ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXV. № 1, 1972 Механика

Р. Е. МКРТЧЯН

БОЛЬШИЕ УПРУГИЕ ДЕФОРМАЦИИ НЕСЖИМАЕМОГО МАТЕРИАЛА, РАЗНОСОПРОТИВЛЯЮЩЕГОСЯ ДЕФОРМАЦИЯМ РАСТЯЖЕНИЯ И СЖАТИЯ

Проблема разносопротивляемости материала растягивающим и сжимающим напряжениям обсуждалась в ряде исследований [1—4] и др.

В настоящей работе на основании соображений, приведенных в [5], предлагается метод исследования упругих свойств несжимаемого материала, разносопротивляющегося деформациям растяжения и сжатия. Из условия непрерывности напряжений и функции энергии деформации приводится способ определения упругих постоянных в рамках теории упругости второго порядка.

Рассматривается задача больших упругих деформаций для простого растяжения и симметричного расширения круглой цилиндрической трубы из указанного материала. Приводится пример выворачивания наизнанку круглой цилиндрической трубы, когда для ее деформаций справедливы соотношения теории упругости второго порядка.

1. Рассмотрим деформацию первоначально однородной упругой несжимаемой среды, разносопротивляющейся деформациям растяжения и сжатия. Рассуждения о существовании такого материала приведены в [5].

С деформируемым телом свяжем ортогональную систему координат $(\overline{\theta}_1, \overline{\theta}_2, \overline{\theta}_3)$ так, чтобы в каждой точке она совпадала с главными направлениями тензора деформаций $(\overline{y}_1, \overline{y}_2, \overline{y}_3)$. Ковариантные и контрвариантные компоненты метрических тензоров недеформированного и деформированного состояний относительно системы $(\overline{\theta}_1, \overline{\theta}_2, \overline{\theta}_3)$ обозначим $\overline{g}_{ij}$, $\overline{g}^{ij}$, $\overline{G}_{ij}$ и $\overline{G}^{ij}$ $(i, j = 1, 2, 3)$ соответственно.

Предположим, что в какой-то области деформированного тела материал растягивается* по направлению $\overline{\theta}_s$, а по перпендикулярным к нему направлениям сжимается. Тогда упругие свойства материала по всем направлениям, перпендикулярным оси $\overline{\theta}_s$, одинаковы и различаются от упругих свойств материала по направлению $\overline{\theta}_s$ [5]. Можно принять, что в пределах этой области материал однороден в том

* В настоящей работе слова „растяжение" и „сжатие" относятся к деформациям.

смысле, что упругие свойства, отнесенные к осям $(\overline{\theta}_1, \overline{\theta}_2, \overline{\theta}_3)$, одинаковы в каждой точке этой области.

Функция энергии деформации материала W в указанной области будет зависеть от инвариантов деформаций I_1, I_2 $(I_3 = 1)$ и от безразмерной компоненты $\gamma_{(ss)}$ [5]

$$W = W'_{(s)}(I_1, \ I_2, \ \gamma_{(ss)}) \tag{1.1}$$

где

$$\gamma_{(ss)} = \frac{\overline{\gamma}_{ss}}{\sqrt{\overline{g}_{ss}\overline{g}_{ss}}} = \frac{\overline{G}_{ss} - \overline{g}_{ss}}{2\,\overline{g}_{ss}} = \overline{e}_{ss} \tag{1.2}$$

$\overline{\gamma}_{ij}$ — компоненты ковариантного тензора деформаций относительно θ_i, $\overline{e}_{ss}$ — главное значение деформаций удлинения по направлению $\overline{y}_s$ $(s = 1, 2, 3)$.

Если в какой-то области деформированного тела материал сжимается по направлению $\overline{\theta}_s$ и по перпендикулярным к нему направлениям растягивается, то W имеет другой вид

$$W = W''_{(s)}(I_1, I_2, I_3) \tag{1.3}$$

Контрвариантные компоненты тензора напряжения, соответствующие $W'_{(s)}$, выражаются [5, 6]

$$\tau'^{ij}_{(s)} = \Phi'_{(s)} g^{ij} + \Psi'_{(s)} B^{ij} + p'_{(s)} G^{ij} + \Theta'_{(s)} M^{ij}_{(s)} \tag{1.4}$$

где

$$\Phi'_{(s)} = 2\frac{\partial W'_{(s)}}{\partial I_1}, \quad \Psi'_{(s)} = 2\frac{\partial W'_{(s)}}{\partial I_2}, \quad \Theta'_{(s)} = \frac{\partial W'_{(s)}}{\partial \gamma_{(ss)}}$$
$$M^{ij}_{(s)} = \frac{\partial \theta^i}{\partial \overline{\theta}^s}\frac{\partial \theta^j}{\partial \overline{\theta}^s}\Big/\overline{g}_{ss}, \qquad B^{ij} = I_1 g^{ij} - g^{ir} g^{js} G_{rs} \tag{1.5}$$

$p'_{(s)}$ — скалярная инвариантная функция от координат, которая может быть определена из уравнений равновесия; g_{ij}, g^{ij}, G_{ij} и G^{ij} — ковариантные и контрвариантные компоненты метрических тензоров недеформированного и деформированного состояний соответственно относительно подвижной системы координат θ^i.

Компоненты контрвариантного тензора напряжений $\tau''^{ij}_{(s)}$, соответствующие функции $W''_{(s)}$, определяются аналогичным образом.

Предположим, что в какой-то области деформированного тела материал по направлению $\overline{y}_2$ растягивается, по $\overline{y}_3$ — сжимается, а по $\overline{y}_1$ — деформации равны нулю. Тогда из того условия, что напряжения и функция энергии деформации должны быть непрерывными, получаем

$$W'_{(2)}(I_1, I_2, \gamma_{(22)}) = W'_{(3)}(I_1, I_2, \gamma_{(33)})^*$$
$$\tau'^{ij}_{(2)} = \tau'^{ij}_{(3)} \tag{1.6}$$

Эти равенства должны быть использованы для определения упругих свойств материала.

Рассмотрим случай, когда функция $W'_{(s)}$ может быть аппроксимирована степенным рядом по переменным (I_1-3), (I_2-3) и $\gamma_{(ss)}$

$$W'_{(s)} = \sum_{i,\,j,\,k=0}^{\infty} C'_{ijk}(I_1-3)^i(I_2-3)^j\gamma^k_{(ss)} \tag{1.7}$$

Здесь $C'_{000}=0$, так как в недеформированном состоянии $W'_{(s)}$ равна нулю.

(I_1-3) и (I_2-3), — вообще говоря, оказываются второго порядка малости по отношению к главным удлинениям [7], а $\gamma_{(ss)}$ — величина первого порядка малости.

Если в уравнении (1.7) пренебрегаем членами более высокой степени, чем третья, по отношению к главным удлинениям, то получаем

$$W'_{(s)} = C'_{100}(I_1-3) + C'_{010}(I_2-3) + C'_{001}\gamma_{(ss)} + C'_{002}\gamma^2_{(ss)} +$$
$$+ C'_{003}\gamma^3_{(ss)} + C'_{101}(I_1-3)\gamma_{(ss)} + C'_{011}(I_2-3)\gamma_{(ss)} \tag{1.8}$$

Из (1.5) и (1.8) определяются функции $\Phi'_{(s)}$, $\Psi'_{(s)}$ и $\Theta'_{(s)}$

$$\Phi'_{(s)} = 2(C'_{100} + C'_{101}\gamma_{(ss)}), \qquad \Psi'_{(s)} = 2(C'_{010} + C'_{011}\gamma_{(ss)})$$
$$\Theta'_{(s)} = C'_{001} + 2C'_{002}\gamma_{(ss)} + 3C'_{003}\gamma^2_{(ss)} + C'_{101}(I_1-3) + C'_{011}(I_2-3) \tag{1.9}$$

Функции $W''_{(s)}$, $\Phi''_{(s)}$, $\Psi''_{(s)}$ и $\Theta''_{(s)}$ определяются аналогичными выражениями.

В какой-то точке деформированного тела рассмотрим напряженное состояние элементарного параллелепипеда, ребра которого параллельны главным направлениям деформаций. Системы координат y_i, θ^i и $\overline{\theta}^i$ выберем так, чтобы в этой точке они совпадали с системой $\overline{y}_i$. Если указанный параллелепипед растягивается по направлению $\overline{y}_2$, сжимается по $\overline{y}_3$, а по направлению $\overline{y}_1$ деформации равны нулю, то его деформацию можно представить состоящей только из однородных растяжений с коэффициентами растяжений $\lambda_1=1$, $\lambda_2>1$, $\lambda_3<1$.

Заметим, что для указанного параллелепипеда справедливы равенства (1.6). Подставляя в (1.6) значения напряжений, соответствующие функциям $W'_{(2)}$ и $W'_{(3)}$ [8], получаем равенства

---

* Эти равенства имеют место только в указанной области.

$$\tau^{11} = \Phi'_{(2)} + (\lambda_2^2 + \lambda_3^2)\Psi'_{(2)} + p'_{(2)} = \Phi''_{(3)} + (\lambda_2^2 + \lambda_3^2)\Psi''_{(3)} + p''_{(3)}$$
$$\tau^{22} = \lambda_2^2\Phi'_{(2)} + \lambda_2^2(1 + \lambda_3^2)\Psi'_{(2)} + p'_{(2)} + \Theta'_{(2)}M^{22}_{(2)} = \lambda_2^2\Phi''_{(3)} + \lambda_2^2(1 + \lambda_3^2)\Psi''_{(3)} + p''_{(3)}$$
$$\tau^{33} = \lambda_3^2\Phi'_{(2)} + \lambda_3^2(1 + \lambda_2^2)\Psi'_{(2)} + p'_{(2)} = \lambda_3^2\Phi''_{(3)} + \lambda_3^2(1 + \lambda_2^2)\Psi''_{(3)} + p''_{(3)} + \Theta''_{(3)}M^{33}_{(3)}$$
$$\tau^{23} = \tau^{31} = \tau^{12} = 0 \qquad (1.10)$$

Подставляя в (1.10) значения функций $\Phi'_{(2)} \cdots \Theta''_{(3)}$ из (1.9) и принимая во внимание, что в данном случае

$$M^{22}_{(2)} = \frac{1}{g_{22}} = \lambda_2^2, \qquad M^{33}_{(3)} = \frac{1}{g_{33}} = \lambda_3^2$$
$$I_1 = I_2 = 1 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2, \qquad I_3 = \lambda_2^2\lambda_3^2 = 1$$
$$\gamma_{(22)} = \frac{1}{2}(\lambda_2^2 - 1), \qquad \gamma_{(33)} = \frac{1}{2}(\lambda_3^2 - 1)$$

получаем

$$2C'_{100} + C'_{101}\lambda_2^2 - C'_{101} + \left(\lambda_2^2 + \frac{1}{\lambda_2^2}\right)(2C'_{010} + C'_{011}\lambda_2^2 - C'_{011}) + p'_{(2)} =$$
$$= 2C''_{100} + C''_{101}\frac{1}{\lambda_2^2} - C''_{101} + \left(\lambda_2^2 + \frac{1}{\lambda_2^2}\right)\left(2C''_{010} + C''_{011}\frac{1}{\lambda_2^2} - C''_{011}\right) + p''_{(2)}$$

$$\lambda_2^2(2C'_{100} + \lambda_2^2C'_{101} - C'_{101}) + (1 + \lambda_2^2)(2C'_{010} + C'_{011}\lambda_2^2 - C'_{011}) + p'_{(2)} +$$
$$+ \lambda_2^2\Big[C'_{001} + C'_{002}\lambda_2^2 - C'_{002} + \frac{3}{4}C'_{003}(\lambda_2^2 - 1)^2 +$$
$$+ (C'_{101} + C'_{011})\left(\lambda_2^2 + \frac{1}{\lambda_2^2} - 2\right)\Big] = \lambda_2^2\left(2C''_{100} + C''_{101}\frac{1}{\lambda_2^2} - C''_{101}\right) +$$
$$+ (1 + \lambda_2^2)\left(2C''_{010} + C''_{011}\frac{1}{\lambda_2^2} - C''_{011}\right) + p''_{(3)} \qquad (1.11)$$

$$\frac{1}{\lambda_2^2}(2C'_{100} + \lambda_2^2C'_{101} - C'_{101}) + \left(1 + \frac{1}{\lambda_2^2}\right)(2C'_{010} + C'_{011}\lambda_2^2 - C'_{011}) + p'_{(2)} =$$
$$= \frac{1}{\lambda_2^2}\left(2C''_{100} + C''_{101}\frac{1}{\lambda_2^2} - C''_{101}\right) +$$
$$+ \left(1 + \frac{1}{\lambda_2^2}\right)\left(2C''_{010} + C''_{011}\frac{1}{\lambda_2^2} - C''_{011}\right) + p''_{(3)} +$$
$$+ \frac{1}{\lambda_2^2}\Big[C''_{001} + C''_{002}\frac{1}{\lambda_2^2} - C''_{002} +$$
$$+ \frac{3}{4}C''_{003}\left(\frac{1}{\lambda_2^2} - 1\right)^2 + (C''_{101} + C''_{011})\left(\lambda_2^2 + \frac{1}{\lambda_2^2} - 1\right)\Big]$$

Из этих равенств находим

$$C'_{011} = C''_{011} = C'_{001} = C''_{001} = C'_{003} = C''_{003} = 0$$

$$C'_{101} = -C''_{101} = 2(C''_{010} - C'_{010}) = \frac{1}{2} C''_{002} = -\frac{1}{2} C'_{002} \tag{1.12}$$

$$C'_{100} + 3C'_{010} = C''_{100} + 3C''_{010}$$

Подставляя эти значения упругих постоянных в первое условие (1.6), убеждаемся, что непрерывность функции энергии деформации удовлетворяется.

Таким образом, для $W'_{(s)}$ и $W''_{(s)}$ в рамках теории упругости второго порядка получаем выражения

$$\begin{aligned} W'_{(s)} &= C'_1(I_1-3) + C'_2(I_2-3) + 2C\gamma^2_{(ss)} - C(I_1-3)\gamma_{(ss)} \\ W''_{(s)} &= C''_1(I_1-3) + C''_2(I_2-3) - 2C\gamma^2_{(ss)} + C(I_1-3)\gamma_{(ss)} \end{aligned} \tag{1.13}$$

где

$$C'_1 = C'_{100}, \quad C'_2 = C'_{010}, \quad C''_1 = C''_{100}, \quad C''_2 = C''_{010}$$

$$C = 2(C''_{010} - C'_{010}) = 2(C''_2 - C'_2)$$

Если, например, $s = 1$, то из (1.13) получаем

$$W'_{(1)} = C'_1(I_1-3) + C'_2(I_2-3) - 2C(\gamma_{(22)} + \gamma_{(33)})\gamma_{(11)} \tag{1.14}$$

В выражениях (1.9) сокращается число постоянных, и они приводятся к следующим:

$$\begin{aligned} \Phi'_{(s)} &= 2(C'_1 - C\gamma_{(ss)}), \quad \Psi'_{(s)} = 2C'_2, \quad \Theta'_{(s)} = 4C\gamma_{(ss)} - C(I_1-3) \\ \Phi''_{(s)} &= 2(C''_1 - C\gamma_{(ss)}), \quad \Psi''_{(s)} = 2C''_2, \quad \Theta''_{(s)} = -4C\gamma_{(ss)} + C(I_1-3) \end{aligned} \tag{1.15}$$

2. Рассмотрим следующую задачу.

Пусть круглая цилиндрическая труба, изготовленная из несжимаемого упругого материала, разносопротивляющегося деформациям растяжения и сжатия, одновременно испытывает следующие деформации:

1) простое растяжение в направлении оси трубы с коэффициентом растяжения λ;

2) однородное раздувание, при котором внешний и внутренний радиусы трубы a_1 и a_2 переходят в $r_1 = \mu_1 a_1$ и $r_2 = \mu_2 a_2$.

Для определения деформированного тела выберем систему цилиндрических координат r, θ, z так, чтобы ось z совпадала с осью трубы. В каждой точке деформированного тела эта система совпадает с главными направлениями деформаций $(\overline{y}_1, \overline{y}_2, \overline{y}_3)$. Координаты точки (r, θ, z) в недеформированном состоянии будут $\rho = Qr$, θ, $\frac{z}{\lambda}$,

где Q определяется из условия несжимаемости

$$Q=\frac{1}{r}\sqrt{a_1^2-\lambda(\mu_1^2a_1^2-r^2)}=\frac{1}{r}\sqrt{a_2^2+\lambda(r^2-\mu_2^2a_2^2)} \tag{2.1}$$

Ковариантные и контрвариантные компоненты метрических тензоров деформированного и недеформированного состояний определяются [8]

$$G_{ij}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & r^2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\qquad G^{ij}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{r^2} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$g_{ij}=\begin{bmatrix}\frac{\lambda^2}{Q^2} & 0 & 0\\ 0 & Q^2r^2 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{\lambda^2}\end{bmatrix}\qquad g^{ij}=\begin{bmatrix}\frac{Q^2}{\lambda^2} & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{Q^2r^2} & 0\\ 0 & 0 & \lambda^2\end{bmatrix} \tag{2.2}$$

Предположим, в какой-то области деформированной трубы материал растягивается по направлению r, а по перпендикулярным к нему направлениям сжимается. Тогда из (1.4) и (1.5), подставляя туда значения (2.2) и инвариантов I_1 и I_2 [8]

$$I_1=g^{rk}G_{rk}=\frac{Q^2}{\lambda^2}+\frac{1}{Q^2}+\lambda^2$$
$$I_2=g_{rk}G^{rk}=\frac{\lambda^2}{Q^2}+Q^2+\frac{1}{\lambda^2} \tag{2.3}$$

находим

$$\tau_{(1)}^{'11}=\frac{Q^2}{\lambda^2}\Phi_{(1)}'+\left(\frac{1}{\lambda^2}+Q^2\right)\Psi_{(1)}'+p_{(1)}'+\frac{Q^2}{\lambda^2}\Theta_{(1)}'$$

$$\tau_{(1)}^{'22}=\frac{1}{Q^2r^2}\Phi_{(1)}'+\left(\frac{1}{\lambda^2r^2}+\frac{\lambda^2}{Q^2r^2}\right)\Psi_{(1)}'+\frac{1}{r^2}p_{(1)}'$$

$$\tau_{(1)}^{'33}=\lambda^2\Phi_{(1)}'+\left(Q^2+\frac{\lambda^2}{Q^2}\right)\Psi_{(1)}'+p_{(1)}'$$

$$\tau_{(1)}^{'23}=\tau_{(1)}^{'31}=\tau_{(1)}^{'12}=0 \tag{2.4}$$

Из уравнений равновесия, которые в данном случае приводятся [8]

$$\frac{\partial\tau_{(1)}^{'11}}{\partial r}+\frac{\tau_{(1)}^{'11}-r^2\tau_{(1)}^{'22}}{r}=0,\quad \frac{\partial p_{(1)}'}{\partial\theta}=\frac{\partial p_{(1)}'}{\partial y_3}=0 \tag{2.5}$$

определяем неизвестную функцию

$$\frac{d}{dr}\left[p_{(1)}'+\frac{Q^2}{\lambda^2}\Phi_{(1)}'+\left(\frac{1}{\lambda^2}+Q^2\right)\Psi_{(1)}'+\frac{Q^2}{\lambda^2}\Theta_{(1)}'\right]+$$

$$+\frac{1}{r}\left(\frac{Q^2}{\lambda^2}-\frac{1}{Q^2}\right)\Phi'_{(1)}+\frac{1}{r}\left(Q^2-\frac{\lambda^2}{Q^2}\right)\Psi'_{(1)}=0$$

откуда

$$p'_{(1)}=-\frac{Q^2}{\lambda^2}\Phi'_{(1)}-\left(\frac{1}{\lambda^2}+Q^2\right)\Psi'_{(1)}-\frac{Q^2}{\lambda^2}\Theta'_{(1)}-L'_{(1)}(r)+H'_{(1)} \tag{2.6}$$

где

$$L'_{(1)}(r)=\int\limits_{r_a}^{r}\left[\left(\frac{Q^2}{\lambda^2}-\frac{1}{Q^2}\right)\Phi'_{(1)}+\left(Q^2-\frac{\lambda^2}{Q^2}\right)\Psi'_{(1)}\right]\frac{dr}{r} \tag{2.7}$$

r_a — радиус той цилиндрической поверхности, откуда начинается рассматриваемая область (в частном случае r_a совпадает с r_1); $H'_{(1)}$ — постоянная интегрирования.

Подставляя значение $p'_{(1)}$ из (2.6) в (2.4), получаем

$$\begin{gathered}
\tau'^{11}_{(1)}=H'_{(1)}-L'_{(1)}(r)\\
r^2\tau'^{22}_{(1)}=\tau'^{11}_{(1)}+\left(\frac{1}{Q^2}-\frac{Q^2}{\lambda^2}\right)\Phi'_{(1)}+\left(\frac{\lambda^2}{Q^2}-Q^2\right)\Psi'_{(1)}-\frac{Q^2}{\lambda^2}\Theta'_{(1)}\\
\tau'^{33}_{(1)}=\tau'^{33}_{(1)}+\left(\lambda^2-\frac{Q^2}{\lambda^2}\right)\Phi'_{(1)}+\left(\frac{\lambda^2}{Q^2}-\frac{1}{\lambda^2}\right)\Psi'_{(1)}-\frac{Q^2}{\lambda^2}\Theta'_{(1)}\\
\tau'^{23}_{(1)}=\tau'^{31}_{(1)}=\tau'^{12}_{(1)}=0
\end{gathered} \tag{2.8}$$

В области, где материал растягивается по направлению θ и сжимается по r и z, напряжения определяются аналогичным путем

$$\begin{gathered}
\tau'^{11}_{(2)}=H'_{(2)}-L'_{(2)}(r)\\
r^2\tau'^{22}_{(2)}=\tau'^{11}_{(2)}+\left(\frac{1}{Q^2}-\frac{Q^2}{\lambda^2}\right)\Phi'_{(2)}+\left(\frac{\lambda^2}{Q^2}-Q^2\right)\Psi'_{(2)}+\frac{1}{Q^2}\Theta'_{(2)}\\
\tau'^{33}_{(2)}=\tau'^{11}_{(2)}+\left(\lambda^2-\frac{Q^2}{\lambda^2}\right)\Phi'_{(2)}+\left(\frac{\lambda^2}{Q^2}-\frac{1}{\lambda^2}\right)\Psi'_{(2)}\\
\tau'^{23}_{(2)}=\tau'^{31}_{(2)}=\tau'^{12}_{(2)}=0
\end{gathered} \tag{2.9}$$

где

$$L'_{(2)}(r)=\int\limits_{r_a}^{r}\left[\left(\frac{Q^2}{\lambda^2}-\frac{1}{Q^2}\right)\Phi'_{(2)}+\left(Q^2-\frac{\lambda^2}{Q^2}\right)\Psi'_{(2)}-\frac{1}{Q^2}\Theta'_{(2)}\right]\frac{dr}{r} \tag{2.10}$$

$H'_{(2)}$ — постоянная интегрирования.

Если в какой-то области деформированной трубы материал растягивается по направлению z, а по перпендикулярным к нему направлениям сжимается, то получаем

$$
\begin{gathered}
\tau'^{11}_{(3)} = H'_{(3)} - L'_{(3)}(r) \\
r^2 \tau'^{22}_{(3)} = \tau'^{11}_{(3)} + \left(\frac{1}{Q^2} - \frac{Q^2}{\lambda^2}\right)\Phi'_{(3)} + \left(\frac{\lambda^2}{Q^2} - Q^2\right)\Psi'_{(3)} \\
\tau'^{33}_{(3)} = \tau'^{11}_{(3)} + \left(\lambda^2 - \frac{Q^2}{\lambda^2}\right)\Phi'_{(3)} + \left(\frac{\lambda^2}{Q^2} - \frac{1}{\lambda^2}\right)\Psi'_{(3)} + \lambda^2\Theta'_{(3)} \\
\tau'^{23}_{(3)} = \tau'^{31}_{(3)} = \tau'^{12}_{(3)} = 0
\end{gathered}
\tag{2.11}
$$

$$
L'_{(3)}(r) = \int\limits_{r_a}^{r} \left[\left(\frac{Q^2}{\lambda^2} - \frac{1}{Q^2}\right)\Phi'_{(3)} + \left(Q^2 - \frac{\lambda^2}{Q^2}\right)\Psi'_{(3)}\right]\frac{dr}{r}
\tag{2.12}
$$

$H'_{(3)}$ — постоянная интегрирования.

Таким образом, напряженное состояние деформированного тела может быть определено из (2.7)—(2.12) или из выражений $\tau'^{ij}_{(s)}$, которые определяются аналогичным образом (всего шесть видов), в зависимости от знаков $\overline{e}_{ss}$ ($\gamma_{(ss)}$ или γ_{ss}). Так как $\overline{e}_{ss}$ в пределах деформированной трубы могут менять знак, то возможно появление нескольких областей, где напряжения определяются различными выражениями. Тогда становится существенным определение разделяющих поверхностей указанных областей. Эти поверхности могут быть определены из равенств

$$
\gamma_{(ss)} = 0 \qquad (s = 1, 2, 3)
\tag{2.13}
$$

На поверхностях (в областях), где имеют место равенства (2.13), линейные элементы по направлению θ_s не деформируются. Из (1.2) и (2.13) находим, что линейные элементы по направлению $\theta_1 = r$ не деформируются, если

$$
\begin{aligned}
\gamma_{(11)} &= \frac{1}{2}\left(\frac{Q^2}{\lambda^2} - 1\right) = \frac{a_1^2 - \lambda\mu_1^2 a_1^2 + \lambda R_1^2}{2R_1^2\lambda^2} - \frac{1}{2} = \\
&= \frac{a_2^2 - \lambda\mu_2^2 a_2^2 + \lambda R_1^2}{2R_1^2\lambda^2} - \frac{1}{2} = 0
\end{aligned}
\tag{2.14}
$$

Здесь R_1 — радиус цилиндрической поверхности, на которой линейные элементы по направлению r не деформируются. Из (2.14) находим

$$
R_1 = a_1\sqrt{\frac{\lambda\mu_1^2 - 1}{\lambda(1 - \lambda)}} = a_2\sqrt{\frac{\lambda\mu_2^2 - 1}{\lambda(1 - \lambda)}}
\tag{2.15}
$$

Аналогичным образом определяем радиус цилиндрической поверхности, на которой линейные элементы по направлению $\theta_2 = \theta$ не деформируются

$$R_2 = a_1 \sqrt{\frac{1-\lambda\mu_1^2}{1-\lambda}} = a_2 \sqrt{\frac{1-\lambda\mu_2^2}{1-\lambda}} \tag{2.16}$$

Линейные элементы по направлению z после деформации сохраняют свою длину, если

$$\gamma_{(33)} = 0 \quad \text{или} \quad \lambda = \pm 1 \tag{2.17}$$

Если в пределах деформированной трубы главные удлинения не меняют своего знака, то постоянные интегрирования $H'_{(r)}$ (или $H'_{(s)}$) определяются из граничных условий обычным способом [6, 8]. В случае, когда в трубе возникают различные области напряженного состояния, принимаем, что труба состоит из нескольких различных слоев. Тогда постоянные интегрирования определяем из граничных условий и из условий неразрывности напряжений на разделяющих поверхностях указанных областей [9].

Исследуем деформированное состояние в зависимости от значений λ, μ_1 (или μ_2), причем из (2.1) следует, что $\mu_1(\mu_2)$ выражается через $\mu_2(\mu_1)$ следующим образом:

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \frac{1}{a_1}\sqrt{\frac{1}{\lambda}\left(\lambda\mu_2^2 a_2^2 + a_1^2 - a_2^2\right)} \\ \mu_1 &= \frac{1}{a_2}\sqrt{\frac{1}{\lambda}\left(\lambda\mu_1^2 a_1^2 - a_1^2 + a_2^2\right)} \end{aligned} \tag{2.18}$$

Рассмотрим случай, когда $0 < \lambda < 1$ ($e_{33} < 0$ и материал по направлению z сжимается). Если R_1 и R_2, определяемые из (2.15) и (2.16), выходят за пределы трубы или их значения мнимые, то главные удлинения в пределах трубы не меняют своего знака, а напряженное состояние в трубе определяется одним определенным видом выражений.

Из (2.15) и (2.16) следует, что значение R_1 действительное число, когда $\mu_1^2 > \frac{1}{\lambda}$, тогда как значение R_2 действительное, когда $\mu_1^2 < \frac{1}{\lambda}$.

Отсюда вытекает, что одновременно значения R_1 и R_2 не могут быть действительными и следовательно, если главное удлинение $\bar{e}_{11}(\bar{e}_{22})$ меняет свой знак, то $\bar{e}_{22}(\bar{e}_{11})$ не может быть знакопеременным.

Из условия несжимаемости следует, что в рассматриваемом случае материал не может сжиматься по направлениям r и θ одновременно (так как по направлению z сжимается). Следовательно, если главное удлинение $\bar{e}_{11}(\bar{e}_{22})$ в пределах деформированной трубы меняет свой знак, то $\bar{e}_{22}(\bar{e}_{11}) > 0$ во всех точках трубы. Распространяя эти рассуждения на пространство, частью которого является рассматриваемая труба, приходим к заключению, что если значение радиуса $R_1(R_2)$ действительное (или значение $R_2(R_1)$ мнимое), то $\bar{e}_{22}(\bar{e}_{11}) > 0$.

На основании этих рассуждений рассмотрим следующие случаи:

а) $R_1 \geqslant \mu_1 a_1 = r_1$, или $\mu_1 \geqslant \frac{1}{\lambda}$ (следует из (2.15)). Так как R_1 выходит за пределы трубы и имеет действительное значение, то главные удлинения в пределах трубы не меняют своего знака, а материал по направлению θ растягивается ($\overline{e_{22}} > 0$). Из (1.2) и (2.2) следует

$$e_{11}\Big|_{\rho=a_1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\lambda^2\mu_1^2} - 1\right) \leqslant 0 \quad (\text{так как } \lambda\mu_1 \geqslant 1)$$

то есть материал по направлению r сжимается. Напряжения $\tau_{(2)}^{\prime ij}$ определяются из (2.9);

б) $R_2 \geqslant \mu_1 a_1$, или $\mu_1 \leqslant 1$ (следует из (2.16)). Аналогичным образом находим, что $\overline{e_{11}} > 0$, $\overline{e_{22}} < 0$;

в) при $R_1^2 \geqslant \mu_2^2 a_2^2$ и $R_2^2 \leqslant \mu_2^2 a_2^2$ или $\frac{1}{\lambda} \geqslant \mu_2 \geqslant 1$ (следует из (2.15) и (2.16)), $\overline{e_{11}} \geqslant 0$, $\overline{e_{22}} \geqslant 0$. Из (2.18) можно найти условие для μ_1;

г) при $\mu_1 a_1 > R_1 > \mu_2 a_2$ или на основании (2.15) $\mu_2 > \frac{1}{\lambda} > \mu_1$ в зоне $\mu_1 a_1 \geqslant r \geqslant R_1$ имеет место $\overline{e_{11}} \geqslant 0$, $\overline{e_{22}} > 0$, а в $R_1 \geqslant r \geqslant \mu_2 a_2$ $\overline{e_{11}} \leqslant 0$, $\overline{e_{22}} > 0$;

д) при $\mu_1 a_1 > R_2 > \mu_2 a_2$ или $\mu_1 > 1 > \mu_2$ в зоне $\mu_1 a_1 \geqslant r \geqslant R_2$ выполняется $\overline{e_{11}} > 0$, $\overline{e_{22}} \geqslant 0$, а в $R_2 \geqslant r \geqslant \mu_2 a_2$ $\overline{e_{11}} > 0$, $\overline{e_{22}} \leqslant 0$.

Аналогичным образом можно провести исследование деформированного состояния в зависимости от значений R_1 и R_2 и для случаев $\lambda > 1$, $\lambda = 1$, $\lambda < -1$, $0 > \lambda > -1$ и $\lambda = -1$.

3. Рассмотрим следующий пример.

Пусть труба, изготовленная из рассматриваемого материала, выворачивается наизнанку так, что $\lambda < -1$, и для ее деформаций справедливы соотношения теории упругости второго порядка.

Заметим, что, когда λ принимает отрицательные значения, согласно (2.15) и (2.16), значения R_1 и R_2 всегда реальные.

Предположим еще, что $\mu_2 a_2 > R_2 > R_1 > \mu_1 a_1$. Тогда на основании (2.15) и (2.16) $\mu_1 < -\frac{1}{\lambda}$, $\mu_2 > 1$.

В зоне $R_1 \geqslant r > \mu_1 a_1$ ($\overline{e_{11}} > 0$, $\overline{e_{22}} \leqslant 0$, $\overline{e_{33}} > 0$) напряжения определяются выражениями, аналогичными (2.9) и (2.10), где вместо величин с одним штрихом фигурируют те же величины с двумя штрихами. Если значения $\Phi_{(2)}^{\prime\prime}$, $\Psi_{(2)}^{\prime\prime}$ и $\Theta_{(2)}^{\prime\prime}$, определенные из (1.15), подставить в указанные выражения, получим

$$\tau_{(2)}^{\prime\prime 11} = H_{(2)}^{\prime\prime} - L_{(2)}^{\prime\prime}(r)$$

$$r^2\tau_{(2)}^{\prime\prime 22} = \tau_{(2)}^{\prime\prime 11} + 2(C_1^{\prime\prime} + C_{1(22)}^{\prime\prime})\left(\frac{1}{Q^2} - \frac{Q^2}{\lambda^2}\right) + 2C_2^{\prime\prime}\left(\frac{\lambda^2}{Q^2} - Q^2\right) +$$

$$+ C\frac{1}{Q^2}(I_1 - 3) - 4C\frac{1}{Q^2}\gamma_{(22)} \tag{3.1}$$

$$\tau_{(2)}^{*33} = \tau_{(2)}^{*11} + 2(C_1^* + C\gamma_{(22)})\left(\lambda^2 - \frac{Q^2}{\lambda^2}\right) + 2C_2^*\left(\frac{\lambda^2}{Q^2} - \frac{1}{\lambda^2}\right)$$

$$\tau_{(2)}^{*23} = \tau_{(2)}^{*31} = \tau_{(2)}^{*12} = 0$$

где

$$L_{(2)}^*(r) = 2\int_{r_1}^{r}\left[\left(\frac{Q^2}{\lambda^2} - \frac{1}{Q^2}\right)(C_1^* + C\gamma_{(22)}) + C_2^*\left(Q^2 - \frac{\lambda^2}{Q^2}\right) - \right.$$

$$\left. - \frac{C}{Q^2}(I_1 - 3) - \frac{2C}{Q^2}\gamma_{(22)}\right]\frac{dr}{r} \tag{3.2}$$

Из (1.2), (2.1) и (2.2) определяем

$$\gamma_{(22)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{Q^2} - 1\right), \qquad \frac{dr}{r} = \frac{dQ^2}{2(Q^2 - \lambda)}$$

Подставляя эти значения и значение I_1 из (2.3) в (3.2) и выполняя интегрирование, получаем

$$L_{(2)}^*(r) = \left(\frac{C_1^*}{\lambda^2} + C_2^* - \frac{C}{2\lambda^2}\right)\left(Q^2 - \frac{1}{\mu_1^2} - \lambda\ln(Q^2\mu_1^2)\right) -$$

$$- \frac{C(\lambda^2 - 1)}{2\lambda}\ln\frac{Q^2 - \lambda}{(1 - \mu_1^2\lambda)\,Q^2} \tag{3.3}$$

В зоне $R_2 \geqslant r \geqslant R_1$ ($\bar{e}_{11} < 0$, $\bar{e}_{22} \leqslant 0$, $\bar{e}_{33} > 0$) напряжения определяем из (2.11), (2.12) и (1.15)

$$\tau_{(3)}^{'11} = H_{(3)}' - L_{(3)}'(r)$$

$$r^2\tau_{(3)}^{'22} = \tau_{(3)}^{'11} + 2(C_1' - C\gamma_{(33)})\left(\frac{1}{Q^2} - \frac{Q^2}{\lambda^2}\right) + 2C_2'\left(\frac{\lambda^2}{Q^2} - Q^2\right)$$

$$\tau_{(3)}^{'33} = \tau_{(3)}^{'11} + 2(C_1' - C\gamma_{(33)})\left(\lambda^2 - \frac{Q^2}{\lambda^2}\right) + 2C_2'\left(\frac{\lambda^2}{Q^2} - \frac{1}{\lambda^2}\right) + \tag{3.4}$$

$$+ 4C\lambda^2\gamma_{(33)} - C\lambda^2(I_1 - 3)$$

$$\tau_{(3)}^{'23} = \tau_{(3)}^{'31} = \tau_{(3)}^{'12} = 0$$

где

$$\gamma_{(33)} = \frac{1}{2}(\lambda^2 - 1)$$

$$L_{(3)}'(r) = \frac{1}{\lambda^2}\left(C_1' + \frac{C}{2} + C_2'\lambda^2\right)\left[Q^2 - Q^2(R_1) + \lambda\ln\frac{Q^2}{Q^2(R_1)}\right] \tag{3.5}$$

$Q(R_1)$ — значение Q при $r = R_1$.

В зоне $\mu_2 a_2 \geqslant r \geqslant R_2$ ($\bar{e}_{11} \leqslant 0$, $\bar{e}_{22} \geqslant 0$, $\bar{e}_{33} > 0$) для определения напряжений получаем выражения

$$\tau_{(1)}^{*11} = H_{(1)}^{*} - L_{(1)}^{*}(r)$$

$$r^2 \tau_{(1)}^{*22} = \tau_{(1)}^{*11} + 2(C_1^{*} + C\gamma_{(11)})\left(\frac{1}{Q^2} - \frac{Q^2}{\lambda^2}\right) + 2C_2^{*}\left(\frac{\lambda^2}{Q^2} - Q^2\right) +$$
$$+ \frac{Q^2}{\lambda^2}[4C\gamma_{(11)} - C(I_1 - 3)] \tag{3.6}$$

$$\tau_{(1)}^{*33} = \tau_{(1)}^{*11} + 2(C_1^{*} + C\gamma_{(11)})\left(\lambda^2 - \frac{Q^2}{\lambda^2}\right) + 2C_2^{*}\left(\frac{\lambda^2}{Q^2} - \frac{1}{\lambda^2}\right) +$$
$$+ \frac{Q^2}{\lambda^2}[4C\gamma_{(11)} - C(I_1 - 3)]$$

$$\tau_{(1)}^{*23} = \tau_{(1)}^{*31} = \tau_{(1)}^{*12} = 0$$

где

$$\gamma_{(11)} = \frac{1}{2}\left(\frac{Q^2}{\lambda^2} - 1\right)$$

$$L_{(1)}^{*}(r) = \frac{1}{\lambda^2}\left(C_1^{*} + \lambda^2 C_2^{*} - \frac{1}{2}C\right)\left[Q^2 - Q^2(R_2) + \lambda \ln\frac{Q^2}{Q^2(R_2)}\right] +$$
$$+ \frac{C}{4\lambda^4}[Q^4 - Q^4(R_2) - 2\lambda Q^2 + 2\lambda Q^2(R_2)] \tag{3.7}$$

Для определения постоянных $H_{(2)}^{*}$, $H_{(3)}^{*}$ и $H_{(1)}^{*}$, входящих в выражения (3.1), (3.4) и (3.6), из граничных условий и из условий неразрывности напряжений на поверхностях $r = R_1$ и $r = R_2$ получаем [9]

$$H_{(2)}^{*} = N_1$$
$$H_{(3)}^{*} = N_1 - L_{(2)}^{*}(R_1) \tag{3.8}$$
$$H_{(1)}^{*} = H_{(3)}^{*} - L_{(3)}^{*}(R_2) = N_2 + L_{(1)}^{*}(r_2)$$

где N_1 и N_2 — нормальные напряжения на граничных цилиндрических поверхностях $r = r_1$ и $r = r_2$ деформированной трубы. Между N_1 и N_2 из (3.8) получаем соотношение

$$N_1 - N_2 = L_{(1)}^{*}(r_2) + L_{(3)}^{*}(R_2) + L_{(2)}^{*}(R_1)$$

Институт механики
АН Армянской ССР

Поступила 15 XII 1970

Ռ. Ե. ՄԿՐՏՉՅԱՆ

ՁԳՄԱՆ ԵՎ ՍԵՂՄՄԱՆ ԴԵՖՈՐՄԱՑԻԱՆԵՐԻՆ ՏԱՐԲԵՐ ԴԻՄԱԴՐՈՒԹՅՈՒՆ ՑՈՒՅՑ ՏՎՈՂ ԱՆՍԵՂՄԵԼԻ ՆՅՈՒԹԻ ՄԵԾ ԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ԴԵՖՈՐՄԱՑԻԱՆԵՐԸ

Ամփոփում

Մեծ դեֆորմացիաների առկայության դեպքում առաջարկվում է ձգման և սեղմման դեֆորմացիաներին տարբեր դիմադրություն ցույց տվող առաձգական նյութի հատկությունները ուսումնասիրելու մեթոդ։ Լարումների և դեֆորմացիաների էներգիայի ֆունկցիայի անընդհատության պայմանից ելնելով, երկրորդ կարգի առաձգականության տեսության սահմաններում, բերվում է նշված նյութի առաձգական հաստատունները որոշելու եղանակ։

Դիտարկվում է նշված նյութից պատրաստված կլոր գլանային խողովակի պարզ ձգման և սիմետրիկ ընդարձակման խնդրի լուծումը մեծ առաձգական դեֆորմացիաների տեսությամբ։ Որպես օրինակ բերվում է կլոր գլանային խողովակի շուռ տրման խնդիրը, երբ նրա դեֆորմացիաները գտնվում են երկրորդ կարգի առաձգականության տեսության կիրառելիության սահմաններում։

LARGE ELASTIC DEFORMATIONS OF AN INCOMPRESSIBLE MEDIUM HETERORESISTANT TO TENSION AND COMPRESSION DEFORMATIONS

R. E. MKRTCHIAN

Summary

The method to investigate the properties of elastic incompressible medium heteroresistant to tension and compression deformations in the presence of large deformations is suggested. In virtue of the principle of continuity of stresses and the strain-energy function a way to determine elastic constants within the second order elasticity theory is shown.

The problem of large elastic deformations for simple extension and symmetrical expansion of a circular cylindrical tube of the above medium is considered. An example of the circular cylindrical tube turned inside out when its deformations are within the limits of correctness of correlations of the second order elasticity theory is given.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Амбарцумян С. А., Хачатрян А. А.* Основные уравнения теории упругости для материалов, разносопротивляющихся растяжению и сжатию. Инж. ж., МТТ, № 2, 1966.

2. *Амбарцумян С. А., Хачатрян А. А.* К разномодульной теории упругости. Инж. ж., МТТ, № 6, 1966.
3. *Матченко Н. М., Толоконников Л. А.* О нелинейных соотношениях разномодульной теории упругости. Сборник работ по теории упругости. Тульский политехнический ин-т, Тула, 1966.
4. *Матченко Н. М., Толоконников Л. А.* О связи между напряжениями и деформациями в разномодульных изотропных средах. Инж. ж., МТТ, № 6, 1968.
5. *Мкртчян Р. Е.* Об одной модели материала, разносопротивляющегося деформациям растяжения и сжатия. Изв. АН АрмССР, Механика, т. XXIII, № 5, 1970.
6. *Грин А., Адкинс Дж.* Большие упругие деформации и нелинейная механика сплошной среды. Изд-во „Мир", М., 1965.
7. Реология, под ред. Ф. Эйриха. ИЛ, 1962, 421—458.
8. *Green A. E., Zerna W.* Theoretical Elasticity. Clarendon Press, Oxford, 1954.
9. *Чобанян К. С., Мкртчян Р. Е.* Общие решения задач конечных упругих деформаций для растяжения, раздувания и кручения составных труб. Изв. АН АрмССР, Механика, т. XX, № 2, 1967.