ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXV. № 1, 1972 Механика

А. А. ХАЧАТРЯН

ЧИСТЫЙ ИЗГИБ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНКИ, ИЗГОТОВЛЕННОЙ ИЗ РАЗНОМОДУЛЬНОГО МАТЕРИАЛА

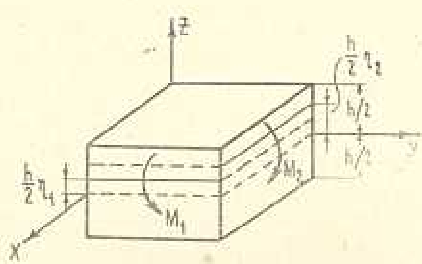
1. Рассмотрим прямоугольную пластинку, находящуюся под действием изгибающих моментов интенсивности $M_x = M_1$ и $M_y = M_2$, равномерно распределенных по ее краям (фиг. 1). Пусть пластинка изготовлена из разномодульного материала [1, 2] с упругими постоянными

$$a_{11} = \frac{1}{E^+}, \quad a_{22} = \frac{1}{E^-}, \quad a_{12} = -\frac{\nu^+}{E^+} = -\frac{\nu^-}{E^-}$$

Под действием указанных на фиг. 1 изгибающих моментов верхние слои пластинки растягиваются, а нижние — сжимаются. Следовательно, нормальные напряжения σ_x и σ_y по толщине пластинки меняют свои знаки, обращаясь в нуль где-то на уровне $z = \frac{h}{2}\eta_1$ и $z = \frac{h}{2}\eta_2$ соответственно.

Для определенности предположим $a_{22} > a_{11}$ $(E^+ > E^-)$. Тогда очевидно, что η_1 и η_2 будут положительными и при $M_1 \neq M_2$ естественно считать, что $\eta_1 \neq \eta_2$. Для изложения удобно будет принять неравенство $\eta_2 > \eta_1$. В дальнейшем мы выясним, при каких соотношениях между моментами M_1 и M_2 это неравенство будет справедливым.

Таким образом, пластинка по толщине делится на следующие три области с различными знаками напряжений σ_x и σ_y:



Фиг. 1.

1) $-\frac{h}{2} < z < \frac{h}{2}\eta_1$ $(\sigma_x < 0,\ \sigma_y < 0)$, 2) $\frac{h}{2}\eta_1 < z < \frac{h}{2}\eta_2$ $(\sigma_x > 0,\ \sigma_y < 0)$,

3) $\frac{h}{2}\eta_2 < z < \frac{h}{2}$ $(\sigma_x > 0,\ \sigma_y > 0)$.

Законы упругости для этих областей будут [1, 2]

$$\begin{aligned} e_x &= a_{22}\sigma_x + a_{12}\sigma_y \\ e_y &= a_{12}\sigma_x + a_{22}\sigma_y \end{aligned} \quad \text{при} \quad -\frac{h}{2} < z < \frac{h}{2}\eta_1$$

$$
\begin{aligned}
e_x &= a_{11}\sigma_x + a_{12}\sigma_y \\
e_y &= a_{12}\sigma_x + a_{22}\sigma_y
\end{aligned}
\qquad \text{при} \quad \frac{h}{2}\eta_1 < z < \frac{h}{2}\eta_2 \tag{1.1}
$$

$$
\begin{aligned}
e_x &= a_{11}\sigma_x + a_{12}\sigma_y \\
e_y &= a_{12}\sigma_x + a_{11}\sigma_y
\end{aligned}
\qquad \text{при} \quad \frac{h}{2}\eta_2 < z < \frac{h}{2}
$$

Принимая гипотезу Кирхгоффа-Лява, для компонент деформации будем иметь

$$
e_x = \varepsilon_1 + z\varkappa_1 \qquad e_y = \varepsilon_2 + z\varkappa_2 \tag{1.2}
$$

где ε_i, $\varkappa_i$ — деформации и изменения кривизн срединной поверхности ($z = 0$) пластинки.

Подставляя (1.2) в (1.1) и решая относительно σ_x и σ_y, получим

$$
\begin{aligned}
\sigma_x &= \frac{a_{22}\varepsilon_1 - a_{12}\varepsilon_2}{a_{22}^2 - a_{12}^2} + z\,\frac{a_{22}\varkappa_1 - a_{12}\varkappa_2}{a_{22}^2 - a_{12}^2} \\
\sigma_y &= \frac{a_{22}\varepsilon_2 - a_{12}\varepsilon_1}{a_{22}^2 - a_{12}^2} + z\,\frac{a_{22}\varkappa_2 - a_{12}\varkappa_1}{a_{22}^2 - a_{12}^2}
\end{aligned}
\qquad \text{при} \quad -\frac{h}{2} < z < \frac{h}{2}\eta_1
$$

$$
\begin{aligned}
\sigma_x &= \frac{a_{22}\varepsilon_1 - a_{12}\varepsilon_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2} + z\,\frac{a_{22}\varkappa_1 - a_{12}\varkappa_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2} \\
\sigma_y &= \frac{a_{11}\varepsilon_2 - a_{12}\varepsilon_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2} + z\,\frac{a_{11}\varkappa_2 - a_{12}\varkappa_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}
\end{aligned}
\qquad \text{при} \quad \frac{h}{2}\eta_1 < z < \frac{h}{2}\eta_2 \tag{1.3}
$$

$$
\begin{aligned}
\sigma_x &= \frac{a_{11}\varepsilon_1 - a_{12}\varepsilon_2}{a_{11}^2 - a_{12}^2} + z\,\frac{a_{11}\varkappa_1 - a_{12}\varkappa_2}{a_{11}^2 - a_{12}^2} \\
\sigma_y &= \frac{a_{11}\varepsilon_2 - a_{12}\varepsilon_1}{a_{11}^2 - a_{12}^2} + z\,\frac{a_{11}\varkappa_2 - a_{12}\varkappa_1}{a_{11}^2 - a_{12}^2}
\end{aligned}
\qquad \text{при} \quad \frac{h}{2}\eta_2 < z < \frac{h}{2}
$$

Эти напряжения должны быть непрерывными по высоте пластинки, то есть они должны удовлетворять следующим условиям:

$$
\sigma_x\Big|_{z=\frac{h}{2}\eta_1-0} = \sigma_x\Big|_{z=\frac{h}{2}\eta_1+0} = 0, \qquad \sigma_y\Big|_{z=\frac{h}{2}\eta_2-0} = \sigma_y\Big|_{z=\frac{h}{2}\eta_2+0} = 0 \tag{1.4}
$$

Удовлетворяя условиям (1.4), находим

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_1 &= -\left[\eta_1\varkappa_1 + a_{12}(\eta_2 - \eta_1)\,\frac{a_{11}\varkappa_2 - a_{12}\varkappa_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}\right]\frac{h}{2} \\
\varepsilon_2 &= -\left[\eta_2\varkappa_2 - a_{12}(\eta_2 - \eta_1)\,\frac{a_{22}\varkappa_1 - a_{12}\varkappa_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}\right]\frac{h}{2}
\end{aligned} \tag{1.5}
$$

Отметим, что при этом непрерывность напряжений σ_y $\left(\text{при } z = \frac{h}{2}\eta_1\right)$ и σ_x $\left(\text{при } z = \frac{h}{2}\eta_2\right)$ обеспечивается автоматически.

С учетом (1.5) выражения для напряжений (1.3) приведем к виду

$$\sigma_x = \frac{a_{22}\varkappa_1 - a_{12}\varkappa_2}{a_{22}^2 - a_{12}^2}\left(z - \frac{h}{2}\eta_1\right)$$

$$\sigma_y = \frac{a_{22}\varkappa_2 - a_{12}\varkappa_1}{a_{22}^2 - a_{12}^2}\left(z - \frac{h}{2}\eta_1\right) - \frac{a_{11}\varkappa_2 - a_{12}\varkappa_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}(\eta_2 - \eta_1)\frac{h}{2}$$

$$\text{при}\quad -\frac{h}{2} < z < \frac{h}{2}\eta_1$$

$$\left.\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{a_{22}\varkappa_1 - a_{12}\varkappa_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}\left(z - \frac{h}{2}\eta_1\right)\\ \sigma_y &= \frac{a_{11}\varkappa_2 - a_{12}\varkappa_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}\left(z - \frac{h}{2}\eta_2\right)\end{aligned}\right\}\quad \text{при}\quad \frac{h}{2}\eta_1 < z < \frac{h}{2}\eta_2 \tag{1.6}$$

$$\sigma_x = \frac{a_{11}\varkappa_1 - a_{12}\varkappa_2}{a_{11}^2 - a_{12}^2}\left(z - \frac{h}{2}\eta_2\right) + \frac{a_{22}\varkappa_1 - a_{12}\varkappa_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}(\eta_2 - \eta_1)\frac{h}{2}$$

$$\sigma_y = \frac{a_{11}\varkappa_2 - a_{12}\varkappa_1}{a_{11}^2 - a_{12}^2}\left(z - \frac{h}{2}\eta_2\right)$$

$$\text{при}\quad \frac{h}{2}\eta_2 < z < \frac{h}{2}$$

Эти напряжения в пластинке вызывают следующие усилия и моменты:

$$\begin{aligned} T_x &= \int \sigma_x dz = 0, \qquad T_y = \int \sigma_y dz = 0 \\ M_x &= \int z\sigma_x dz = M_1, \quad M_y = \int z\sigma_y dz = M_2 \end{aligned} \tag{1.7}$$

где интегрирование производится по всей толщине пластинки.

Подставляя значения напряжений из (1.6) в (1.7), получим следующую систему четырех уравнений относительно неизвестных $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, η_1 и η_2:

$$(a_{22}\varkappa_1 - a_{12}\varkappa_2)\left[\frac{(1+\eta_1)^2}{a_{22}^2 - a_{12}^2} - (\eta_2 - \eta_1)\frac{2 - \eta_1 - \eta_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}\right] -$$

$$- (a_{11}\varkappa_1 - a_{12}\varkappa_2)\frac{(1-\eta_2)^2}{a_{11}^2 - a_{12}^2} = 0$$

$$(a_{11}\varkappa_2 - a_{12}\varkappa_1)\left[\frac{(1-\eta_2)^2}{a_{11}^2 - a_{12}^2} - (\eta_2 - \eta_1)\frac{2 + \eta_1 + \eta_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}\right] -$$

$$- (a_{22}\varkappa_2 - a_{12}\varkappa_1)\frac{(1+\eta_1)^2}{a_{22}^2 - a_{12}^2} = 0 \tag{1.8}$$

$$(a_{22}\varkappa_1 - a_{12}\varkappa_2)\left[\frac{(1+\eta_1)^2(2-\eta_1)}{a_{22}^2-a_{12}^2} + \frac{3(\eta_2-\eta_1)+\eta_1^3-\eta_2^3}{a_{11}a_{22}-a_{12}^2}\right] +$$

$$+ (a_{11}\varkappa_1 - a_{12}\varkappa_2)\frac{(1-\eta_2)^2(2+\eta_2)}{a_{11}^2-a_{12}^2} = \frac{48}{h^3}M_1$$

$$(a_{11}\varkappa_2 - a_{12}\varkappa_1)\left[\frac{(1-\eta_2)^2(2+\eta_2)}{a_{11}^2-a_{12}^2} + \frac{3(\eta_2-\eta_1)+\eta_1^3-\eta_2^3}{a_{11}a_{22}-a_{12}^2}\right] +$$

$$+ (a_{22}\varkappa_2 - a_{12}\varkappa_1)\frac{(1+\eta_1)^2(2-\eta_1)}{a_{22}^2-a_{12}^2} = \frac{48}{h^3}M_2$$

Решение этой системы в общем виде связано с математическими трудностями. Однако, приведенный ниже некоторый качественный анализ вносит полную ясность в решение поставленной задачи.

С помощью первых двух уравнений последние два уравнения системы (1.8) можно представить в виде

$$a_{22}\varkappa_1 - a_{12}\varkappa_2 = \frac{48}{h^3}\frac{M_1}{A_1}$$
$$a_{11}\varkappa_2 - a_{12}\varkappa_1 = \frac{48}{h^3}\frac{M_2}{A_2} \tag{1.9}$$

где

$$A_1 = \frac{4(1+\eta_1)^2}{a_{22}^2-a_{12}^2} + (\eta_2-\eta_1)\left[\frac{(1+\eta_1)^2}{a_{22}^2-a_{12}^2} - \frac{(1-\eta_1)^2}{a_{11}a_{22}-a_{12}^2}\right]$$
$$A_2 = \frac{4(1-\eta_2)^2}{a_{11}^2-a_{12}^2} - (\eta_2-\eta_1)\left[\frac{(1+\eta_2)^2}{a_{11}a_{22}-a_{12}^2} - \frac{(1-\eta_2)^2}{a_{11}^2-a_{12}^2}\right] \tag{1.10}$$

Из (1.9) найдем

$$\varkappa_1 = \frac{48}{(a_{11}a_{22}-a_{12}^2)h^3}\left(a_{11}\frac{M_1}{A_1} + a_{12}\frac{M_2}{A_2}\right)$$
$$\varkappa_2 = \frac{48}{(a_{11}a_{22}-a_{12}^2)h^3}\left(a_{12}\frac{M_1}{A_1} + a_{22}\frac{M_2}{A_2}\right) \tag{1.11}$$

Подставляя теперь значения $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$ из (1.11) в первые два уравнения системы (1.8), получим следующую систему двух уравнений относительно η_1 и η_2:

$$\left[\frac{(1+\eta_1)^2}{a_{22}^2-a_{12}^2} - \frac{(1-\eta_1)^2}{a_{11}a_{22}-a_{12}^2}\right]\frac{M_1}{A_1} + \frac{a_{12}(a_{22}-a_{11})(1-\eta_2)^2}{(a_{11}^2-a_{12}^2)(a_{11}a_{22}-a_{12}^2)}\frac{M_2}{A_2} = 0$$
$$\frac{a_{12}(a_{22}-a_{11})(1+\eta_1)^2}{(a_{22}^2-a_{12}^2)(a_{11}a_{22}-a_{12}^2)}\frac{M_1}{A_1} + \left[\frac{(1+\eta_2)^2}{a_{11}a_{22}-a_{12}^2} - \frac{(1-\eta_2)^2}{a_{11}^2-a_{12}^2}\right]\frac{M_2}{A_2} = 0 \tag{1.12}$$

Система (1.12) является однородной относительно M_1/A_1 и M_2/A_2. Поэтому вместо одного из этих двух уравнений можно взять уравнение, получающееся при приравнивании нулю определителя системы (1.12). Тогда с учетом последнего преобразуется и другое уравнение и окончательно получим следующую систему для определения γ_1 и γ_2:

$$\left[b^2-\left(\frac{1-\gamma_1}{1+\gamma_1}\right)^2\right]\left[\left(\frac{1+\gamma_2}{1-\gamma_2}\right)^2-a^2\right]=c^2$$
$$\gamma_2=\gamma_1+\frac{4ab}{\mu c}\,\frac{b^2-\dfrac{\mu bc}{a}-\left(\dfrac{1-\gamma_1}{1+\gamma_1}\right)^2}{b^2+\dfrac{bc}{\mu a}-\left(\dfrac{1-\gamma_1}{1+\gamma_1}\right)^2} \tag{1.13}$$

Здесь

$$a=\sqrt{\frac{a_{11}a_{22}-a_{12}^2}{a_{11}^2-a_{12}^2}},\qquad b=\sqrt{\frac{a_{11}a_{22}-a_{12}^2}{a_{22}^2-a_{12}^2}}$$
$$c=-\frac{a_{12}(a_{22}-a_{11})}{\sqrt{(a_{11}^2-a_{12}^2)(a_{22}^2-a_{12}^2)}}=\sqrt{a^2b^2-1},\qquad \mu=\frac{M_2}{M_1} \tag{1.14}$$

причем из принятого выше предположения $(a_{22}>a_{11})$ следует, что $a>1$, $b<1$ и $c<1$.

Прежде всего нас интересует существование и единственность решения системы (1.13) в интервале $0<\gamma_1<\gamma_2<1$. Для этого на плоскости γ_1, γ_2 рассмотрим графики функций, выражаемых уравнениями (1.13). Первая представляет собой монотонно убывающую функцию в интервале $\lambda_0<\gamma_1<1$. Учитывая принятое выше предположение $(\gamma_2>\gamma_1)$, можно ограничиться исследованием функций в интервале (λ_0, λ_2), где

$$\lambda_0=\frac{1-b}{1+b},\qquad \lambda_2=\frac{1-\sqrt{b^2-\dfrac{bc}{a}}}{1+\sqrt{b^2-\dfrac{bc}{a}}}<1 \tag{1.15}$$

Вторая представляет собой монотонно возрастающую функцию в интервале $(\lambda_0, 1)$, причем для нее неравенство $\gamma_2>\gamma_1$ выполняется при

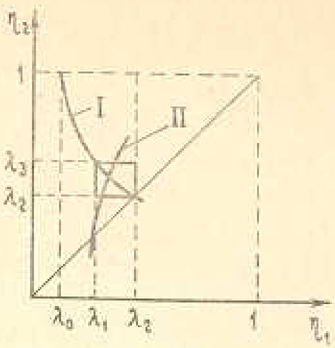
$$\gamma_1>\lambda_1=\frac{1-\sqrt{b^2-\dfrac{\mu bc}{a}}}{1+\sqrt{b^2-\dfrac{\mu bc}{a}}} \tag{1.16}$$

Отсюда можно заключить, что графики рассматриваемых функций могут пересекаться в интервале (λ_0, λ_2), если для λ_1 выполняется неравенство $\lambda_0<\lambda_1<\lambda_2$, причем это пересечение будет единственным. А из этого неравенства следует, что $0<\mu<1$, то есть $M_1>M_2$.

Таким образом, если для материала пластинки $a_{22} > a_{11}$, то при $M_1 > M_2 > 0$ ($\mu < 1$) система (1.13) дает единственное решение, удовлетворяющее неравенству $\eta_2 > \eta_1 > 0$. Это решение заключено в прямоугольнике (фиг. 2), определяемом неравенствами

$$\lambda_1 < \eta_1 < \lambda_2, \qquad \lambda_2 < \eta_2 < \lambda_3 = \frac{\sqrt{a^2 + \frac{ac}{\mu b}} - 1}{\sqrt{a^2 + \frac{ac}{\mu b}} + 1} \tag{1.17}$$

Очевидно, что при $M_2 > M_1 > 0$ и $a_{22} > a_{11}$ будем иметь $\eta_1 > \eta_2 > 0$. Если же $a_{22} < a_{11}$, то при положительных моментах M_1 и M_2 в принятой системе координат η_1 и η_2 будут отрицательными.



Фиг. 2.

Отметим, что для каждого конкретного материала и при заданных значениях моментов из системы (1.13) с любой точностью можно вычислить η_1 и η_2. Далее с помощью приведенных выше формул можно вычислить все интересующие нас величины.

Ниже приведем некоторые частные случаи рассмотренной задачи, которые решаются до конца.

а) $M_1 = M_2 = M$

В этом случае очевидно, что $\eta_1 = \eta_2 = \eta$, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$, $\varkappa_1 = \varkappa_2 = \varkappa$. Поэтому

$$e_x = e_y = \varepsilon + z\varkappa = \varkappa\left(z - \frac{h}{2}\eta\right), \qquad \varepsilon = -\frac{h}{2}\eta\varkappa \tag{1.18}$$

$$\begin{aligned} \sigma_x = \sigma_y &= \frac{\varkappa}{a_{22} + a_{12}}\left(z - \frac{h}{2}\eta\right) \text{ при } -\frac{h}{2} < z < \frac{h}{2}\eta \\ \sigma_x = \sigma_y &= \frac{\varkappa}{a_{11} + a_{12}}\left(z - \frac{h}{2}\eta\right) \text{ при } \frac{h}{2}\eta < z < \frac{h}{2} \end{aligned} \tag{1.19}$$

Вычисляя теперь усилия и моменты, найдем

$$T_x = T_y = -\frac{\varkappa h^2}{8}\left[\frac{(1+\eta)^2}{a_{22} + a_{12}} - \frac{(1-\eta)^2}{a_{11} + a_{12}}\right] = 0 \tag{1.20}$$

$$M_x = M_y = \frac{\varkappa h^3}{48}\left[\frac{(1+\eta)^2(2-\eta)}{a_{22} + a_{12}} + \frac{(1-\eta)^2(2+\eta)}{a_{11} + a_{12}}\right] = M \tag{1.21}$$

С учетом (1.20) уравнение (1.21) можно представить в виде

$$\frac{\varkappa(1+\eta)^2 h^3}{12(a_{22} + a_{12})} = M \tag{1.22}$$

Из (1.20) можно вычислить η

$$\eta=\frac{\sqrt{a_{22}+a_{12}}-\sqrt{a_{11}+a_{12}}}{\sqrt{a_{22}+a_{12}}+\sqrt{a_{11}+a_{12}}} \tag{1.23}$$

Учитывая (1.14), нетрудно показать, что в этом случае значение η (1.23) совпадает с λ_2 (1.15).

Из (1.22), учитывая (1.23), для $\varkappa$ найдем

$$\varkappa=\frac{3M}{h^3}\left(\sqrt{a_{22}+a_{12}}+\sqrt{a_{11}+a_{12}}\right)^2 \tag{1.24}$$

Подставляя теперь найденные значения η и $\varkappa$ в (1.18), для ε получим

$$\varepsilon=-\frac{3M}{2h^2}(a_{22}-a_{11}) \tag{1.25}$$

б) Цилиндрический изгиб бесконечной полосы.

Пусть пластинка, бесконечно длинная по направлению оси y, изгибается моментами $M_x=M$. В этом случае очевидно, что деформации по направлению y отсутствуют ($e_y=0$). Поэтому

$$e_x=\varepsilon_1+z\varkappa_1=\varkappa_1\left(z-\frac{h}{2}\eta\right), \qquad \varepsilon_1=-\frac{h}{2}\eta\varkappa_1 \tag{1.26}$$

$$\begin{aligned}
&\sigma_x=\frac{a_{22}\varkappa_1}{a_{22}^2-a_{12}^2}\left(z-\frac{h}{2}\eta\right), \qquad \sigma_y=-\frac{a_{12}}{a_{22}}\sigma_x \text{ при } -\frac{h}{2}<z<\frac{h}{2}\eta\\
&\sigma_x=\frac{a_{11}\varkappa_1}{a_{11}^2-a_{12}^2}\left(z-\frac{h}{2}\eta\right), \qquad \sigma_y=-\frac{a_{12}}{a_{11}}\sigma_x \text{ при } \frac{h}{2}\eta<z<\frac{h}{2}
\end{aligned} \tag{1.27}$$

Вычисляя усилия и моменты, найдем

$$T_x=-\frac{\varkappa_1 h^2}{8}\left[\frac{a_{22}(1+\eta)^2}{a_{22}^2-a_{12}^2}-\frac{a_{11}(1-\eta)^2}{a_{11}^2-a_{22}^2}\right]=0 \tag{1.28}$$

$$M_x=\frac{\varkappa_1 h^3}{48}\left[\frac{a_{22}(1+\eta)^2(2-\eta)}{a_{22}^2-a_{12}^2}+\frac{a_{11}(1-\eta)^2(2+\eta)}{a_{11}^2-a_{12}^2}\right]=M \tag{1.29}$$

С учетом (1.28) уравнение (1.29) приведем к виду

$$\frac{\varkappa_1(1+\eta)^2 a_{22}h^3}{12(a_{22}^2-a_{12}^2)}=M \tag{1.30}$$

Из (1.28) для η получим

$$\eta=\frac{\sqrt{a_{11}(a_{22}^2-a_{12}^2)}-\sqrt{a_{22}(a_{11}^2-a_{12}^2)}}{\sqrt{a_{11}(a_{22}^2-a_{12}^2)}+\sqrt{a_{22}(a_{11}^2-a_{12}^2)}} \tag{1.31}$$

Из (1.30), учитывая (1.31), имеем

$$\varkappa_1=\frac{3M}{h^3}\left(\sqrt{\frac{a_{22}^2-a_{12}^2}{a_{22}}}+\sqrt{\frac{a_{11}^2-a_{12}^2}{a_{11}}}\right)^2 \tag{1.32}$$

Подставляя найденные значения η и $\varkappa_1$ в (1.26), для ε_1 получим

$$\varepsilon_1 = \frac{3M}{2a_{11}a_{22}h^2}(a_{22}-a_{11})(a_{11}a_{22}+a_{12}^2) \tag{1.33}$$

Вычислив теперь усилия и момент в сечениях, перпендикулярных к оси y, получим

$$T_y = -\frac{3a_{12}(a_{22}-a_{11})}{2a_{11}a_{22}h}M, \quad M_y = -\frac{a_{12}M}{4a_{11}a_{22}}[2(a_{11}+a_{22})+\eta(a_{22}-a_{11})] \tag{1.34}$$

Как видно из формул (1.34), в отличие от обычного материала ($a_{11}=a_{22}$), в этом случае при цилиндрическом изгибе в продольном направлении появляется тангенциальное усилие.

в) Чистый изгиб узкой полосы (балки).

Пусть пластинка по направлению y имеет малую ширину и изгибается моментами $M_x = M$. В этом случае фактически мы имеем дело с изгибом балки и поэтому естественно считать, что в сечениях, перпендикулярных к оси y, напряжения отсутствуют ($\sigma_y = 0$).

Тогда будем иметь

$$e_x = \varepsilon_1 + z\varkappa_1 = \varkappa_1\left(z - \frac{h}{2}\eta\right), \qquad \varepsilon_1 = -\frac{h}{2}\eta\varkappa_1 \tag{1.35}$$

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\varkappa_1}{a_{22}}\left(z-\frac{h}{2}\eta\right) \quad \text{при} \quad -\frac{h}{2}<z<\frac{h}{2}\eta \\ \sigma_x &= \frac{\varkappa_1}{a_{11}}\left(z-\frac{h}{2}\eta\right) \quad \text{при} \quad \frac{h}{2}\eta<z<\frac{h}{2} \end{aligned} \tag{1.36}$$

Вычисляя усилия и моменты, найдем

$$T_x = -\frac{\varkappa_1 h^2}{8}\left[\frac{(1+\eta)^2}{a_{22}} - \frac{(1-\eta)^2}{a_{11}}\right] = 0 \tag{1.37}$$

$$M_x = \frac{\varkappa_1 h^3}{48a_{11}a_{22}}[a_{11}(1+\eta)^2(2-\eta) + a_{22}(1-\eta)^2(2+\eta)] = M \tag{1.38}$$

С учетом (1.37) уравнение (1.38) приведем к виду

$$\frac{\varkappa_1(1+\eta)^2h^3}{12\,a_{22}} = M \tag{1.39}$$

Из (1.37) для η получим

$$\eta = \frac{\sqrt{a_{22}}-\sqrt{a_{11}}}{\sqrt{a_{22}}+\sqrt{a_{11}}} \tag{1.40}$$

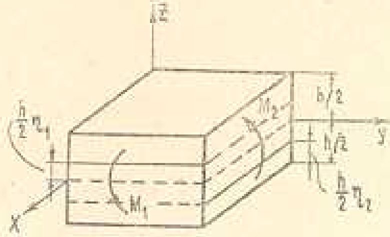
Из (1.39), с учетом (1.40), имеем

$$\varkappa_1 = \frac{3M}{h^3}(\sqrt{a_{22}}+\sqrt{a_{11}})^2 \tag{1.41}$$

Отметим, что формула (1.41) впервые была получена С. П. Тимошенко [3].

2. Рассмотрим изгиб прямоугольной пластинки под действием изгибающих моментов с различными знаками: $M_x = M_1$, $M_y = -M_2$ (фиг. 3).

Следует отметить, что при таком нагружении имеем новую задачу, существенно отличную от предыдущего случая. Однако, ход решения задачи не отличается от предыдущего, в связи с чем некоторые подробности не приводятся.



Фиг. 3.

Здесь также предполагая $a_{22} > a_{11}$, нетрудно заметить, что пластинка по толщине делится на следующие три области с различными знаками напряжений σ_x и σ_y:

1) $-\frac{h}{2} < z < -\frac{h}{2}\eta_2$ $(\sigma_x < 0,\ \sigma_y > 0)$,

2) $-\frac{h}{2}\eta_2 < z < \frac{h}{2}\eta_1$ $(\sigma_x < 0,\ \sigma_y < 0)$, 3) $\frac{h}{2}\eta_1 < z < \frac{h}{2}$ $(\sigma_x > 0,\ \sigma_y < 0)$.

Принимая гипотезу Кирхгоффа-Лява (1.2), законы упругости для этих областей можно привести к виду

$$\sigma_x = \frac{a_{11}\chi_1 - a_{12}\chi_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}\left(z + \frac{h}{2}\eta_2\right) - \frac{a_{22}\chi_1 - a_{12}\chi_2}{a_{22}^2 - a_{12}^2}(\eta_1 + \eta_2)\frac{h}{2}$$

$$\sigma_y = \frac{a_{22}\chi_2 - a_{12}\chi_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}\left(z + \frac{h}{2}\eta_2\right)$$

$$\text{при} \quad -\frac{h}{2} < z < -\frac{h}{2}\eta_2$$

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{a_{22}\chi_1 - a_{12}\chi_2}{a_{22}^2 - a_{12}^2}\left(z - \frac{h}{2}\eta_1\right) \\ \sigma_y &= \frac{a_{22}\chi_2 - a_{12}\chi_1}{a_{22}^2 - a_{12}^2}\left(z + \frac{h}{2}\eta_2\right) \end{aligned}\right. \quad \text{при} \quad -\frac{h}{2}\eta_2 < z < \frac{h}{2}\eta_1 \qquad (2.1)$$

$$\sigma_x = \frac{a_{22}\chi_1 - a_{12}\chi_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}\left(z - \frac{h}{2}\eta_1\right)$$

$$\sigma_y = \frac{a_{11}\chi_2 - a_{12}\chi_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}\left(z - \frac{h}{2}\eta_1\right) + \frac{a_{22}\chi_2 - a_{12}\chi_1}{a_{22}^2 - a_{12}^2}(\eta_1 + \eta_2)\frac{h}{2}$$

$$\text{при} \quad \frac{h}{2}\eta_1 < z < \frac{h}{2}$$

При этом для компонент деформации срединной поверхности пластинки будем иметь

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_1 &= -\left[\gamma_1\varkappa_1 - a_{12}(\gamma_1+\gamma_2)\,\frac{a_{22}\varkappa_2 - a_{12}\varkappa_1}{a_{22}^2 - a_{12}^2}\right]\frac{h}{2}\\
\varepsilon_2 &= \left[\gamma_2\varkappa_2 - a_{12}(\gamma_1+\gamma_2)\,\frac{a_{22}\varkappa_1 - a_{12}\varkappa_2}{a_{22}^2 - a_{12}^2}\right]\frac{h}{2}
\end{aligned}
\tag{2.2}
$$

Вычисляя теперь усилия и моменты и учитывая, что $T_x = T_y = 0$, $M_x = M_1$, $M_y = -M_2$, получим следующую систему четырех уравнений относительно неизвестных $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, γ_1 и γ_2:

$$
\begin{aligned}
&(a_{22}\varkappa_1 - a_{12}\varkappa_2)\left[\frac{(1-\gamma_1)^2}{a_{11}a_{22}-a_{12}^2} - (\gamma_1+\gamma_2)\,\frac{2+\gamma_1-\gamma_2}{a_{22}^2-a_{12}^2}\right] -\\
&\qquad - (a_{11}\varkappa_1 - a_{12}\varkappa_2)\,\frac{(1-\gamma_2)^2}{a_{11}a_{22}-a_{12}^2} = 0\\
&(a_{22}\varkappa_2 - a_{12}\varkappa_1)\left[\frac{(1-\gamma_2)^2}{a_{11}a_{22}-a_{12}^2} - (\gamma_1+\gamma_2)\,\frac{2-\gamma_1+\gamma_2}{a_{22}^2-a_{12}^2}\right] -\\
&\qquad - (a_{11}\varkappa_2 - a_{12}\varkappa_1)\,\frac{(1-\gamma_1)^2}{a_{11}a_{22}-a_{12}^2} = 0\\
&(a_{22}\varkappa_1 - a_{12}\varkappa_2)\left[\frac{(1-\gamma_1)^2(2+\gamma_1)}{a_{11}a_{22}-a_{12}^2} + \frac{3(\gamma_1+\gamma_2)-\gamma_1^3-\gamma_2^3}{a_{22}^2-a_{12}^2}\right] +\\
&\qquad + (a_{11}\varkappa_1 - a_{12}\varkappa_2)\,\frac{(1-\gamma_2)^2(2+\gamma_2)}{a_{11}a_{22}-a_{12}^2} = \frac{48}{h^3}M_1\\
&(a_{22}\varkappa_2 - a_{12}\varkappa_1)\left[\frac{(1-\gamma_2)^2(2+\gamma_2)}{a_{11}a_{22}-a_{12}^2} + \frac{3(\gamma_1+\gamma_2)-\gamma_1^3-\gamma_2^3}{a_{22}^2-a_{12}^2}\right] +\\
&\qquad + (a_{11}\varkappa_2 - a_{12}\varkappa_1)\,\frac{(1-\gamma_1)^2(2+\gamma_1)}{a_{11}a_{22}-a_{12}^2} = -\frac{48}{h^3}M_2
\end{aligned}
\tag{2.3}
$$

С учетом первых двух уравнений последние два уравнения системы (2.3) можно представить в виде

$$
\begin{aligned}
a_{22}\varkappa_1 - a_{12}\varkappa_2 &= \frac{48}{h^3}\,\frac{M_1}{B_1}\\
a_{22}\varkappa_2 - a_{12}\varkappa_1 &= -\frac{48}{h^3}\,\frac{M_2}{B_2}
\end{aligned}
\tag{2.4}
$$

где

$$
\begin{aligned}
B_1 &= \frac{4(1-\gamma_1)^2}{a_{11}a_{22}-a_{12}^2} - (\gamma_1+\gamma_2)\left[\frac{(1+\gamma_1)^2}{a_{22}^2-a_{12}^2} - \frac{(1-\gamma_1)^2}{a_{11}a_{22}-a_{12}^2}\right]\\
B_2 &= \frac{4(1-\gamma_2)^2}{a_{11}a_{22}-a_{12}^2} - (\gamma_1+\gamma_2)\left[\frac{(1+\gamma_2)^2}{a_{22}^2-a_{12}^2} - \frac{(1-\gamma_2)^2}{a_{11}a_{22}-a_{12}^2}\right]
\end{aligned}
\tag{2.5}
$$

Из (2.4) получим

$$\varkappa_1 = \frac{48}{(a_{22}^2 - a_{12}^2)\,h^3}\left(a_{22}\frac{M_1}{B_1} - a_{12}\frac{M_2}{B_2}\right)$$

$$\varkappa_2 = -\frac{48}{(a_{22}^2 - a_{12}^2)\,h^3}\left(a_{22}\frac{M_2}{B_2} - a_{12}\frac{M_1}{B_1}\right) \tag{2.6}$$

Подставляя (2.6) в первые два уравнения системы (2.3), получим

$$\left[\frac{(1+\eta_1)^2}{a_{22}^2 - a_{12}^2} - \frac{(1-\eta_1)^2}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}\right]\frac{M_1}{B_1} + \frac{a_{12}(a_{22}-a_{11})(1-\eta_2)^2}{(a_{11}a_{22}-a_{12}^2)(a_{22}^2-a_{12}^2)}\,\frac{M_2}{B_2} = 0$$

$$\frac{a_{12}(a_{22}-a_{11})(1-\eta_1)^2}{(a_{11}a_{22}-a_{12}^2)(a_{22}^2-a_{12}^2)}\,\frac{M_1}{B_1} + \left[\frac{(1+\eta_2)^2}{a_{22}^2 - a_{12}^2} - \frac{(1-\eta_2)^2}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}\right]\frac{M_2}{B_2} = 0 \tag{2.7}$$

Эта система однородная относительно M_1/B_1 и M_2/B_2.

Поступая аналогично предыдущему случаю, окончательно получим следующую систему для определения η_1 и η_2:

$$\left[\left(\frac{1+\eta_1}{1-\eta_1}\right)^2 - m^2\right]\left[\left(\frac{1+\eta_2}{1-\eta_2}\right)^2 - m^2\right] = n^2 \tag{2.8}$$

$$\eta_1 + \eta_2 = \frac{4m^2}{\mu n}\,\frac{\left(\dfrac{1+\eta_1}{1-\eta_1}\right)^2 - (m^2 + \mu n)}{\left(m^2 + \dfrac{n}{\mu}\right) - \left(\dfrac{1+\eta_1}{1-\eta_1}\right)^2}$$

Здесь

$$m = \sqrt{\frac{a_{22}^2 - a_{12}^2}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}}, \qquad n = -\frac{a_{12}(a_{22}-a_{11})}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}, \qquad \mu = \frac{M_2}{M_1} \tag{2.9}$$

причем, согласно предположению $a_{22} > a_{11}$, имеем $m > 1$, $n < 1$.

На плоскости η_1, η_2 рассмотрим графики функций, выражаемых уравнениями (2.8). Рассмотрим пока случай $\mu < 1$. Здесь можно ограничиться исследованием функций в интервале (ξ_0, ξ_2), где

$$\xi_0 = \frac{\sqrt{m^2 + \mu n} - 1}{\sqrt{m^2 + \mu n} + 1}, \qquad \xi_2 = \frac{\sqrt{m^2 + \dfrac{n}{\mu}} - 1}{\sqrt{m^2 + \dfrac{n}{\mu}} + 1} \tag{2.10}$$

поскольку, как видно из второго уравнения (2.8), только в этом интервале выполняется неравенство $\eta_1 + \eta_2 > 0$.

В указанном интервале первая из (2.8) представляет собой монотонно убывающую функцию, график которой симметрично расположен относительно биссектрисы координатного угла $\eta_2 = \eta_1$ и пересекается с ней при $\eta_1 = \xi_1$

$$\xi_1 = \frac{\sqrt{m^2 + n} - 1}{\sqrt{m^2 + n} + 1} \tag{2.11}$$

Приведем значения этой функции при указанных характерных значениях аргумента

$$\eta_2(\xi_0) = \xi_2, \quad \eta_2(\xi_1) = \xi_1, \quad \eta_2(\xi_2) = \xi_0 \tag{2.12}$$

В рассматриваемом интервале вторая из (2.8) представляет собой (при $\mu < 1$) монотонно возрастающую функцию и при указанных характерных значениях аргумента принимает следующие значения:

$$\eta_2(\xi_0) = -\xi_0, \quad \eta_2(\xi_1) = \frac{4m^2}{n} - \xi_1, \quad \eta_2(\xi_2 - 0) = +\infty \tag{2.13}$$

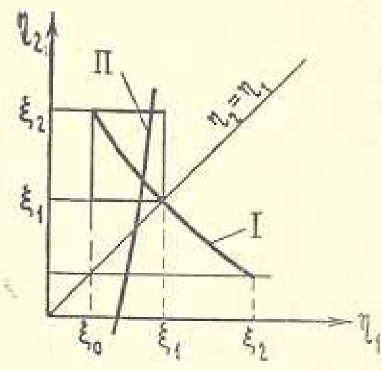
Исходя из (2.9), можно показать, что $m^2 > 2(2+\sqrt{3})n > 7n$. Тогда для $\eta_2(\xi_1)$ (2.13) будем иметь

$$\eta_2(\xi_1) = \frac{4m^2}{n} - \xi_1 > 28 - \xi_1 \gg \xi_1$$

На основании приведенного выше можно заключить, что графики рассматриваемых функций при принятых предположениях пересекаются в интервале (ξ_0, ξ_1).

Таким образом, если для материала пластинки $a_{22} > a_{11}$, то при $M_1 > M_2$ ($\mu < 1$) система (2.8) дает единственное решение, удовлетворяющее неравенству $\eta_2 > \eta_1$. Это решение заключено в прямоугольнике (фиг. 4), определяемом неравенствами

$$\xi_0 < \eta_1 < \xi_1, \quad \xi_1 < \eta_2 < \xi_2$$



Фиг. 4.

Очевидно, что при $M_2 > M_1$ ($\mu > 1$) и $a_{22} > a_{11}$ будем иметь $\eta_1 > \eta_2$.

Рассмотрим частный случай, когда $M_1 = M_2 = M$. В этом случае очевидно, что $\eta_1 = \eta_2 = \eta$. Однако, в отличие от рассмотренных выше частных случаев, здесь по толщине пластинки имеем три области с различными знаками напряжений.

Записывая соответствующие уравнения и соотношения (их не будем приводить), замечаем, что в этом случае

$$\varkappa_1 = -\varkappa_2 = \varkappa, \quad \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon = -\frac{a_{22} - a_{12}}{a_{22} + a_{12}} \varkappa\eta \frac{h}{2}$$

При этом уравнения для определения η и $\varkappa$ существенно упрощаются и мы находим

$$\eta = \frac{\sqrt{m^2+n} - 1}{\sqrt{m^2+n} + 1} = \xi_1, \quad \varkappa = \frac{6M}{h^3}(a_{22} - a_{12}) \frac{(\sqrt{m^2+n} + 1)^2}{2m^2 - n\xi_1}$$

$$\varepsilon = -\frac{3M}{h^2}(a_{22} + a_{12}) \frac{m^2 + n - 1}{2m^2 - n\xi_1}$$

Институт механики
АН Армянской ССР

Поступила 23 XII 1970

Ա. Ա. ԽԱՉԱՏՐՅԱՆ

ՏԱՐԱՄՈԴՈՒԼ ՆՅՈՒԹԻՑ ՊԱՏՐԱՍՏՎԱԾ ՈՒՂՂԱՆԿՅՈՒՆ ՍԱԼԻ ՄԱՔՈՒՐ ԾՌՈՒՄԸ

Ամփոփում

Դիտարկված է տարամոդուլ նյութից պատրաստված ուղղանկյուն սալի ծռման խնդիրը, երբ փոխուղղահայաց եզրերում ազդող մոմենտները միևնույն նշանի են և երբ նրանք նշանով տարբեր են։ Բերված են մի շարք մասնավոր դեպքեր, որոնց համար ստացված են վերջնական բանաձևեր։

PURE BENDING OF A RECTANGULAR PLATE MADE OF HETEROMODULUS MATERIALS

A. A. KHACHATRIAN

Summary

Bending by moments acting on reciprocally perpendicular sides of a rectangular plate made of heteromodulus materials is considered. Some particular cases are presented for which final formulas are obtained.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Амбарцумян С. А., Хачатрян А. А.* Основные уравнения теории упругости для материалов, разносопротивляющихся растяжению и сжатию. Инж. ж., МТТ, № 2, 1966.
2. *Амбарцумян С. А., Хачатрян А. А.* К разномодульной теории упругости. Инж. ж., МТТ, № 6, 1966.
3. *Тимошенко С. П.* Сопротивление материалов, ч. I. Госиздат, М.-Л., 1933.