ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

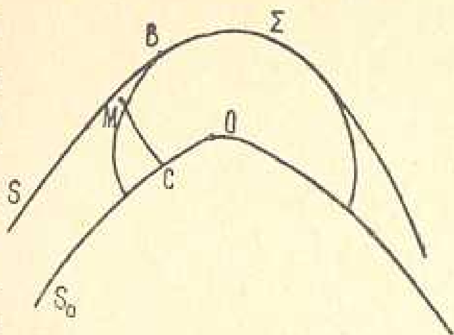
Մեխանիկա XXV, № 1, 1972 Механика

А. Г. БАГДОЕВ, З. Н. ДАНОЯН

ВЫВОД НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ СРЕДЫ ВБЛИЗИ ВОЛНЫ

Рассматривается задача определения возмущенного движения жидкости в окрестности касания слабой ударной волны S произвольного вида с точечной или дифракционной волной Σ (фиг. 1).

Подобная задача встречается при отражении ударной волны от угла в задаче проникания ударных волн или твердых тел в жидкость. Ставится задача определения нелинейных уравнений, описывающих окрестность B соединения волн для произвольной среды. Поскольку вывод указанных упрощенных уравнений является громоздким, здесь предлагается метод получения уравнений с помощью характеристик.



Фиг. 1.

Вначале рассмотрена произвольная гиперболическая линейная система с постоянными коэффициентами

$$A_1 \frac{\partial \vec{u}}{\partial x} + A_2 \frac{\partial \vec{u}}{\partial y} + A_3 \frac{\partial \vec{u}}{\partial z} + A_4 \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + K\vec{u} = 0 \tag{1}$$

где A_1, A_2, A_3, A_4, K — матрицы, $\vec{u}$ — вектор.

Уравнение плоских волн для (1) имеет вид

$$\alpha x + \beta y + \gamma z - t = 0 \tag{2}$$

где согласно уравнению (1) $\alpha = \alpha(\beta, \gamma)$, причем имеет место уравнение поверхности нормалей

$$\det(A_1\alpha + A_2\beta + A_3\gamma - A_4) = 0 \tag{3}$$

Во всех задачах, указанных выше, начальная волна S_0, из которой возникают волны S и Σ, имеет угловую точку 0 или ребро L (например, в плоской задаче). Уравнение дифракционной волны Σ, возникающей из вершины 0 начальной волны, является огибающей плоских волн (2) и имеет вид

$$\alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3 z - t = 0 \qquad t = t_{\text{дифр.}}$$

$$\frac{\partial \alpha_3}{\partial \beta_3} x + y = 0 \tag{4}$$

$$\frac{\partial \alpha_3}{\partial \gamma_3} x + z = 0$$

Для удобства, начало координат выбирается в вершине 0, оси y, z направляются по линиям кривизны S_0, ось x направлена перпендикулярно в сторону движения. Тогда уравнение S_0 имеет вид

$$x_0 = \frac{k_2}{2} y_0^2 + \frac{k_4}{2} z_0^2 \tag{5}$$

где k_2, k_4 — кривизны линий y, z.

Уравнение волны S, возникшей из S_0, $x_0 = x_0(y_0, z_0)$, в момент t имеет вид

$$\begin{gathered} \alpha(x - x_0) + \beta(y - y_0) + \gamma(z - z_0) = t \\ (x - x_0)\frac{\partial \alpha}{\partial \beta} + (y - y_0) = 0 \\ (x - x_0)\frac{\partial \alpha}{\partial \gamma} + (z - z_0) = 0 \\ \alpha\frac{\partial x_0}{\partial y_0} + \beta = 0 \\ \alpha\frac{\partial x_0}{\partial z_0} + \gamma = 0 \end{gathered} \tag{6}$$

Поскольку в 0 $\beta_0 = \gamma_0 = 0$, $\alpha = \alpha_0$, из (4) и (6) можно получить

$$\begin{gathered} \beta_3 = -\frac{x\dfrac{\partial \alpha_0}{\partial \beta_0} + y}{x\dfrac{\partial^2 \alpha_0}{\partial \beta_0^2}} = -\frac{r y_0}{x\dfrac{\partial^2 \alpha_0}{\partial \beta_0^2}} \\ \gamma_3 = -\frac{x\dfrac{\partial \alpha_0}{\partial \gamma_0} + z}{x\dfrac{\partial^2 \alpha_0}{\partial \gamma_0^2}} = -\frac{s z_0}{x\dfrac{\partial^2 \alpha_0}{\partial \gamma_0^2}} \\ \beta = -\alpha_0 k_2 y_0, \quad \gamma = -\alpha_0 k_4 z_0 \end{gathered} \tag{7}$$

где

$$r = 1 + x\frac{\partial^2 \alpha_0}{\partial \beta_0^2}\alpha_0 k_2, \qquad s = 1 + x\frac{\partial^2 \alpha_0}{\partial \gamma_0^2}\alpha_0 k_4$$

В полученных формулах предположено, что $\alpha = \alpha(\beta^2, \gamma^2)$, то есть $\frac{\partial \alpha_0}{\partial \beta_0} = \frac{\partial \alpha_0}{\partial \gamma_0} = \frac{\partial^2 \alpha_0}{\partial \beta_0 \partial \gamma_0} = 0$, причем в (7) удержаны $\frac{\partial \alpha_0}{\partial \beta_0}$, $\frac{\partial \alpha_0}{\partial \gamma_0}$ для сравнения с плоской задачей при произвольной ориентации осей. Уравнения волн S и Σ имеют вид

$$t_{\text{ф}} = \alpha_0 x - \frac{k_2 y_0^2 \alpha_0 r}{2} - \frac{k_4 z_0^2 \alpha_0^2 s}{2}$$

$$t_{\text{дифр.}} = \alpha_0 x - \frac{\left(x \dfrac{\partial \alpha_0}{\partial \beta_0} + y\right)^2}{2x \dfrac{\partial^2 \alpha_0}{\partial \beta_0^2}} - \frac{\left(x \dfrac{\partial \alpha_0}{\partial \gamma_0} + z\right)^2}{2x \dfrac{\partial^2 \alpha_0}{\partial \gamma_0^2}} \tag{8}$$

или

$$t_{\text{ф}} - t_{\text{дифр.}} = \frac{1}{2} \frac{r y_0^2}{x \dfrac{\partial^2 \alpha_0}{\partial \beta_0^2}} + \frac{1}{2} \frac{s z_0^2}{x \dfrac{\partial^2 \alpha_0}{\partial \gamma_0^2}}$$

Условие $\alpha = \alpha(\beta^2, \gamma^2)$ может, вообще говоря, не выполняться. Тогда из (6) можно получить

$$K = \frac{\partial^2 \alpha_0}{\partial \beta_0^2} \frac{\partial^2 \alpha_0}{\partial \gamma_0^2} - \left(\frac{\partial^2 \alpha_0}{\partial \beta_0 \partial \gamma_0}\right)^2$$

$$t_{\text{ф}} - t_{\text{дифр.}} = -\frac{1}{Kx} \frac{\partial^2 \alpha_0}{\partial \beta_0 \partial \gamma_0} y_0 z_0 + \frac{1}{2Kx}\left(\frac{\partial^2 \alpha_0}{\partial \beta_0^2} + \alpha_0 k_4 K x\right) z_0^2 + $$
$$+ \frac{1}{2Kx}\left(\frac{\partial^2 \alpha_0}{\partial \gamma_0^2} + \alpha_0 k_2 K x\right) y_0^2 \tag{9}$$

В задаче магнитной гидродинамики, которая рассматривается ниже, уравнение поверхности нормалей имеет вид [5]

$$\frac{1}{(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)^2} - \frac{a^2 + \dfrac{B^2}{4\pi\rho}}{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2} + \frac{a^2 B^2}{4\pi\rho} \cos^2 \theta = 0 \tag{10}$$

где

$$\cos \theta = \frac{\alpha B_x + \beta B_y + \gamma B_z}{B \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}}, \qquad B^2 = B_x^2 + B_y^2 + B_z^2$$

θ есть угол нормали к волне с магнитным полем $\vec{B}$. Здесь a — скорость звука в жидкости.

Предполагая, что плоскость x, y можно выбрать так, чтобы она проходила через начальное магнитное поле $\vec{B}^0$, B_z можно считать малым, откуда следует по (10), что $\dfrac{\partial^2 \alpha}{\partial \beta \partial \gamma}$ мало и (9) примет форму (8).

То же заключение выполняется для $t_{\text{дифр.}}$. Для произвольной среды в плоской задаче $\dfrac{\partial^2 \alpha}{\partial \beta \partial \gamma} = 0$, и (8) снова имеет место. В пространственной задаче, когда S_0 имеет угол в точке 0, например, в осесимметричной задаче, линии $z_0 = \text{const}$ сходятся в точку 0 [2, 3], причем для кривизны линий $y_0 = \text{const}$ имеет место $k_4 = \dfrac{K_4}{y_0}$, тогда на основании (9) можно получить порядки $y_0^3 \approx z_0^2$, и слагаемое, содержащее $y_0 z_0$ в правой части (9), можно отбросить.

Таким образом, нижеследующие выкладки годятся как для плоской, так и для пространственной задачи, когда S_0 образует угол в 0.

В самой общей задаче для уравнений с постоянными коэффициентами из (9) можно, переходя от y_0, z_0 к новым координатам, получить снова сумму их квадратов, и тогда все дальнейшие рассуждения будут верны в этих координатах, где кривизны нужно заменить соответствующими коэффициентами.

Вычисляя кривизны линий y_0, z_0 на Σ в виде

$$-k_1 = \frac{1}{\alpha_0 x \dfrac{\partial^2 \alpha_0}{\partial \beta_0^2}}, \qquad -k_3 = \frac{1}{\alpha_0 x \dfrac{\partial^2 \alpha_0}{\partial \gamma_0^2}} \tag{11}$$

можно получить

$$t_{\text{дифр.}} - t_{\text{ф}} = \frac{k_1 - k_2}{2c_0} y_0^2 + \frac{k_3 - k_4}{2c_0} z_0^2 \tag{12}$$

где $c_0 = \dfrac{1}{\alpha_0}$ есть скорость волны в 0, причем $t_{\text{ф}} = t$ дает уравнение S. То же уравнение получится для системы уравнений (1) с переменными коэффициентами.

Пусть $\bar{s}$, $\bar{T}$ обозначают длины дуг линий кривизны y_0, z_0 на поверхности S, отсчитываемые от B; $\tilde{k}_2$, $\tilde{k}_4$ — их кривизны, $\bar{k}_1$, $\bar{k}_3$ — кривизны указанных линий на Σ, где предположено, что линии кривизны S и Σ совпадают. Тогда можно из геометрических соображений найти равенство

$$t_{\text{ф}} - t_{\text{дифр.}} = -\frac{\bar{k}_1 - \tilde{k}_2}{2\bar{c}_0}\bar{s}^2 - \frac{\bar{k}_3 - \bar{k}_4}{2c_0}\bar{T}^2 \tag{13}$$

где $\bar{c}_0$ есть скорость волны в некоторой точке B. Возвращая волны в начальное положение и учитывая, что $t_{\text{ф}} - t_{\text{дифр.}}$ совпадает со временем пробега от начальной волны S_0 до гиперсферы W, $t = \tau_0$, образовавшейся в момент t и имеющей кривизны в точке 0, равные k_1, k_3, предполагая, что главные направления на S_0 и W одинаковые в окрестности 0, можно получить равенство [1]

$$-\frac{\tilde{k}_1 - \tilde{k}_2}{2\bar{c}_0}\bar{s}^2 - \frac{\tilde{k}_3 - \tilde{k}_4}{2\bar{c}_0}\bar{T}^2 = \frac{k_1 - k_2}{2c_0} y_0^2 + \frac{k_3 - k_4}{2c_0} z_0^2 \tag{14}$$

причем из (13) и (14) получится формула (12), дающая при $t_\phi = t$ уравнение характеристической поверхности S системы (1) в линейной задаче.

Пусть углы нормали к волне Σ в начальном положении с осями y, z будут θ, ζ. Можно показать, что имеют место соотношения

$$\frac{\theta_0 - \theta}{k_1 - k_2} = y_0, \qquad \frac{\zeta_0 - \zeta}{k_3 - k_4} = z_0 \tag{15}$$

где θ_0, ζ_0 — значения θ, ζ в точке B.

Соотношения (15) проверены для системы уравнений (1) с постоянными коэффициентами, для некоторого уравнения с переменным коэффициентом [3] и для движущейся жидкости с начальными скоростями частиц $V_x = V_x(y)$, $V_y = 0$ и начальной скоростью звука $a_0 = a_0(y)$ [4].

Согласно (12) и (15) уравнение волны S, $t_\phi = t$, запишется в виде

$$t_{\text{лифф.}} - t = \tau$$

$$\tau = \frac{(\theta - \theta_0)^2}{2(k_1 - k_2)c_0} + \frac{(\zeta - \zeta_0)^2}{2(k_3 - k_4)c_0} \tag{16}$$

где $c_0 = H_1(0)$ — начальная скорость волны. Из (16) видно, что характеристическая поверхность S удовлетворяет в линейной задаче в окрестности B уравнению

$$\frac{\partial\tau}{\partial t} = -\frac{H_1(0)}{2}\frac{d(k_1 - k_2)}{dt}\left(\frac{\partial\tau}{\partial\theta}\right)^2 - \frac{H_1(0)}{2}\frac{d(k_3 - k_4)}{dt}\left(\frac{\partial\tau}{\partial\zeta}\right)^2 \tag{17}$$

Дифференциальное уравнение характеристик в нелинейной постановке имеет вид [5]

$$c_n + v_1 = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial t}}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial F}{\partial z}\right)^2}} \tag{18}$$

где c_n — скорость поверхности $F = 0$ относительно частиц, v_1 — скорость частиц по нормали к волне.

Следует отметить, что, вообще говоря, система координат τ, y_0, z_0 не является ортогональной, поскольку лучи системы (1) не перпендикулярны фронту волны.

Из линейного решения [1], а также из уравнения (17) видно, что порядок малости τ равен $\frac{(\theta - \theta_0)^2}{k_1 - k_2} \approx \frac{(\zeta - \zeta_0)^2}{k_3 - k_4}$*. Уравнение (18) можно переписать в виде

* Предполагая, что интенсивность S равна γ, можно для скачкообразной линейной волны S найти порядки $\tau \sim \gamma$, $\theta - \theta_0 \sim \sqrt{\gamma}$, $w_1 \sim \gamma$, $\frac{\partial w_1}{\partial \tau} \sim 1$.

$$-\frac{\dfrac{dF}{dt}}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial F}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial F}{\partial y}\right)^2+\left(\dfrac{\partial F}{\partial z}\right)^2}}=c_n \tag{19}$$

где $\dfrac{dF}{dt}$ вычисляется в частице.

В криволинейных координатах имеет место

$$\frac{dF}{dt}=\frac{\partial F}{\partial t}+\frac{\partial F}{\partial \tau}\frac{d\tau}{dt}+\frac{\partial F}{\partial \theta}\frac{d\theta}{dt}+\frac{\partial F}{\partial \zeta}\frac{d\zeta}{dt} \tag{20}$$

Обозначая координату по нормали к невозмущенной волне через x_1 и соответственный параметр Ламе через $H_1=\left\{\left(\dfrac{\partial\tau}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial\tau}{\partial y}\right)^2+\left(\dfrac{\partial\tau}{\partial z}\right)^2\right\}^{-\frac{1}{2}}$, причем

$$H_1=V_1+c \tag{21}$$

где V_1, c — невозмущенные значения v_1, c_n, можно получить $dx_1=H_1 d\tau$, $H_1\dfrac{d\tau}{dt}=v_1-H_1$ и, обозначая $v_1=V_1+w_1$, где $w_1 \ll V_1$, можно найти $H_1\dfrac{d\tau}{dt}=w_1-c$.

Подставляя полученные равенства в (19) и учитывая, что в первом порядке нормальная скорость волны

$$c_n=c+\lambda w_1 \tag{22}$$

(причем величина λ в задаче магнитной газодинамики будет указана далее) можно получить уравнение характеристик

$$-\frac{\dfrac{\partial F}{\partial t}+\dfrac{\partial F}{\partial \tau}\dfrac{w_1-c}{H_1}+\dfrac{\partial F}{\partial \theta}\dfrac{d\theta}{dt}+\dfrac{\partial F}{\partial \zeta}\dfrac{d\zeta}{dt}}{\dfrac{\partial F}{\partial \tau}\sqrt{\dfrac{1}{H_1^2}+\Phi\left(\dfrac{\partial\tau}{\partial\theta},\dfrac{\partial\tau}{\partial\zeta}\right)}}=c+\lambda w_1 \tag{23}$$

где Φ содержит первые и вторые степени аргументов.

Учитывая малость $\dfrac{\partial\tau}{\partial t}$, $\dfrac{\partial\tau}{\partial\theta}$, $\dfrac{\partial\tau}{\partial\zeta}$, Φ, (23) можно записать в виде

$$\frac{\partial\tau}{\partial t}+f\left(\frac{\partial\tau}{\partial\theta},\frac{\partial\tau}{\partial\zeta}\right)=-\frac{\lambda+1}{H_1}w_1 \tag{24}$$

В линейной задаче правую часть следует отбросить и (24) должно перейти в (17), откуда находится вид функции f, и уравнение нелинейных характеристик запишется в виде

$$\frac{\partial\tau}{\partial t}+\Gamma\left(\frac{\partial\tau}{\partial\theta}\right)^2+\varkappa\left(\frac{\partial\tau}{\partial\zeta}\right)^2=\frac{\lambda+1}{H_1}w_1 \tag{25}$$

где

$$\Gamma=\frac{H_1(0)}{2}\frac{d(k_1-k_2)}{dt}$$
$$\varkappa=\frac{H_1(0)}{2}\frac{d(k_3+k_4)}{dt} \tag{26}$$

Таким образом, получено дифференциальное уравнение характеристик для произвольной среды в окрестности соединения волн.

Соответствующее уравнение второго порядка имеет вид

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t\partial\tau}-\Gamma\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2}-\varkappa\frac{\partial^2\varphi}{\partial\zeta^2}+\frac{\lambda+1}{H_1}w_1\frac{\partial^2\varphi}{\partial\tau^2}-w_1\frac{\partial\ln m}{\partial t}=0 \tag{27}$$

где можно полагать $\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}=w_1$, причем m — значение w_1 в линейной одномерной (относительно τ) задаче, которое находится по лучевой теории [3].

Для уточнения смысла $\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial\zeta}$ нужно иметь уравнения в проекциях на касательную к волне.

В магнитной газодинамике имеют место уравнения

$$\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}=\operatorname{rot}(\vec{v}\times\vec{B})$$

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}+(\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v}+\frac{1}{\rho}\nabla P-\frac{1}{4\pi\rho}(\nabla\times\vec{B})\times\vec{B}=0 \tag{28}$$

где $\vec{B}$ — вектор магнитной индукции, $\vec{v}$ — вектор скорости частиц, ρ — плотность, P — давление.

Выбирая ось x_1 по нормали к невозмущенной волне, оси x_2, x_3 — в касательной плоскости к волне, причем плоскость x_1, x_2 проходит через нормаль и вектор $\vec{B}$, вводя обозначения

$$\begin{aligned} B_i&=B_i^0+b_i\\ v_i&=V_i+w_i\\ \rho&=\rho_0+\rho_1\\ P&=P_0+P_1\end{aligned}\qquad i=1,\,2,\,3$$

где b_i, w_i, P_1, ρ_1 — малые возмущенные значения соответствующих величин, и учитывая, что $\frac{\partial}{\partial x_1}\gg\frac{\partial}{\partial x_2}\gg\frac{\partial}{\partial t}$, можно в порядке $\frac{\partial}{\partial x_1}$ получить из (28) условия на характеристике, которые получаются также из условий совместности [5]

$$P_1 = \frac{\rho_0 a_0^2}{c} w_1$$

$$b_2 = \frac{w_1 \rho_0}{c} \frac{c^2 - a_0^2}{\frac{B_2^0}{4\pi}} \tag{29}$$

$$w_2 = -w_1 \frac{B_1^0 (c^2 - a_0^2)}{c^2 B_2^0}$$

$$b_1 = 0, \quad b_3 = 0, \quad w_3 = 0$$

Здесь a_0 — начальная скорость звука в жидкости.

Уравнение для c имеет вид

$$(c^2 - a_0^2)\left(c^2 - \frac{B_1^{0^2}}{4\pi\rho_0}\right) = \frac{B_2^{0^2} H_1^2}{4\pi\rho_0} \tag{30}$$

Из уравнения адиабатичности следует $\rho_1 = \frac{P_1}{a_0^2}$ в первом порядке. Первое уравнение (28) в проекции на нормаль с учетом того, что $\frac{\partial b_1}{\partial t} \approx \approx -\frac{\partial b_1}{\partial \tau}$, запишется в основном порядке

$$-\frac{\partial b_1}{\partial \tau} = \frac{1}{H_2} \frac{\partial w_1}{\partial x_2} \frac{B_2^0 c H_1}{c^2 - \frac{B_1^{0^2}}{4\pi\rho_0}} \tag{31}$$

где производные по x_2 подставлены согласно (29).

Из второго уравнения (28) в проекции на x_3 получится в основном порядке

$$\frac{\partial k}{\partial \tau} = \frac{H_1}{H_3} \frac{\partial w_1}{\partial x_3} \tag{32}$$

где

$$k = \frac{c}{H_1} w_3 + \frac{B_1^0 b_3}{4\pi\rho_0 H_1}$$

От ортогональных координат τ, x_2, x_3 можно перейти к криволинейным координатам τ, θ, ζ, где $\theta = \theta(\tau, x_2)$, $\zeta = \zeta(\tau, x_3)$ (или τ, y_0, z_0), причем

$$\left.\frac{\partial}{\partial \tau}\right|_{x_2, x_3} = \left.\frac{\partial}{\partial \tau}\right|_{\theta, \zeta} + \frac{\partial \theta}{\partial \tau} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial \zeta}{\partial \tau} \frac{\partial}{\partial \zeta}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_3} = \frac{\partial \zeta}{\partial x_3} \frac{\partial}{\partial \zeta}$$

Тогда уравнения (31) и (32) примут вид

$$-\frac{\partial b_1}{\partial \tau} = \frac{1}{H_2} \frac{\partial w_1}{\partial \theta} \frac{B_2^0 c H_1}{c^2 - \dfrac{B_1^{0^2}}{4\pi\rho_0}}$$

$$\frac{\partial k}{\partial \tau} = \frac{H_1}{H_3} \frac{\partial w_1}{\partial \zeta}$$

$$H_2 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2} \tag{33}$$

$$H_3 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \zeta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \zeta}\right)^2 \pm \left(\frac{\partial z}{\partial \zeta}\right)^2}$$

то есть уравнения (31), (32) в данном приближении имеют место и для координат τ, θ, ζ, не являющихся ортогональными.

Предполагая более общую зависимость, то есть $\theta = \theta(\tau, x_2, x_3)$, $\zeta = \zeta(\tau, x_2, x_3)$, можно получить (33), где вместо b_1, k имеется их линейная комбинация.

Отсюда получится

$$k = \frac{H_1}{H_3} \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta}, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = \mu, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta} = \nu$$

$$-b_1 = \frac{1}{H_2} \frac{B_2^0 c H_1}{c^2 - \dfrac{B_1^{0^2}}{4\pi\rho_0}} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \tag{34}$$

и уравнения (27), (33) примут вид

$$\frac{\partial w_1}{\partial t} - \Gamma \frac{\partial \mu}{\partial \theta} - \varkappa \frac{\partial \nu}{\partial \zeta} - \frac{\lambda + 1}{H_1} w_1 \frac{\partial w_1}{\partial \tau} - w_1 \frac{\partial \ln m}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\partial w_1}{\partial \theta} = \frac{\partial \mu}{\partial \tau}, \qquad \frac{\partial w_1}{\partial \zeta} = \frac{\partial \nu}{\partial \tau} \tag{35}$$

Для определения значения λ следует использовать уравнение для c_n, которое имеет вид [5]

$$c_n^4 - c_n^2 (a^2 + b^2) + a^2 \frac{B_1^2}{4\pi\rho} = 0$$

$$b^2 = \frac{B_1^2 + B_2^2}{4\pi\rho} \tag{36}$$

где нелинейная скорость звука a приближенно выражается в виде

$$a = a_0 + \frac{n-1}{2} \frac{P_1}{\rho_0 a_0}$$

где n — показатель адиабаты.

Отсюда в первом порядке с учетом (29) получится

$$c_n = c + \lambda w_1$$

$$\lambda = -\frac{n+1}{2} \frac{c^2 - \dfrac{B_1^{0^2}}{4\pi\rho_0}}{a_0^2 + a_1^2 - 2c^2} + \frac{3}{2} \frac{a_0^2 - c^2}{a_0^2 + a_1^2 - 2c^2} \tag{37}$$

причем

$$a_1^2 = \frac{B_1^{0^2} + B_2^{0^2}}{4\pi\rho_0}$$

Таким образом, найдены упрощенные нелинейные уравнения (35) в окрестности соединения волн S и Σ в магнитной газодинамике.

При отсутствии магнитного поля имеет место соотношение

$$\begin{gathered}\frac{d(k_1 - k_2)}{dt} = -\frac{a_0}{H_2^2} \frac{H_1}{H_1(0)} \\ \frac{d(k_3 - k_4)}{dt} = -\frac{a_0}{H_3^2} \frac{H_1}{H_1(0)}\end{gathered} \tag{38}$$

Отсюда и из уравнения (27) после перехода согласно (15) к переменным θ, ζ можно получить соответствующие нелинейные уравнения [4, 6]. Кроме того, уравнения (35) могут быть проверены для первоначально неподвижной однородной электропроводящей жидкости [7], для которой получены в плоской задаче другим путем упрощенные нелинейные уравнения вблизи B, которые совпадают с уравнениями, получаемыми из (35). Как показывает линейное решение [3], для S_0 с угловой точкой уравнения (35) не зависят от координаты ζ.

В одномерной по τ задаче нелинейные уравнения в окрестности волны для движущейся жидкости получены в [8, 9].

Другой подход к получению нелинейных уравнений состоит в том, что в уравнениях движения произвольной среды

$$A_{ij}^{(k)}(x, y, z, U) \frac{\partial U_j}{\partial x_k} + B_i(x, y, z, U_j) = 0, \quad k = 4,$$

где $x_0 = t$, $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$, $U = \{U_j\}$ — вектор ($i, j = 1,\ldots, m$ и по повторяющимся индексам проведено суммирование), записывается $U_j = V_j + u_j$, где $V_j(x, y, z)$ — основное движение перед волной, $|u_j| \ll |V_j|$. Оставляя в уравнениях малые порядка u_j, причем вблизи волны $\dfrac{\partial u_j}{\partial \tau} \sim 1$ и поэтому в нелинейных слагаемых следует оставить лишь производные по τ и все U_j выразить через $u_1 = P$ по условиям совместности на характеристике $a_{ij}^{(k)} \frac{\partial \tau}{\partial x_k} u_j = 0$, и затем разрешая линейные члены уравнений относительно P, можно получить уравнение

$$\Delta(p, q, s, \nu) P + \cdots = A_{1j}(p, q, s, \nu) k_j P \frac{\partial P}{\partial \tau}$$

Здесь Δ есть характеристический полином для матрицы $\left\{a_{ij}^{(k)} \frac{\partial \tau}{\partial x_k}\right\}$, где $a_{ij}^{(k)} = A_{ij}^{(k)}(V)$, $k_j P \frac{\partial P}{\partial \tau}$ — правые части указанных упрощенных уравнений, то есть нелинейные слагаемые, причем в уравнении не выписаны производные низшего порядка и обозначено $p = \frac{\partial}{\partial x}$, $q = \frac{\partial}{\partial y}$, $s = \frac{\partial}{\partial z}$, $\nu = \frac{\partial}{\partial t}$.

Удобно перейти к координатам τ, θ, ζ, t, где $\theta = \text{const}$, $\zeta = \text{const}$ дают луч для линейных уравнений, причем $\theta = \theta(x, y)$, $\zeta = \zeta(y, z)$. Например, для уравнений с постоянными коэффициентами

$$\theta - \theta_0 = \frac{x + \frac{\partial \alpha_0}{\partial \beta_0} y}{x}, \qquad \zeta - \zeta_0 = \frac{x + \frac{\partial \alpha_0}{\partial \gamma_0} z}{x}$$

или

$$\theta - \theta_0 = -\frac{\partial^2 \alpha_0}{\partial \beta_0^2} \beta_3 - \frac{\partial^2 \alpha_0}{\partial \beta_0 \partial \gamma_0} \gamma_3, \qquad \zeta - \zeta_0 = -\frac{\partial^2 \alpha_0}{\partial \beta_0 \partial \gamma_0} \beta_3 - \frac{\partial^2 \alpha_0}{\partial \gamma_0^2} \gamma_3$$

Удерживая малые основного порядка, можно получить уравнение для пространственной задачи

$$\frac{\partial^2 P}{\partial t \partial \tau} - \frac{1}{2} H_1 \left(\frac{\partial^2 \alpha}{\partial \beta^2} \frac{\partial^2 P}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \alpha}{\partial \gamma^2} \frac{\partial^2 P}{\partial x_3^2} + 2 \frac{\partial^2 \alpha}{\partial \beta \partial \gamma} \frac{\partial^2 P}{\partial x_2 \partial x_3} \right) -$$
$$- \frac{\partial P}{\partial \tau} \frac{d \ln \Phi_1}{dt} = -\frac{\partial}{\partial \tau} \frac{c_n}{\rho_0 a_0^2} \frac{\lambda + 1}{H_1} P \frac{\partial P}{\partial \tau} \tag{39}$$

где взамен невыписанных производных низшего порядка добавлено $\frac{\partial P}{\partial \tau} \frac{d \ln \Phi_1}{dt}$, учитывающее значение P в линейной одномерной по τ задаче, то есть лучевое решение Φ_1, $dx_2 = H_2 d\theta$, $dx_3 = H_3 d\zeta$, H_2, H_3 — коэффициенты Ламе по θ, ζ, смысл H_1, c_n, $\lambda + 1$ указан ранее, причем правая часть получена из сопоставления с уравнением одномерных характеристик.

Выбирая β_3, γ_3 по направлению линий кривизны на поверхности $\alpha = \alpha(\beta, \gamma)$, $\Delta(\alpha, \beta, \gamma, -1) = 0$, можно найти $\frac{\partial^2 \alpha}{\partial \beta \partial \gamma} = 0$, и указанное уравнение перейдет в найденное ранее уравнение (27).

Для уравнений магнитной газодинамики неоднородной движущейся жидкости, выбирая ось x по нормали к волне, можно конкретизировать коэффициенты в (39)

$$\frac{\partial^2 \alpha}{\partial \beta^2} = T - B_z^2 V, \qquad \frac{\partial^2 \alpha}{\partial \gamma^2} = T - B_y^2 V, \qquad \frac{\partial^2 \alpha}{\partial \beta \partial \gamma} = B_y B_z V$$

$$T = \frac{c\,(3a_0^2 + 3a_1^2 - 2c^2)\,(a_0^2 a_1^2 - a_0^2 c^2 - a_1^2 c^2) - c^3 (c^2 - a_0^2 - a_1^2)\,(6c^2 - a_0^2 - a_1^2)}{(2c^2 - a_0^2 - a_1^2)^3}$$

$$V = \frac{c\,(3a_0^2 + 3a_1^2 - 2c^2)\, a_0 2 a_1^2}{(2c^2 - a_0^2 - a_1^2)^3 B^2}, \qquad B^2 = B_x^2 + B_y^2 + B_z^2$$

Другим путем нелинейные уравнения в окрестности волны в магнитной газодинамике получены преподавателем ЕГУ М. Минасяном, которым также показано путем вычисления интегралов для лучевого решения, что поток энергии волны в магнитной газодинамике имеет вид $\rho_0 v^2 \Sigma \frac{H_1^2}{c}$, где v — величина возмущенной скорости частиц, Σ характеризует площадь фронта внутри лучевой трубки и, приравняв значение потока энергии постоянной, можно найти в лучевом приближении v и по условиям совместности значение $w_1 = \Phi$.

Этот результат в задаче газовой динамики, где $c = a_0$, найден в [10].

Институт механики
АН Армянской ССР

Поступила 15 XII 1970

Ա. Գ. ԲԱԳԴՈԵՎ, Զ. Ն. ԴԱՆՈՅԱՆ

ՄԻՋԱՎԱՅՐԻ ՇԱՐԺՄԱՆ ՈՉ ԳԾԱՅԻՆ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ԴՈՒՐՍ ԲԵՐՈՒՄԸ ԱԼԻՔԻ ՄՈՏԱԿԱՅՔՈՒՄ

Ամփոփում

Աշխատանքում դիտարկվում է հեղուկի գրգռված շարժման որոշման խնդիրը կամայական տեսքի հարվածային ալիքի և կետային կամ դիֆֆրակցիոն ալիքի հպման գծի շրջակայքում։ Կամայական միջավայրի համար դուրս են բերված ալիքների միացման գծի շրջակայքը նկարագրող ոչ գծային հավասարումները։

DERIVATION OF NON-LINEAR EQUATIONS FOR THE MEDIUM MOTION NEAR THE WAVE

A. G. BAGDOEV, Z. N. DANOYAN

S u m m a r y

The problem of derivation of simplified non-linear equations for the medium motion in the neighbourhood of junction of a shock wave of arbitrary shape with a diffracted or pointed wave is considered. The linear and non-linear equations of characteristics in the above-mentioned neighbourhood are derived, and then the non-linear equation along the ray is obtained which is supplemented by two simplified equations projected on the directions tangent to the wave.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Багдоев А. Г.* Определение особенностей фронтов волн. Докл. АН Арм.ССР, № 4, 1970.
2. *Багдоев А. Г.* Определение параметров движения в окрестности встреч фронтов волн. Изв. АН Арм.ССР, Механика, т. XXII, № 5, 1969.
3. *Багдоев А. Г.* Определение решения в окрестности особой линии ударной волны. Тр. Ереванского политехн. ин-та, № 5, 1971.
4. *Багдоев А. Г.* Исследование окрестности волны вблизи особой линии. Изв. АН Арм.ССР, Механика, т. XXIV, № 1, 1971.
5. *Yeffrey A., Tanuiti T.* Non-linear wave propagation. New-York—London, 1964.
6. *Шефтер Г. М.* Учет эффектов вязкости и теплопроводности при распространении импульсов в неоднородной движущейся жидкости. ПММ, № 1, 1969.
7. *Багдоев А. Г.* Определение параметров движения среды вблизи каустики. Изв. АН АрмССР, Механика, т. XXIII, № 2, 1970.
8. *Guiraud Y. P.* Acoustique géométrique et bruit balistique. Comptes Rendus, t. 258, 1964, 4425.
9. *Рыжов О. С.* Затухание ударных волн в неоднородных средах. ПМТФ, № 2, 1961.
10. *Рыжов О. С., Шефтер Г. М.* Об энергии звуковых волн. ПММ, т. XXVI, № 5, 1962.