ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXV, № 1, 1972 Механика

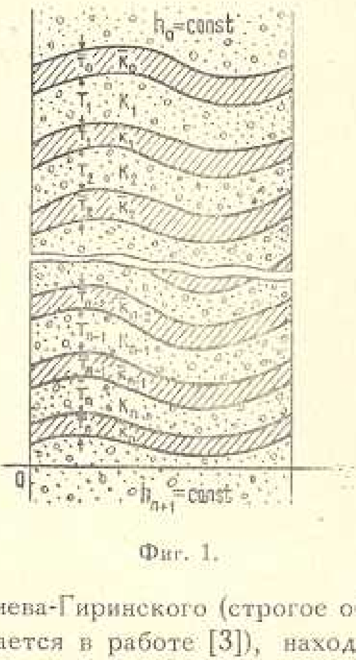
Р. М. БАРСЕГЯН

НЕРАВНОМЕРНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ ЖИДКОСТИ В ПРЯМОУГОЛЬНОМ МАССИВЕ С ПРОИЗВОЛЬНЫМ ЧИСЛОМ ВОДОНОСНЫХ ГОРИЗОНТОВ

В работах [1, 2] рассмотрены вопросы соответственно об установившейся и неустановившейся фильтрации подземных вод к одной скважине в бесконечном пласте, состоящем из взаимосвязанных горизонтальных напорных горизонтов, сообщающихся между собой через разделяющиеся слабопроницаемые прослойки.

Ниже рассматривается одномерная установившаяся и неустановившаяся фильтрация жидкости по закону Дарси в массиве прямоугольного сечения с произвольным числом (n) водоносных горизонтов и с переменными мощностями последних.

Пусть массив, вертикальный разрез которого показан на фиг. 1, состоит из n водоносных горизонтов, разделенных слабопроницаемыми прослойками. В нулевом и $(n+1)$-ом горизонтах напоры h_0 и h_{n+1} считаются постоянными. Предполагаем, что коэффициенты фильтрации K_i и мощности T_i $(i=1, 2, \ldots, n)$ водоносных горизонтов, являются произвольными, один раз дифференцируемыми функциями от x, а коэффициенты фильтрации $\overline{K}_i$ и мощности $\overline{T}_i$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ слабопроницаемых прослоек — произвольными функциями, нигде не обращающимися в нуль в рассматриваемом интервале изменения аргумента x. Пьезометрические напоры h_i $(i=1, 2, \ldots, n)$ отсчитываются от оси Ox.



Фиг. 1.

Принимая движение жидкости в водоносных горизонтах горизонтальным, а в слабопроницаемых прослойках — вертикальным, то есть применяя схему Мятиева-Гиринского (строгое обоснование основных допущений этой схемы дается в работе [3]), находим уравнение движения i-го водоносного горизонта в виде [4]

$$K_i(x)\,T_i(x)\frac{d^2h_i}{dx^2}+\left[T_i(x)\frac{dK_i(x)}{dx}+K_i(x)\frac{dT_i(x)}{dx}\right]\frac{dh_i}{dx}-$$

$$-\frac{\overline{K}_{i-1}}{\overline{T}_{i-1}}(h_i-h_{i-1})+\frac{\overline{K}_i}{\overline{T}_i}(h_{i+1}-h_i)=0 \qquad (1)$$

где $h_i=h_i(x)$ — напор i-го водоносного горизонта.

Уравнения (1) являются общими уравнениями одномерной неравномерной фильтрации жидкости в массиве с произвольным числом водоносных горизонтов. Из этих уравнений можно, как частный случай, получить уравнения движения жидкости а) в массиве с произвольным числом горизонтально залегаемых водоносных горизонтов и с переменными коэффициентами фильтрации последних, в) с постоянными коэффициентами фильтрации водоносных горизонтов и с переменными мощностями последних, и с) для случая, когда как коэффициенты фильтрации, так и мощности водоносных горизонтов являются постоянными величинами. Задачи одномерной фильтрации, относящиеся к последнему случаю, ввиду его простоты, легко решаются.

Ищем решение системы n дифференциальных уравнений (1) ($i=1, 2, \ldots, n$) для одного случая, полагая

$$\overline{K}_i(x)=\frac{\nu_i}{K_n(x)},\qquad \overline{T}_i(x)=\mu_i T_n(x)$$
$$K_i(x)=\lambda_i K_n(x),\qquad T_i(x)=\gamma_i T_n(x) \qquad (2)$$

где ν_i, μ_i, λ_i и γ_i — постоянные.

Тогда из системы (1) с помощью подстановки

$$z=\int\frac{dx}{K_n(x)\,T_n(x)}$$

которую в дальнейшем назовем преобразованием z, получим следующую систему уравнений для $h_i(z)$ ($i=1, 2, \ldots, n$):

$$\frac{\lambda_i\gamma_i}{K_n(x)\,T_n(x)}\left\{\frac{d^2h_i}{dz^2}-\left[\frac{\nu_{i-1}}{\mu_{i-1}}(h_i-h_{i-1})-\frac{\nu_i}{\mu_i}(h_{i+1}-h_i)\right]\right\}=0 \qquad (3)$$

Так как в (3) $\dfrac{\lambda_i\gamma_i}{K_n(x)\,T_n(x)}\neq 0$, то

$$\frac{d^2h_i}{dz^2}-\left[\frac{\nu_{i-1}}{\mu_{i-1}}(h_i-h_{i-1})-\frac{\nu_i}{\mu_i}(h_{i+1}-h_i)\right]=0 \qquad (4)$$

Перепишем систему (4) в виде

$$\beta_i\frac{d^2h_i}{dz^2}+\gamma_{i-1}h_{i-1}-(\gamma_{i-1}+\gamma_i^*)\,h_i+\gamma_i^*h_{i+1}=0 \qquad (5)$$

где

$$\beta_i=\mu_{i-1}\mu_i,\quad \gamma_{i-1}=\nu_{i-1}\mu_i,\quad \gamma_i^*=\nu_i\mu_{i-1}$$

При $\frac{d^2h_i}{dz^2}=0$ система (5) превращается в систему алгебраических уравнений, откуда определяются частные решения системы (5)

$$h_i=h_i^*=\text{const}\qquad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$$

соответствующие статистическому состоянию водоносных горизонтов.

Общее решение $\overline{h}_i$ однородной системы, соответствующей системе (5), ищем в виде

$$\overline{h}_i=A_i\,e^{rz}$$

Подставляя $\overline{h}_i$ в однородную систему, соответствующую (5), и сокращая на e^{rz}, получим

$$\gamma_{i-1}A_{i-1}+(\beta_i r^2-\gamma_{i-1}-\gamma_i^*)\,A_i+\gamma_i^*A_{i+1}=0 \tag{6}$$

$$(i=1,\ 2,\ldots,\ n)$$

Так как для существования нетривиальных решений системы (6) определитель ее должен быть равен нулю, то для r получим следующее характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} \beta_1 r^2-\gamma_0-\gamma_1^* & \gamma_1^* & 0\cdots & 0 & 0 \\ \gamma_1 & \beta_2 r^2-\gamma_1-\gamma_2^* & \gamma_2^*\cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0\cdots & \gamma_{n-1} & \beta_n r^2-\gamma_{n-1}-\gamma_n^* \end{vmatrix}=0 \tag{7}$$

В работе [1] доказано, что уравнение типа (7) относительно r^2 имеет n простых корней. Если каждый корень $r_k\,(k=1,\ 2,\ \ldots,\ n,\ n+1,\ \ldots,\ 2n)$ уравнения (7) подставить в систему (6) и решить ее относительно A_{ik}, то можно найти решения системы (5) в виде

$$h_i=h_i^*+\sum_{k=1}^{2n}A_{ik}\,e^{r_k z}\qquad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$$

где постоянные A_{ik} определяются с помощью заданных граничных условий, которые могут быть трех видов (I, II и III родов).

В качестве примера рассмотрим случай, когда массив состоит из двух водоносных горизонтов, разобщенных слабопроницаемой прослойкой.

Искомые напоры h_1 и h_2 удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{aligned} &\beta_1\frac{d^2h_1}{dz^2}-(\gamma_0+\gamma_1)\,h_1+\gamma_1 h_2+\gamma_0 h_0=0 \\ &\beta_2\frac{d^2h_2}{dz^2}+\gamma_1 h_1-(\gamma_1+\gamma_2)\,h_2+\gamma_2 h_3=0 \end{aligned} \tag{8}$$

Частными решениями системы (8), соответствующими статическому состоянию горизонтов, будут

$$h_1^* = \frac{\gamma_1\gamma_2 h_3 + \gamma_0(\gamma_1+\gamma_2)h_0}{\gamma_0\gamma_1+\gamma_0\gamma_2+\gamma_1\gamma_2}, \qquad h_2^* = \frac{\gamma_0\gamma_1 h_0 + \gamma_2(\gamma_0+\gamma_1)h_3}{\gamma_0\gamma_1+\gamma_0\gamma_2+\gamma_1\gamma_2} \tag{8'}$$

Общее решение однородной системы, соответствующей системе (8) будем искать в виде

$$\overline{h}_1 = A_1 e^{rz}, \qquad \overline{h}_2 = A_2 e^{rz}$$

Подставляя в однородную систему и сокращая на e^{rz}, получим

$$\begin{aligned} [r^2\beta_1-(\gamma_0+\gamma_1)]A_1+\gamma_1 A_2 &= 0\\ \gamma_1 A_1+[r^2\beta_2-(\gamma_1+\gamma_2)]A_2 &= 0 \end{aligned} \tag{9}$$

Для r^2 имеем уравнение

$$\begin{vmatrix} r^2\beta_1-(\gamma_0+\gamma_1) & \gamma_1\\ \gamma_1 & r^2\beta_2-(\gamma_1+\gamma_2)\end{vmatrix} = 0 \tag{10}$$

Подставляя в (9) полученные из (10) значения $r_i (i=1, \ldots, 4)$ $(r_1=-r_2,$ $r_3=-r_4)$ получим с точностью до постоянного множителя $\overline{h}_1^{(i)}$ и $\overline{h}_2^{(i)}$, тогда и общее решение системы (8)

$$\begin{aligned} h_1 &= h_1^* - \sum_{i=1}^{4} C_i \frac{\beta_2 r_i^2-\gamma_2}{\beta_1 r_i^2-\gamma_0} e^{r_i z}\\ h_2 &= h_2^* + \sum_{i=1}^{4} C_i e^{r_i z} \end{aligned} \tag{11}$$

где r_i — корни уравнения (10), а C_i — произвольные постоянные, определяемые граничными условиями.

При неустановившейся фильтрации для схемы, приведенной на фиг. 1, искомые напоры $h_i(x, t)$ в водоносных горизонтах удовлетворяют следующей системе дифференциальных уравнений параболического типа

$$\begin{aligned} \sigma_i \frac{\partial h_i}{\partial t} = K_i T_i \frac{\partial^2 h_i}{\partial x^2} + \left[T_i \frac{dK_i}{dx} + K_i \frac{dT_i}{dx} \right] \frac{\partial h_i}{\partial x} - \\ - \frac{\overline{K}_{i-1}}{\overline{T}_{i-1}}(h_i - h_{i-1}) + \frac{\overline{K}_i}{\overline{T}_i}(h_{i+1}-h_i) \end{aligned} \tag{12}$$

где σ_i — эффективная порозность i-го горизонта, остальные параметры, входящие в (12), тождественны с одноименными параметрами системы (1).

При $\frac{\partial^2 h_i}{\partial x^2}=0$ и $\frac{\partial h_i}{\partial t}=0$ $(i=1, 2,\ldots, n)$ система (12) превращается в систему алгебраических уравнений, однозначно определяющих частные решения системы (12), соответствующие статистическому состоянию водоносных горизонтов.

Для решения системы (12) применим к ней преобразование Лапласа по времени t $(h_i \doteq H_i)$. Учитывая, что при $t=t_0$, $h_i=h_i^*$, получим

$$K_i T_i \frac{d^2 H_i}{dx^2}+\left[T_i \frac{dK_i}{dx}+K_i \frac{dT_i}{dx}\right]\frac{dH_i}{dx}-$$

$$-\frac{\overline{K}_{i-1}}{\overline{T}_{i-1}}(H_i-H_{i-1})+\frac{\overline{K}_i}{\overline{T}_i}(H_{i+1}-H_i)=\sigma_i h_i^*+p\sigma_i H_i \tag{13}$$

При предположении (2) с помощью преобразования z из (13) получим систему, аналогичную системе (5), с одинаковыми коэффициентами β_i, γ_{i-1}, γ_i^*

$$\beta_i \frac{d^2 H_i}{dz^2}+\gamma_{i-1}H_{i-1}-(\gamma_{i-1}+\gamma_i^*+p\sigma_i)+\gamma_i^* H_{i+1}=-\sigma_i h_i^* \tag{14}$$

$$(i=1, 2, \ldots, n)$$

Обозначим через H_i^* частные решения системы (14); очевидно, что $H_i^*=\frac{\Delta_i}{\Delta}$, где Δ — определитель системы.

Общие решения $\overline{H}_i$ однородной системы, соответствующей системе (14), будем искать в виде

$$\overline{H}_i=A_i e^{rz}$$

Подставляя $\overline{H}_i$ в однородную систему, соответствующую (14), и сокращая на e^{rz}, получим

$$\gamma_{i-1}A_{i-1}+(\beta_i r^2-\gamma_{i-1}-\gamma_i^*-p\sigma_i)A_i+\gamma_i^* A_{i+1}=0 \tag{15}$$

$$(i=1, 2, \ldots, n) \qquad A_0=A_{n+1}=0$$

Система (15) будет иметь нетривиальное решение относительно A_i, если ее определитель равен нулю

$$\begin{vmatrix} \beta_1 r^2-\gamma_0-\gamma_1^*-p\sigma_1 & \gamma_1^* & 0\cdots & 0 & 0 \\ \gamma_1 & \beta_2 r^2-\gamma_1-\gamma_2^*-p\sigma_2 & \gamma_2^*\cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0\cdots & \gamma_{n-1} & \beta_n r^2-\gamma_{n-1}-\gamma_n^*-p\sigma_n \end{vmatrix}=0 \tag{16}$$

Уравнение (16) имеет $2n$ простых корней r_k. Подставляя каждое значение r_k в систему (15), находим решения $\{A_{i1}, A_{i2}, \ldots, A_{in}\}$, и тогда решение системы (14) можно записать в виде

$$H_i = H_i^* + \sum_{k=1}^{2n} A_{ik} e^{r_k z} \tag{17}$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n)$$

Постоянные A_{ik} определяются с помощью граничных условий, которые задаются для каждого горизонта и могут быть 1-го, 2-го или 3-го родов.

Переходя к оригиналам в (17), находим решение системы (14), тем самым и решение задачи.

Отметим, что из вышеуказанных задач, как частный случай, можно получить решения для часто принятого в настоящее время случая горизонтально-залегаемых горизонтов, с постоянными коэффициентами фильтрации. Для этого достаточно мощности и коэффициенты фильтрации как водоносных горизонтов, так и слабопроницаемых прослоек принять постоянными.

Очевидно, что решение задач движения жидкости к одной скважине в бесконечном или конечном массиве с учетом переменных мощностей и коэффициентов фильтрации слоев массива при условиях (2) не отличаются от вышеприведенных решений для задач прямоугольного массива.

В качестве примера рассмотрим распространенный в практике случай, когда прямоугольный массив состоит их двух вононосных горизонтов, разобщенных слабопроницаемой прослойкой. Кровля массива, напор над которой $h_0 = \text{const}$, и его подошва, напор под которой $h_3 = \text{const}$, — слабопроницаемые прослойки.

После применения к системе уравнений (12) ($i = 1, 2$) преобразования Лапласа и z-преобразования получим систему уравнений

$$\begin{aligned} &\beta \frac{d^2 H_1}{dz^2} - (2\gamma + p\sigma) H_1 + \gamma H_2 = -\sigma h_1^* - \frac{\gamma h_0}{p} \\ &\beta \frac{d^2 H_2}{dz^2} + \gamma H_1 - (2\gamma + p\sigma) H_2 = -\sigma h_2^* - \frac{\gamma h_3}{p} \end{aligned} \tag{18}$$

для которой за начальные условия были приняты напоры

$$h_1^* = \frac{2h_0 + h_3}{3} \quad \text{и} \quad h_2^* = \frac{h_0 + 2h_3}{3}$$

устанавливающие статическое состояние водоносных горизонтов (для упрощения расчетов принято $\gamma_0 = \gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$ и $\beta_1 = \beta_2 = \beta$).

Частными решениями системы (18) являются выражения

$$H_1^* = \frac{\sigma^2 h_1^* p^2 + a_1 p + b_1}{p(\sigma^2 p^2 + 4\sigma\gamma p + 3\gamma^2)}, \qquad H_2^* = \frac{\sigma^2 h_2^* p^2 + a_2 p + b_2}{p(\sigma^2 p^2 + 4\sigma\gamma p + 3\gamma^2)}$$

где

$$a_1 = \frac{\sigma\gamma}{3}(8h_0 + 4h_3), \qquad a_2 = \frac{\sigma\gamma}{3}(4h_0 + 8h_3)$$

$$b_1 = \gamma^2(2h_0 + h_3), \qquad b_2 = \gamma^2(2h_3 + h_0)$$

Общее решение однородной системы, соответствующей системе (18), будем искать в виде

$$\overline{H}_1 = A_1 e^{rz}, \qquad H_2 = A_2 e^{rz}$$

Подставляя эти решения в однородную систему, соответствующую системе (18), получим

$$\begin{aligned} (r^2\beta - 2\gamma - p\sigma) A_1 + \gamma A_2 = 0 \\ \gamma A_1 + (r^2\beta - 2\gamma - p\sigma) A_2 = 0 \end{aligned} \tag{19}$$

Приравнивая нулю определитель системы (19), получим

$$r_{1,2} = \pm\left(\frac{3\gamma + p\sigma}{\beta}\right)^{1/2}, \qquad r_{3,4} = \pm\left(\frac{\gamma + p\sigma}{\beta}\right)^{1/2}$$

Подставляя значения $r_i (i = 1, 2, 3, 4)$ в систему (19), получим с точностью до постоянного множителя следующую систему функций:

$$H_1^{(i)} = C_i e^{r_i z}, \qquad H_2^{(i)} = -C_i e^{r_i z}$$

Тогда общие решения системы (18) будут

$$\begin{aligned} H_1 &= \frac{\sigma^2 h_1^* p^2 + a_1 p + b_1}{p(\sigma^2 p^2 + 4\sigma\gamma p + 3\gamma^2)} + \sum_{i=1}^{4} C_i e^{r_i z} \\ H_2 &= \frac{\sigma^2 h_2^* p^2 + a_2 p + b_2}{p(\sigma^2 p^2 + 4\sigma\gamma p + 3\gamma^2)} - C_1 e^{r_1 z} - C_2 e^{r_2 z} + C_3 e^{r_3 z} + C_4 e^{r_4 z} \end{aligned} \tag{20}$$

Для определения постоянных C_i предположим, что заданы постоянные значения напоров h_1 и h_2 на границах массива в пределах водоносных горизонтов, которые в преобразовании z имеют вид

$$\begin{aligned} h_1\big|_{z=0} = h_{11}, \qquad h_1\big|_{z=l} = h_{12} \\ h_2\big|_{z=0} = h_{21}, \qquad h_2\big|_{z=l} = h_{22} \end{aligned} \tag{21}$$

Переходя к изображениям в (21), находим постоянные C_μ и C_ν $(\mu = 1, 2, \ \nu = 3, 4)$

$$C_\mu = \frac{(-1)^\mu}{2p(e^{r_1 l} - e^{r_2 l})}\left[(h_{11} - h_{21})e^{r_\mu l} - (h_{11} - h_{22}) - (H_1^* - H_2^*)(e^{r_\mu l} - 1)p\right]$$

$$C_\nu = \frac{(-1)^\nu}{2p(e^{r_3 l} - e^{r_4 l})}\left[(h_{11} + h_{21})e^{r_\nu l} - (h_{12} + h_{22}) - (H_1^* + H_2^*)(e^{r_\nu l} - 1)p\right]$$

Решением системы (20) будут функции $H_i (i=1, 2)$

$$H_i = H_i^* + \frac{(-1)^{i-1}}{p \operatorname{sh} r_i l}\Big\{(h_{12} - h_{22}) \operatorname{sh} r_i z + (h_{11} - h_{21}) \operatorname{sh} r_i (l-z) -$$

$$- p(H_1^* - H_2^*)[\operatorname{sh} r_i (l-z) + \operatorname{sh} r_i z]\Big\} +$$

$$+ \frac{1}{p \operatorname{sh} r_{2i-1} l}\Big\{(h_{12} + h_{22}) \operatorname{sh} r_{2i-1} z + (h_{11} + h_{21}) \operatorname{sh} r_{2i-1} (l-z) -$$

$$- p(H_1^* + H_2^*)[\operatorname{sh} r_{2i-1} (l-z) + \operatorname{sh} r_{2i-1} z]\Big\}$$

Переходя к оригиналам, получим решения частной задачи $h_i(z)$ в преобразовании z

$$h_i = \frac{b_i}{3\gamma} + B_i^{(1)} e^{-\frac{3\gamma}{\sigma}t} + B_i^{(2)} e^{-\frac{\gamma}{\sigma}t} + \frac{1}{l}\sqrt{\frac{\beta}{\sigma}}\Big\{\Big[(-1)^i (h_{12} - h_{22}) e^{-\frac{3\gamma}{\sigma}t} -$$

$$-(h_{12} + h_{22}) e^{-\frac{\gamma}{\sigma}t}\Big] \int_0^{z\sqrt{\frac{\sigma}{\beta}}} \vartheta_0\left(\frac{u}{2l}\sqrt{\frac{\beta}{\sigma}} + \frac{t\beta}{\sigma l^2}\right) du +$$

$$+ \Big[(-1)^i (h_{11} - h_{21}) e^{-\frac{3\gamma}{\sigma}t} - (h_{11} + h_{21}) e^{-\frac{\gamma}{\sigma}t}\Big] \int_0^{(l-z)\sqrt{\frac{\sigma}{\beta}}} \vartheta_0\left(\frac{u}{2l}\sqrt{\frac{\beta}{\sigma}} +\right.$$

$$\left. + \frac{t\beta}{\sigma l^2}\right) du + \frac{1}{l}\sqrt{\frac{\beta}{\sigma}} \sum_{j=1}^{2}\Big\{(-1)^j \int_0^t \Big[\frac{b_2 + (-1)^j b_1}{3\gamma^2} + D_j e^{-\frac{3\gamma}{\sigma}(t-u)} +$$

$$+ D_{j+1} e^{-\frac{\gamma}{\sigma}(t-u)}\Big] e^{-\frac{2+j}{l^2}\frac{\gamma t}{\sigma}} (-1)^{i(2-j)} \Big[\frac{\partial}{\partial z_1}\vartheta_3\left(\frac{z_1}{2l}\sqrt{\frac{\beta}{\sigma}} + \frac{t\beta}{\sigma l^2}\right) +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial z_2}\vartheta_3\left(\frac{z_2}{2l}\sqrt{\frac{\beta}{\sigma}} + \frac{t\beta}{\sigma l^2}\right)\Big] du\Big\}$$

где

$$B_i^{(1)} = \frac{9h_i^*\gamma^2\sigma - 3a_i\gamma + b_i\sigma}{6\sigma\gamma^2}, \qquad B_i^{(2)} = \frac{a_i\gamma - h_i^*\gamma^2\sigma - b_i\sigma}{2\sigma\gamma^2}$$

$$D_{2j-1} = \frac{9[h_2^* + (-1)^j h_1^*] - 3[a_2 + (-1)^j a_1]\gamma + [b_2 + (-1)^j b_1]}{6\sigma\gamma^2}$$

$$D_{2j} = \frac{[a_2 + (-1)^j a_1]\gamma - [h_2^* + (-1)^j h_1^*]\gamma^2\sigma - [b_2 + (-1)^j b_1]\sigma}{2\sigma\gamma^2}$$

$$z_1 = \sqrt{\frac{\sigma}{\beta}}\, z, \qquad z_2 = \sqrt{\frac{\sigma}{\beta}}\,(l - z)$$

$\vartheta_0(u, t)$ и $\vartheta_3(u, t)$ — тета-функции Якоби.

Приведем один численный пример для случая, когда массив состоит из двух водоносных горизонтов, разобщенных слабопроницаемыми прослойками. Напоры над верхним слабопроницаемым слоем (h_0) и под нижним слабопроницаемым слоем (h_3) принимаем постоянными. Пусть

$$K_2(x) = a e^{\alpha x}, \qquad T_2(x) = b e^{\beta x}, \qquad \overline{T}_0(x) = \mu_0 T_2(x)$$

$$\overline{T}_1(x) = \mu_1 T_2(x), \qquad \overline{T}_2(x) = \mu_2 T_2(x), \qquad \overline{K}_0(x) = \frac{\nu_0}{K_2(x)}$$

$$\overline{K}_1(x) = \frac{\nu_1}{K_2(x)}, \qquad \overline{K}_2(x) = \frac{\nu_2}{K_2(x)}$$

где a, α, b, β, μ_i и ν_i $(i = 0, 1, 2)$ — постоянные. С помощью преобразования z имеем

$$z = \frac{1}{ab(\alpha + \beta)}\, e^{-(\alpha+\beta)x}$$

Тогда искомые напоры h_1 и h_2 в водоносных горизонтах удовлетворяют системе дифференциальных уравнений (8). При этом

$$\mu_0\mu_1 = \beta_1, \quad \mu_1\mu_2 = \beta_2, \quad \nu_0\mu_1 = \gamma_0, \quad \mu_0\nu_1 = \gamma_1$$

$$\mu_1\nu_2 = \gamma_2, \quad \nu_1\mu_2 = \gamma_1, \quad \mu_0 = \mu_2$$

Общее решение системы (8) имеет вид (11), где $\overset{*}{h}_1$ и $\overset{*}{h}_2$ определяются по формулам (8′). Постоянные C_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ определим, задавая граничные условия:

$$h_1\big|_{x=0} = h_{11}, \quad h_1\big|_{x=l} = h_{12}, \quad h_2\big|_{x=0} = h_{21}, \quad h_2\big|_{x=l} = h_{22}$$

которые после преобразования z будут

$$h_1\big|_{z=z_1} = h_{11}, \quad h_1\big|_{z=z_2} = h_{12}, \quad h_2\big|_{z=z_1} = h_{21}, \quad h_2\big|_{z=z_2} = h_{22}$$

Постоянные C_i определяются из системы

$$h_{11} = \overset{*}{h}_1 - A\left(C_1 e^{r_1 z_1} + C_2 e^{r_1 z_1}\right) - B\left(C_3 e^{r_2 z_1} + C_4 e^{r_2 z_1}\right)$$

$$h_{12} = \overset{*}{h}_1 - A\left(C_1 e^{r_1 z_2} + C_2 e^{r_1 z_2}\right) - B\left(C_3 e^{r_2 z_2} + C_4 e^{r_2 z_2}\right)$$

$$h_{21} = \overset{*}{h}_2 + C_1 e^{r_1 z_1} + C_2 e^{-r_1 z_1} + C_3 e^{r_2 z_1} + C_4 e^{-r_2 z_1}$$

$$h_{22} = \overset{*}{h}_2 + C_1 e^{r_1 z_2} + C_2 e^{-r_1 z_2} + C_3 e^{r_2 z_2} + C_4 e^{-r_2 z_2}$$

и имеют вид

$$C_1 = \frac{\left(\frac{h_{11} - h_1^*}{B} + h_{21} - h_2^*\right) e^{-r_1 z_2} - \left(\frac{h_{12} - h_1^*}{B} + h_{22} - h_2^*\right) e^{-r_1 z_1}}{2\left(1 - \frac{A}{B}\right) \operatorname{sh} r_1 (z_1 - z_2)}$$

$$C_2 = \frac{\left(\frac{h_{12} - h_1^*}{B} + h_{22} - h_2^*\right) e^{r_1 z_1} - \left(\frac{h_{11} - h_1^*}{B} + h_{21} - h_2^*\right) e^{r_1 z_2}}{2\left(1 - \frac{A}{B}\right) \operatorname{sh} r_1 (z_1 - z_2)}$$

$$C_3 = -\frac{A^2\left(1 - \frac{B}{A}\right)\left[\left(\frac{h_{11} - h_1^*}{A} + h_{21} - h_2^*\right) e^{-r_3 z_2} - \left(\frac{h_{12} - h_1^*}{B} + h_{22} - h_2^*\right) e^{-r_3 z_1}\right]}{2B^2\left(1 - \frac{A}{B}\right)^2 \operatorname{sh} r_3 (z_1 - z_2)}$$

$$C_4 = -\frac{A^2\left(1 - \frac{B}{A}\right)\left[\left(\frac{h_{12} - h_1^*}{A} + h_{22} - h_2^*\right) e^{-r_3 z_1} - \left(\frac{h_{11} - h_1^*}{A} + h_{21} - h_2^*\right) e^{r_3 z_2}\right]}{2B^2\left(1 - \frac{A}{B}\right)^2 \operatorname{sh} r_3 (z_1 - z_2)}$$

где

$$A = \frac{\beta_2 r_1^2 - \gamma_2}{\beta_1 r_1^2 - \gamma_0}, \qquad B = \frac{\beta_2 r_3^2 - \gamma_2}{\beta_1 r_3^2 - \gamma_0}$$

Рассмотрим численный пример для следующих исходных данных:

$$a = 0.01 \text{ м/сек}, \quad b = 15 \text{ м}, \quad \alpha = 0.001, \quad \beta = 0.0005, \quad l = 2000 \text{ м},$$

$$h_{11} = 10 \text{ м}, \quad h_{12} = 30 \text{ м}, \quad h_{21} = 15 \text{ м}, \quad h_{22} = 35 \text{ м},$$

$$\mu_0 = 0.1, \quad \mu_1 = 0.3, \quad \mu_2 = 0.1, \quad \nu_0 = 10^{-6}, \quad \nu_1 = 5 \cdot 10^{-7},$$

$$\nu_2 = 10^{-7}, \quad \gamma_0 = 3 \cdot 10^{-7}, \quad \gamma_1 = 5 \cdot 10^{-8}, \quad \gamma_2 = 3 \cdot 10^{-8}$$

$$h_0 = 5 \text{ м}, \quad h_3 = 40 \text{ м}.$$

Тогда

$$h_1 \approx 7.5 + 24.3\, e^{2\sqrt{2} \cdot 10^{-3} z} + 20\, e^{\sqrt{3} \cdot 10^{-3} z}$$

$$h_2 \approx 15 + 35.2\, e^{2\sqrt{2} \cdot 10^{-3} z} + 10\, e^{\sqrt{3} \cdot 10^{-3} z}$$

По этим формулам можно вычислить напоры в любом сечении, например, для $x = 1000$ м ($z \approx -987$)

$$h_1 \approx 12.6 \text{ м}, \quad h_2 \approx 18.9 \text{ м}.$$

Ереванский политехнический институт
им. К. Маркса

Поступила 13 XI 1970

Ռ. Մ. ԲԱՐՍԵՂՅԱՆ

ՀԵՂՈՒԿԻ ԱՆՀԱՎԱՍԱՐԱՉԱՓ ՖԻԼՏՐԱՑԻԱՆ ՑԱՆԿԱՑԱԾ ԹՎՈՎ ՋՐԱՏԱՐ ՀՈՐԻԶՈՆՆԵՐՈՎ ՈՒՂՂԱՆԿՅՈՒՆ ՀՈՂԱՇԵՐՏՈՒՄ

Ամփոփում

Դիտարկվում է հեղուկի Դարսիի օրենքով և Մյատիև-Գիրինսկու սխեմային ենթարկվող անհավասարաչափ ստացիոնար և ոչ ստացիոնար ֆիլտրացիան ցանկացած թվով ջրատար հորիզոն ունեցող հողաշերտում։ Ջրատար հորիզոնները իրարից բաժանվում են վատ թափանցող շերտերով։

Ներքին ջրատար հորիզոնի հզորությունը և ֆիլտրացիայի գործակիցը կամայական մեկ անգամ դիֆերենցելի ֆունկցիաներ են։ Մյուս ջրատար շերտերի հզորությունները ու ֆիլտրացիայի գործակիցները և վատ թափանցող շերտերի հզորությունները ուղիղ համեմատական են ներքին շերտի հզորությանը և ֆիլտրացիայի գործակցին համապատասխանաբար։

Երկրորդ կարգի դիֆերենցիալ հավասարումների սիստեմը լուծելիս կիրառվում է ինտեգրալ ձևափոխություն, որից հետո ստացվում է հաստատուն գործակիցներով դիֆերենցիալ հավասարումների սիստեմ։

Որպես օրինակ դիտարկված է հեղուկի ոչ ստացիոնար անհավասարաչափ շարժումը երկու ջրատար հորիզոններով հողաշերտում։

NON-UNIFORM FILTRATION OF FLUID IN RECTANGULAR PIECE OF SOIL WITH ARBITRARY NUMBER OF WATER-BEARING LAYERS

R. M. BARSEGHJAN

Summary

On the basis of Darsi's law and Myatiev-Girinski's model the non-uniform steady and non-steady filtration of fluid is discussed for „n" layers of rectangular soil. The water-bearing layers are assumed to be separated by poorly permeable layers.

The thickness and the coefficient of filtration of the lowermost layer are assumed to be arbitrary, once differentiable functions. The thicknesses and coefficient of filtration of the other water-bearing layers as well as the thickness of the poorly permeable layers are assumed to be respectively proportional to the thickness and coefficient of the lowermost layer.

Integral transformation is applied in solving the system of differential equations of the second order, thus resulting in a system of differential equations with constant coefficients.

An example of non-uniform and non-steady flow of fluid in two water-bearing layers is given.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Эмих В. Н.* Скважина в произвольном числе взаимосвязанных напорных горизонтов. ПМТФ, № 5, 1962.
2. *Барон В. А.* Неустановившийся приток подземных вод к скважине в произвольном числе взаимосвязанных напорных горизонтов. В сб. „Вопросы гидротехники", вып. 17, АН Уз.ССР, Ташкент, 1964.
3. *Нумеров С. Н., Барсегян Р. М.* Об оценке основных допущений методики расчета фильтрации жидкости в горизонтальных гидравлически связанных пластах. Изв. ВНИИГ, т. 78, 1965.
4. *Барсегян Р. М.* Некоторые задачи неравномерной фильтрации в многослойных пластах. Изв. АН Арм.ССР, Механика, т. XXIII, № 6, 1970.