՍ ՀԱՅՏՆԻ ԴԻՍԿՐԵՏ ԴԻՐՔԵՐԻ

Ամփոփում

Նշված է սինթեզված մեխանիզմի մի քանի առավելությունները ուրիշ հնգօղակ մեխանիզմների համեմատությամբ, որոնք կարող են վերարտադրել նույն շարժաթևային կետերը։

Հինգ դիրքի համար ստացված է հավասարում, որը սինթեզման շարադրըված եղանակի դեպքում հանդես է գալիս որպես հիմնական հաշվարկային հավասարում։

Խնդիրը ընդհանուր դեպքում լուծելի է կետի տված յոթ դիրքերի համար։ Լուծված է թվային օրինակ։

SYNTHESIS OF A SPATIAL FIVE-BAR MECHANISM BY SPECIFIED DISCRETE POSITIONS OF THE COUPLER-POINT

K. Kh. SHAHBAZIAN, S. B. GARANIAN

Summary

The synthesis of a spatial five-bar mechanism by specified discrete positions of the coupler-point is presented.

Some advantages of the synthesized mechanism over other five-bar mechanisms which can reproduce the same points are shown. An equation for five positions if derived which is the principal calculating equation for the above method of synthesis. In the general case the problem is solved for seven positions. A numerical example is given.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Уилсон.* Аналитический кинематический синтез механизмов посредством конечных перемещений. Тр. американского общества инженеров-механиков, серия В, № 2, 1965.
2. *Росс Б.* Кинематика движения через конечно удаленные положения. Тр. американского общества инженеров-механиков, серия Е, № 4, 1967.
3. *Росс Б.* Теория конечных перемещений в применении к синтезу механизмов. Тр. американского общества инженеров-механиков, серия Е, № 4, 1967.
4. *Чен П., Росс Б.* Расчетные уравнения для синтеза кинематических цепей по раздельным и бесконечно близким положениям. Тр. американского общества инженеров-механиков, серия В, № 1, 1969.
5. *Чен П., Росс Б.* Общая теория кинематического синтеза по раздельным и бесконечно близким положениям. Тр. американского общества инженеров-механиков, серия В, № 1, 1969.
6. *Тулл, Льюис.* Пространственный кинематический синтез. Тр. американского общества инженеров-механиков, серия В, № 3, 1968.
7. *СУ.* Проектирование пространственных механизмов для управления перемещением твердого тела. Тр. американского общества инженеров-механиков, серия В, № 3, 1968.
8. *Гаранян С. Б., Шахбазян К. Х.* Применение преобразования Робертса-Чебышева при синтезе шарнирного четырехзвенника. Изв. АН АрмССР, Механика, т. XXIV, № 2, 1971.