ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

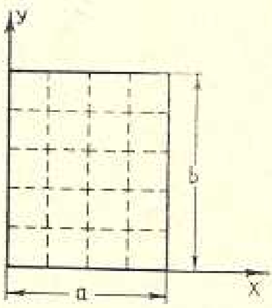
Մեխանիկա XXIV, № 6, 1971 Механика

Ю. М. ПОЧТМАН

ПРОЕКТИРОВАНИЕ РЕБРИСТЫХ ПЛАСТИН МИНИМАЛЬНОГО ВЕСА, ИМЕЮЩИХ ЗАДАННЫЕ СОБСТВЕННЫЕ ЧАСТОТЫ

При проектировании упругих пространственных систем в авиа- и судостроении и строительстве часто ставится требование, чтобы частоты собственных колебаний конструкций не были ниже некоторого предельно допустимого значения (например, с целью предотвращения резонанса, флаттера и т. д.) и, одновременно, полная масса (или вес) конструкции была бы минимальной. Такая постановка задачи применительно к одномерным конструкциям обсуждалась в работе [1]. В данной работе проблема выбора оптимальных параметров для некоторых континуальных систем (пластин, усиленных ребрами жесткости) при колебаниях рассматривается, насколько нам известно, впервые и в самой общей постановке, как задача математического программирования [2]. В качестве аппарата для исследования с помощью ЭЦВМ применяется один из современных методов оптимизации—метод случайного поиска [3], который постепенно находит свое применение в задачах механики деформируемых тел [4, 5, 6].

1. Рассмотрим прямоугольную пластину (фиг. 1), подкрепленную перекрестными ребрами и свободно опертую по контуру. Известны размеры пластины в плане, характеристики материала пластины: модуль упругости E, коэффициент Пуассона ν, плотность на единицу поверхности ρ. Нужно найти такие размеры поперечных сечений ребер h_{p_x}, h_{p_y}, δ_x и δ_y (параллельных соответственно координатным осям x и y), количество их r и p, а также толщину плиты h, чтобы основная частота собственных колебаний ω не превышала заданного значения ω_*, а полная масса пластины G достигала минимума. Описанная проблема математически сводится к нахождению минимума функции массы всей плиты



Фиг. 1.

$$G_{\min} = \rho\,(abh + r\delta_x h_{p_x} a + p\delta_y h_{p_y} b) \tag{1}$$

при условиях:

$$\frac{B_1\pi^4}{\omega_*^2 b^3 q_1}\,\frac{1+\dfrac{r+1}{p+1}\mu^3\dfrac{B}{B_1}+\dfrac{aD}{B(p+1)}(\mu^2+1)^2}{1+\dfrac{r+1}{p+1}\dfrac{q}{q_1}+\dfrac{G_{\text{пл}}}{(p+1)q_1}}\geqslant\lambda \tag{2}$$

$$\delta_x^{\min}\leqslant\delta_x\leqslant\delta_x^{\max},\quad \delta_y^{\min}\leqslant\delta_y\leqslant\delta_y^{\max},\quad h_{p_x}^{\min}\leqslant h_{p_x}\leqslant h_{p_x}^{\max} \tag{3}$$

$$h_{p_y}^{\min}\leqslant h_{p_y}\leqslant h_{p_y}^{\max},\quad h^{\min}\leqslant h\leqslant h^{\max} \tag{4}$$

r и p — целые числа,

где D — цилиндрическая жесткость плиты; $B=\dfrac{Eh_{p_x}^3\delta_x}{12}$ и $B_1=\dfrac{Eh_{p_y}^3\delta_y}{12}$ — жесткости ребер, параллельных осям x и y соответственно; $q=\rho a h_{p_x}\delta_x$, $q_1=\rho b h_{p_y}\delta_y$ — массы этих ребер; $G_{\text{пл}}=\rho abh$ — масса плиты; $\mu=\dfrac{b}{a}$ и $\lambda=\left(\dfrac{\omega}{\omega_*}\right)^2$. Условие (2) — ограничение по частоте основного тона собственных колебаний [7], условие (3) ограничивает габариты плиты и ребер, а условие (4) — требование целочисленности.

Задача (1)—(4) выбора оптимальных параметров ребристой пластины может быть поставлена как задача частично целочисленного нелинейного программирования, которая, как известно, в общем виде состоит в отыскании вектора в n-мерном эвклидовом пространстве

$$X=(x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n)\in R \tag{5}$$

минимизирующего некоторую функцию:

$$\Phi=\Phi(x_1,\ x_2,\dots,\ x_n) \tag{6}$$

и удовлетворяющего ограничениям

$$g_k(X)\{\geqslant,\ =,\ \leqslant\}\,b_k\qquad(k=1,\ 2,\dots,\ m) \tag{7}$$

$$x_1\geqslant 0;\ x_2\geqslant 0;\ \dots;\ x_n\geqslant 0;\ x_\eta\text{ — целые числа},\ \eta\in R_1$$

где R — допустимое множество, а множество R_1 содержит не все η. Нелинейные функции $g_k(X)$ известны, b_k — заданные постоянные величины, а m и n между собой не связаны.

Используя обозначения: $h=x_1$, $h_{p_x}=x_2$, $h_{p_y}=x_3$, $\delta_x=x_4$, $\delta_y=x_5$, $r=x_6$, $p=x_7$, $\dfrac{E\pi^4}{12\,b^4\rho\omega_*^2}=A$, $\dfrac{a(\mu^2+1)^2}{1-\nu^2}=C$ и подставляя их в (1)—(4), получаем задачу, аналогичную задаче (5)—(7) нелинейного программирования (для $n=7$): найти неотрицательные значения переменных x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 и x_7, которые минимизируют функцию

$$G_{\min}=\rho(abx_1+ax_2x_4x_6+bx_3x_5x_7) \tag{8}$$

и удовлетворяют наложенным ограничениям:

$$Ax_3^2 \frac{1 + \mu^3 \dfrac{x_8+1}{x_7+1} \dfrac{x_2^3 x_4}{x_3^3 x_5} + C \dfrac{x_1^3}{x_3^3 x_5 (x_7+1)}}{1 + \dfrac{a}{b} \dfrac{x_8+1}{x_7+1} \dfrac{x_2 x_4}{x_3 x_5} + a \dfrac{x_1}{x_3 x_5 (x_7+1)}} > \lambda$$

$$\delta_x^{\min} \leqslant x_4 \leqslant \delta_x^{\max}, \quad \delta_y^{\min} \leqslant x_5 \leqslant \delta_y^{\max}, \quad h_{p_x}^{\min} \leqslant x_2 \leqslant h_{p_x}^{\max} \qquad (9)$$

$h_{p_y}^{\min} \leqslant x_3 \leqslant h_{p_y}^{\max}$, $h^{\min} \leqslant x_1 \leqslant h^{\max}$, x_8 и x_7 — целые числа.

2. Задача математического программирования подобного типа, с нелинейными ограничениями, могут быть успешно решены только современными методами оптимизации, с использованием ЭЦВМ. Будем применять один из наиболее эффективных методов случайного поиска — пропорциональный алгоритм покоординатного самообучения с забыванием [3]. Реализация на ЭЦВМ этого алгоритма начинается в обстановке равновероятного поиска. Из некоторой точки $X_i \in R$ в пространстве параметров делается шаг в случайном направлении. В том случае, если в новом состоянии $\Phi(X_{i+1}) < (\Phi X_i)$, то следующий случайный шаг производится из состояния X_{i+1}; в противном случае следующий случайный шаг система поиска делает из первоначального состояния. Координаты вектора X меняются так:

$$x_{i+1} = x_j + \Delta x_{i+1}$$

$$\Delta x_{i+1} = c\Xi_i \qquad (10)$$

$$x_j = x_i, \quad \text{если } \Phi(x_i) < \Phi_i^*$$

где c — длина рабочего шага по параметру; Ξ — реализация случайного вектора; x_j — оптимальное значение параметров за j предыдущих шагов; Φ_j^* — минимальное значение целевой функции за j предыдущих шагов.

В процессе поиска его вероятностные характеристики перестраиваются, то есть на вектор Ξ оказывается целенаправленное воздействие. Вектор Ξ уже перестает быть равновероятным и в результате самообучения приобретает определенное преимущество в направлении наилучшего шага. Составляющая вектора Ξ определяется из соотношения

$$\xi_i = \alpha_i + (\beta_i - \alpha_i)\, x_{\text{псч}} \qquad (11)$$

где ξ_i — случайное число, равномерно распределенное на отрезке $[\alpha_i, \beta_i]$; $x_{\text{псч}}$ — псевдослучайное число, равномерно распределенное на отрезке [0, 1]. Пусть вероятность выбора положительного шага вдоль i-ой переменной p_i является линейной функцией некоторого параметра $w_i^{(N)}$, который назовем параметром памяти по i-й координате на N-ом шаге поиска:

$$p_i^{(N)} = 0.5\,(w_{i-1}^{(N)} + 1) \tag{12}$$

тогда

$$\alpha = \begin{cases} -1 & , \text{ если } \ p_i < 0.5 \\ -1 + (p_i - 0.5)\cdot 2, & \text{если } \ p_i \leqslant 0.5 \end{cases}$$

$$\beta = \begin{cases} 1 & , \text{ если } \ p_i \geqslant 0.5 \\ 1 + (p_i - 0.5)\cdot 2, & \text{если } \ p_i < 0.5 \end{cases} \tag{13}$$

Алгоритм обучения с забыванием можно представить в виде следующей рекуррентной зависимости [3]:

$$w_i^{(N+1)} = Kw_i^{(N)} - \psi \Delta x_i^{(N)} \Delta \Phi_N; \quad (|w_i^{(N)}| < 1) \tag{14}$$

где $\psi > 0$ — величина, определяющая скорость обучения; $0 \leqslant K \leqslant 1$ — параметр забывания. Смысл выражения (14) состоит в следующем: увеличение вектора памяти $w_i^{(N+1)}$ возможно при положительной величине $\Delta x_i^{(N)}$ (успех поиска определяется отрицательным значением приращения $\Delta\Phi_N$). В свою очередь, увеличение $w_i^{(N)}$ приводит к увеличению вероятности удачного шага $(p_i > 0.5)$, а значит и вероятности того, что приращение по координате $\Delta x_i^{(N)}$ будет положительным. При значениях $\psi \gg 0$ в начале поиска вектор памяти будет приобретать значение, равное 1 (в течение нескольких первых шагов), затем поиск детерминируется и в течение нескольких шагов спуск к цели осуществляется с максимальной вероятностью. В районе цели или возле ограничения система самонастраивается: шаг поиска и величины $\Delta\Phi_N$ и $\Delta x_i^{(N)}$ уменьшаются, а влияние второго члена в (14) становится незначительным. Это приводит к тому, что система „теряет опыт", вектор памяти начинает уменьшаться до нуля, то есть до равновероятного состояния. Уменьшение вероятности сделать положительный шаг в том же направлении, что и раньше, позволяет системе перестроить направление поиска на лучшее. Вдоль этого лучшего направления система вновь начинает обучаться до тех пор, пока позволяет значение вектора памяти. Учет целочисленности части переменных в (9) при использовании описанного алгоритма состоит в том, что округление целочисленной компоненты вектора X_i осуществляется в момент, предшествующий собственно решению задачи, до проверки принадлежности точки X_i области допустимых решений. В дальнейшем поиск выполняется с учетом целочисленности переменных.

3. В качестве иллюстрации рассмотрим определение оптимальных размеров пластины по фиг. 1, для различных значений параметра λ при следующих данных: $E = 2.1\cdot 10^9$ *кг/м²*; $\nu = 0.167$; $\rho = 244.0$ *кгсек²/м⁴*, $\omega_* = 186.0$ 1/*сек.*; $a = 5.0$ *м*; $b = 9.0$ *м*. Ограничения на варьируемые параметры принимались следующими (в *м*): $0.05 \leqslant h \leqslant 0.1$; $0.1 \leqslant h_{p_x} \leqslant 0.5$; $0.1 \leqslant h_{p_y} \leqslant 0.5$; $0.05 \leqslant \delta_x \leqslant 0.25$; $0.05 \leqslant \delta_y \leqslant 0.25$, а $1.0 \leqslant r \leqslant 10.0$

и $1.0 \leqslant p \leqslant 10.0$. Задача решалась на ЭЦВМ „Мир" с использованием стандартной программы получения псевдослучайных чисел, равномерно распределенных на отрезке. Решение отыскивалось в гиперкубе с нормализованными координатами $y_i (0 \leqslant y_i \leqslant 1.0;\ i = 1,2,...,7)$. Переход к ненормализованным координатам осуществлялся следующим образом: $x_i = y_i \Delta x_i + x_i^{\min}$. В соответствии с физическим смыслом задачи в качестве исходной выбиралась точка с координатами: $x_1 = 0.1$; $x_2 = x_3 = 0.5$; $x_4 = x_5 = 0.25$; $x_6 = x_7 = 10$, что соответствует нормализованным координатам: $y_1 = y_2 = y_3 = y_4 = y_5 = y_6 = y_7 = 1.0$. Исходный рабочий шаг по координате принимался $c = 0.2$, затем он дробился до $c/32$. Алгоритм (14) реализовывался при параметрах поиска $K = 0.8$ и $\psi = 50.0$. Результаты решения (искомые оптимальные размеры пластины) для некоторых λ приведены в таблице.

Таблица

Значения переменных и массы / λ	h (м)	h_{px} (м)	h_{py} (м)	δ_x (м)	δ_y (м)	r	p	$G_{\min}$ (кг)
0.21	0.05	0.5	0.10	0.105	0.062	2	1	692.46
0.23	0.05	0.5	0.158	0.118	0.05	3	1	732.85
0.25	0.05	0.5	0.195	0.084	0.051	4	1	776.96
0.27	0.05	0.5	0.16	0.066	0.05	6	1	810.75

В заключение отметим, что предлагаемый способ может быть использован также для оптимального проектирования ребристых пластин при других граничных условиях и очертаниях в плане.

Днепропетровский инженерно-строительный институт

Поступила 4 XII 1970

Յու. Մ. ՊՈՉՏՄԱՆ

ՏՐՎԱԾ ՍԵՓԱԿԱՆ ՀԱՃԱԽԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐՆ ՈՒՆԵՑՈՂ, ԿՈՂԵՐՈՎ ՕԺՏՎԱԾ ՓՈՔՐԱԳՈՒՅՆ ԿՇՌՈՎ ՍԱԼԵՐԻ ՆԱԽԱԳԾՈՒՄԸ

Ամփոփում

Դիտարկվում է խաչաձև կոշտության կողերով ամրացված առաձգական սալերի լավագույն նախագծումը տատանումների դեպքում։

Խնդիրը ձևակերպվում է մասամբ ամբողջաթիվ ոչ գծային ծրագրավորման տերմիններով, որտեղ նպատակային ֆունկցիան է սալի կշռի մինիմումը, իսկ սահմանափակումներ են հանդիսանում՝ պայմանը, որի դեպքում սալի սեփական տատանումների հիմնական հաճախականությունը չի գերազանցում ինչ որ մեծությանը և երկրաչափական սահմանափակումները չափերի վրա։

Հաշվիչ մեքենաների օգնությամբ հետազոտության համար որպես մաթեմատիկական ապարատ կիրառվում է պատահական փնտրման մեթոդը։ Բերվում են թվային օրինակներ։

DESIGN OF MINIMUM WEIGHT RIB PLATES WITH SPECIFIED NATURAL FREQUENCIES

Yu. M. POCHTMAN

Summary

The optimal design of elastic plates, crossed with rigidity ribs at vibration is considered. The problem is formulated in terms of partly whole numbers of nonlinear programming, where the minimum weight of plates is the purpose function, and the restrictions are the condition, at which the basic frequency of natural vibration of plates will not exceed a certain quantity, as well as geometrical restrictions on sizes. The random search, as the mathematical medium for investigation by means of a digital computer is used. The numerical examples are given.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Turner M. J.* Design of Minimum Mass Structures with Specified Natural Frequencies. AJAA Journal, vol. 5. № 3, 1967.
2. *Корбут А. А., Финкельштейн Ю. Ю.* Дискретное программирование. Изд. Наука, 1968.
3. *Растригин Л. А.* Статистические методы поиска. Изд. Наука, 1968.
4. *Фрайнт М. Я.* Применение метода случайного поиска к задачам оптимального проектирования. Строительная механика и расчет сооружений. № 1, 1970.
5. *Почтман Ю. М., Филатов Г. В.* Исследование деформаций гибких стержней методом статистических испытаний. Строительная механика и расчет сооружений. № 5, 1970.
6. *Почтман Ю. М., Філатов Г. В.* Розрахунок циліндричних оболонок мінімальної ваги методом випадкового пошуку з самонавчанням. Докл. АН УРСР, сер. А, № 12, 1970.
7. *Филиппов А. П.* Колебания деформируемых систем. Изд. Машиностроение, 1970.