ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXIV, № 6, 1971 Механика

Г. А. МОВСИСЯН

К ОПРЕДЕЛЕНИЮ КРИТИЧЕСКИХ УСИЛИЙ ПОТЕРИ УСТОЙЧИВОСТИ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ПЛАСТИН ПРИ СМЕШАННЫХ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ

Настоящая работа посвящена определению критического усилия потери устойчивости равномерно сжатой в одном направлении прямоугольной пластинки при следующих граничных условиях: стороны, к которым приложены усилия, свободно оперты, а на двух других сторонах заданы смешанные условия. Формы выпучивания пластинки ищутся в виде рядов Фурье. Для определения постоянных интегрирования получаются парные ряды-уравнения, которые приводятся к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений. Критические значения усилий определяются из условия приравнивания нулю определителя этой системы.

Доказывается сходимость процесса итераций.

Насколько нам известно, ранее были рассмотрены задача изгиба прямоугольной пластинки со смешанными условиями [1], а также задача свободных колебаний [2].

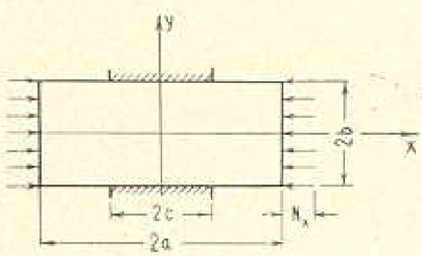
1. Уравнение устойчивости пластинки берем в виде

$$D\nabla^2\nabla^2 w + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \qquad (1.1)$$

где сохранены обозначения [3].

Имеем следующие граничные условия (фиг. 1):

$$w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad \text{при} \quad x = \pm a \quad (1.2)$$



Фиг. 1.

$$\left.\begin{aligned} w &= \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \quad \text{при} \quad -c \leqslant x \leqslant c \\ w &= \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad \text{при} \quad \begin{matrix} -a \leqslant x < -c \\ c < x \leqslant a \end{matrix} \end{aligned}\right\} \quad \text{при } y = \pm b \qquad (1.3)$$

Решение (1.1) ищем в виде

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} f_m(y) \sin \frac{m\pi (x+a)}{2a} \qquad (1.4)$$

удовлетворяющее условиям (1.2). Представляя (1.4) в виде

$$w = w_1 + w_2 \tag{1.5}$$

где

$$w_1 = \sum_{m=1}^{\infty} f_m(y) \sin \frac{m\pi}{a} x \tag{1.6}$$

$$w_2 = \sum_{m=0}^{\infty} f_m(y) \cos \frac{(2m+1)\pi}{2a} x \tag{1.7}$$

соответственно представляют два возможных случая формы потери устойчивости относительно оси y: антисимметричный и симметричный, будем рассматривать каждый из них в отдельности.

2. *Антисимметричный случай.* Подставив (1.6) в уравнение (1.1), для определения функции $f_m(y)$ получим следующее дифференциальное уравнение:

$$f_m^{IV}(y) - 2\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 f_m^{II}(y) + \left[\left(\frac{m\pi}{a}\right)^4 - N_x\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2\right] f_m(y) = 0 \tag{2.1}$$

Общее решение (2.1) будет

$$f_m(y) = A_m^{(1)} \operatorname{ch} k_1 y + A_m^{(2)} \cos k_2 y + A_m^{(3)} \operatorname{sh} k_1 y + A_m^{(4)} \sin k_2 y \tag{2.2}$$

где

$$k_1 = \sqrt{\frac{m\pi}{a}\sqrt{\frac{N_x}{D}} + \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2}, \quad k_2 = \sqrt{\frac{m\pi}{a}\sqrt{\frac{N_x}{D}} - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2} \tag{2.3}$$

Удовлетворяя граничным условиям (1.3), для коэффициентов $A_m^{(2)}$ и $A_m^{(4)}$ получим следующие системы уравнений:

$$\begin{aligned}
&\sum_{m=1}^{\infty} A_m^{(2)} (k_1 \operatorname{th} k_1 b \cos k_2 b + k_2 \sin k_2 b) \sin \frac{m\pi}{a} x = 0 \qquad (0 \leqslant x \leqslant c) \\
&\sum_{m=1}^{\infty} A_m^{(2)} (k_1^2 + k_2^2) \cos k_2 b \sin \frac{m\pi}{a} x = 0 \qquad (c < x \leqslant a)
\end{aligned} \tag{2.4}$$

$$\begin{aligned}
&\sum_{m=1}^{\infty} A_m^{(4)} (k_1 \operatorname{cth} k_1 b \sin k_2 b - k_2 \cos k_2 b) \sin \frac{m\pi}{a} x = 0 \qquad (0 \leqslant x \leqslant c) \\
&\sum_{m=1}^{\infty} A_m^{(4)} (k_1^2 + k_2^2) \sin k_2 b \sin \frac{m\pi}{a} x = 0 \qquad (c < x \leqslant a)
\end{aligned} \tag{2.5}$$

причем

$$A_m^{(1)} = -A_m^{(2)} \frac{\cos k_2 b}{\operatorname{ch} k_1 b}, \qquad A_m^{(3)} = -A_m^{(4)} \frac{\sin k_2 b}{\operatorname{sh} k_1 b} \tag{2.6}$$

Учитывая, что наименьшее значение N_x получается в случае симметрии по отношению к оси x [3], в дальнейшем будем рассматривать систему (2.4). В то же время следует отметить, что все исследования, которые будут проведены для системы (2.4), совершенно аналогичным образом можно распространить на (2.5).

В системе (2.4) заменив

$$k_1^2 + k_2^2 = 2\frac{m\pi}{a}\sqrt{\frac{N_x}{D}} \tag{2.7}$$

и введя обозначения

$$\begin{gathered} X_m = A_m^{(2)}\sqrt{N_x}\cos k_2 b \\ \varphi = \frac{\pi}{a}x, \quad \beta = \frac{\pi}{a}c \end{gathered} \tag{2.8}$$

получим

$$\begin{gathered} \sum_{m=1}^{\infty} X_m \frac{k_1 \operatorname{th} k_1 b + k_2 \operatorname{tg} k_2 b}{\sqrt{N_x}} \sin m\varphi = 0 \quad (0 \leqslant \varphi \leqslant \beta) \\ \sum_{m=1}^{\infty} m X_m \sin m\varphi = 0 \quad (\beta < \varphi \leqslant \pi) \end{gathered} \tag{2.9}$$

Производя некоторые преобразования, систему (2.9) приведем к виду

$$\begin{gathered} \sum_{m=1}^{\infty} X_m (1 - N_m) \sin m\varphi = 0 \qquad (0 \leqslant \varphi \leqslant \beta) \\ \sum_{m=1}^{\infty} m X_m \sin m\varphi = 0 \qquad (\beta < \varphi \leqslant \pi) \end{gathered} \tag{2.10}$$

где

$$N_m = 1 - \sqrt{\frac{D}{N_x}}(k_1 \operatorname{th} k_1 b + k_2 \operatorname{tg} k_2 b) \tag{2.11}$$

Имея в виду, что $\operatorname{tg} ix = i \operatorname{th} x$, можно показать, что при $m \to \infty$ N_m имеет порядок

$$N_m = \frac{\alpha}{m^2} + 0\left(\frac{1}{m^3}\right) \tag{2.12}$$

где

$$\alpha = \frac{1}{8}\frac{a^2}{\pi^2}\frac{N_x}{D} \tag{2.13}$$

Продифференцируем первое уравнение (2.10), умножим на $\cos\varphi/2 \times$ $\times (\cos\varphi - \cos\theta)^{-1/2}$, а затем проинтегрируем по φ от 0 до θ. Второе уравнение (2.10) умножим на $\cos\varphi/2(\cos\theta-\cos\varphi)^{-1/2}$ и проинтегрируем по φ от θ до π. После перечисленных преобразований, используя формулы для интегральных представлений полиномов Лежандра [4]

$$y_m(\cos\theta)=P_{m-1}(\cos\theta)+P_m(\cos\theta)=\frac{2\sqrt{2}}{\pi}\int_0^\theta\frac{\cos m\varphi\cos\varphi/2\,d\varphi}{(\cos\varphi-\cos\theta)^{1/2}}=$$

$$=\frac{2\sqrt{2}}{\pi}\int_\theta^\pi\frac{\sin m\varphi\cos\varphi/2\,d\varphi}{(\cos\theta-\cos\varphi)^{1/2}}$$

$$z_m(\cos\theta)=P_{m-1}(\cos\theta)-P_m(\cos\theta)=\frac{2\sqrt{2}}{\pi}\int_0^\theta\frac{\sin m\varphi\sin\varphi/2\,d\varphi}{(\cos\varphi-\cos\theta)^{1/2}}=\tag{2.14}$$

$$=\frac{2\sqrt{2}}{\pi}\int_\theta^\pi\frac{\cos m\varphi\sin\varphi/2\,d\varphi}{(\cos\theta-\cos\varphi)^{1/2}}$$

парные ряды-уравнения приведем к следующему виду:

$$\sum_{m=1}^{\infty}mX_m(1-N_m)y_m(\cos\theta)=0\quad(0\leqslant\theta\leqslant\beta)$$

$$\sum_{m=1}^{\infty}mX_m\,y_m(\cos\theta)=0\quad(\beta<\theta\leqslant\pi)\tag{2.15}$$

Из (2.15) для определения коэффициентов X_m согласно [5] получим следующую бесконечную систему линейных алгебраических уравнений:

$$X_n=\sum_{m=1}^{\infty}a_{nm}X_m\quad(n=1,2,3,\dots)\tag{2.16}$$

где введены следующие обозначения:

$$a_{nm}=\frac{mN_m}{2}\int_0^\beta y_m(\cos\theta)\,y_n(\cos\theta)\,\mathrm{tg}\frac{\theta}{2}\,d\theta=$$

$$=\frac{mN_m}{2}\,\frac{ny_m(\cos\beta)\,z_n(\cos\beta)-my_n(\cos\beta)\,z_m(\cos\beta)}{n^2-m^2}\tag{2.17}$$

$$a_{nn}=\frac{nN_n}{2}\int_0^\beta y_n^2(\cos\theta)\,\mathrm{tg}\frac{\theta}{2}\,d\theta=\frac{N_n}{4}\Big\{2-2P_{n-1}(\cos\beta)\,P_n(\cos\beta)+$$

$$+P_{n-1}^2(\cos\beta)-P_n^2(\cos\beta)-4\sum_{k=1}^{n-1}P_k(\cos\beta)\left[\cos\beta P_k(\cos\beta)-P_{k+1}(\cos\beta)\right]\Big\}$$

Для существования ненулевых решений для коэффициентов X_n необходимо, чтобы определитель системы уравнений

$$X_n - \sum_{m=1}^{\infty} a_{nm} X_m = 0 \qquad (n=1, 2, 3, \ldots) \tag{2.18}$$

равнялся нулю. Воспользовавшись этим условием, найдем критические значения N_x.

Доказательство процесса итераций будет совершенно аналогичным доказательству [2].

3. *Симметричный случай.* Подставив (1.7) в (1.1), для $f_m(y)$ получим следующее выражение:

$$f_m(y) = B_m^{(1)} \operatorname{ch} s_1 y + B_m^{(2)} \cos s_2 y + B_m^{(3)} \operatorname{sh} s_1 y + B_m^{(4)} \sin s_2 y \tag{3.1}$$

где

$$\begin{aligned} s_1 &= \sqrt{\frac{(2m+1)\pi}{2a}\sqrt{\frac{N_x}{D}} + \frac{(2m+1)^2\pi^2}{4a^2}} \\ s_2 &= \sqrt{\frac{(2m+1)\pi}{2a}\sqrt{\frac{N_x}{D}} - \frac{(2m+1)^2\pi^2}{4a^2}} \end{aligned} \tag{3.2}$$

Из граничных условий (1.3) получаем следующие системы уравнений:

$$\begin{aligned} &\sum_{m=0}^{\infty} B_m^{(2)} (s_1 \operatorname{th} s_1 b \cos s_2 b + s_2 \sin s_2 b) \cos \frac{(2m+1)\pi}{2a} x = 0 \quad (0 \leqslant x \leqslant c) \\ &\sum_{m=0}^{\infty} B_m^{(2)} (s_1^2 + s_2^2) \cos s_2 b \cos \frac{(2m+1)\pi}{2a} x = 0 \quad (c < x \leqslant a) \end{aligned} \tag{3.3}$$

$$\begin{aligned} &\sum_{m=0}^{\infty} B_m^{(4)} (s_1 \operatorname{cth} s_1 b \sin s_2 b - s_2 \cos s_2 b) \cos \frac{(2m+1)\pi}{2a} x = 0 \quad (0 \leqslant x \leqslant c) \\ &\sum_{m=0}^{\infty} B_m^{(4)} (s_1^2 + s_2^2) \sin s_2 b \cos \frac{(2m+1)\pi}{2a} x = 0 \quad (c < x \leqslant a) \end{aligned} \tag{3.4}$$

$$B_m^{(1)} = - B_m^{(2)} \frac{\cos s_2 b}{\operatorname{ch} s_1 b}, \qquad B_m^{(3)} = - B_m^{(4)} \frac{\sin s_2 b}{\operatorname{sh} s_1 b} \tag{3.5}$$

Как и в антисимметричном случае, здесь также будем рассматривать систему (3.3).

Систему (3.3) можно привести к виду

$$\begin{aligned} &\sum_{m=0}^{\infty} Z_m (1 - N_m^*) \cos\left(m + \frac{1}{2}\right)\varphi = 0 \qquad (0 \leqslant \varphi \leqslant \beta) \\ &\sum_{m=0}^{\infty} \left(m + \frac{1}{2}\right) Z_m \cos\left(m + \frac{1}{2}\right)\varphi = 0 \quad (\beta < \varphi \leqslant \pi) \end{aligned} \tag{3.6}$$

где

$$Z_m = B_m^{(2)} \sqrt{N_x} \cos s_2 b$$

$$\varphi = \frac{\pi}{a} x, \quad \beta = \frac{\pi}{a} c \tag{3.7}$$

$$N_m^* = 1 - \sqrt{\frac{D}{N_x}} (s_1 \operatorname{th} s_1 b + s_2 \operatorname{tg} s_2 b)$$

Заметим, что N_m^* будет иметь такой же порядок, что и N_m, то есть

$$N_m^* = \frac{\alpha}{m^2} + 0\left(\frac{1}{m^3}\right) \tag{3.8}$$

Согласно [6] решения парных рядов-уравнений (3.6) получаются в следующем виде:

$$Z_n = -\frac{2n+1}{2} \sum_{m=0}^{\infty} Z_m N_m^* \int_0^{\beta} P_n(\cos\theta) P_m(\cos\theta)\, d\cos\theta +$$

$$+ \frac{2n+1}{\pi\sqrt{2}} \sum_{m=0}^{\infty} Z_m (-1)^m \int_{\beta}^{\pi} P_n(\cos\theta) \sin\theta d\theta \int_{\theta}^{\pi} \frac{d\varphi}{(\cos\theta - \cos\varphi)^{1/2}} \tag{3.9}$$

$$(n = 0, 1, 2, \ldots)$$

Учитывая, что

$$\int_{\theta}^{\pi} \frac{d\varphi}{(\cos\theta - \cos\varphi)^{1/2}} = \frac{\pi\sqrt{2}}{2} P_{-1/2}(-\cos\theta) \tag{3.10}$$

а

$$\int_{\beta}^{\pi} P_n(\cos\theta) P_{-1/2}(-\cos\theta) \sin\theta d\theta = -\int_0^{\pi-\beta} (-1)^n P_n(\cos\theta) P_{-1/2}(\cos\theta)\, d\theta$$

решение (3.6) представится в виде

$$Z_n = -\frac{2n+1}{2} \sum_{m=0}^{\infty} d_{nm} Z_m \quad (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{3.11}$$

где

$$d_{nm} = N_m^* \int_0^{\beta} P_n(\cos\theta) P_m(\cos\theta)\, d\cos\theta +$$

$$+ (-1)^{n+m} \int_0^{\pi-\beta} P_n(\cos\theta) P_{-1/2}(\cos\theta)\, d\cos\theta \tag{3.12}$$

Для вычисления интегралов можно воспользоваться формулами

$$\int P_n(x)\,P_m(x)\,dx = \frac{1-x^2}{(m-n)(m+n+1)}\left[P_n'(x)\,P_m(x) - P_m'(x)P_n(x)\right]$$

$$\int P_n^2(x)\,dx = \frac{1}{2n+1}\left[xP_n^2(x) - 2(1-x^2)\sum_{k=1}^{n-1}\frac{P_k(x)\,P_k'(x)}{k+1}\right] \tag{3.13}$$

причем

$$P_n'(x) = \frac{n+1}{1-x^2}\left[xP_n(x) - P_{n+1}(x)\right]$$

$$P_{-1/2}(\cos\theta) = \frac{2}{\pi}F\left(\frac{\pi}{2},\ \sin\frac{\theta}{2}\right) \tag{3.14}$$

$$P_{1/2}(\cos\theta) = \frac{\sqrt{2}}{\pi}\left[\frac{2\sqrt{2}}{\cos\theta}E\left(\frac{\pi}{2},\ \sin\frac{\theta}{2}\right) - \sqrt{2}F\left(\frac{\pi}{2},\ \sin\frac{\theta}{2}\right)\right]$$

где $F\left(\frac{\pi}{2},\ \sin\frac{\theta}{2}\right)$ и $E\left(\frac{\pi}{2},\ \sin\frac{\theta}{2}\right)$ — полные нормальные эллиптические интегралы Лежандра соответственно первого и второго рода.

Для определения критического значения усилий N_x воспользуемся условием существования ненулевых значений коэффициентов Z_n. Докажем сходимость процесса итераций.

Обозначая через

$$b = \sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m Z_m$$

$$c_n = \int_0^{\pi-\beta} P_n(\cos\theta)\,P_{-1/2}(\cos\theta)\,d\cos\theta \tag{3.15}$$

$$a_{nm} = N_m^* \int_0^{\beta} P_n(\cos\theta)\,P_m(\cos\theta)\,d\cos\theta$$

из (3.11) получим

$$Z_n = -\frac{2n+1}{2}\sum_{m=0}^{\infty} a_{nm}Z_m + (-1)^n c_n b \tag{3.16}$$

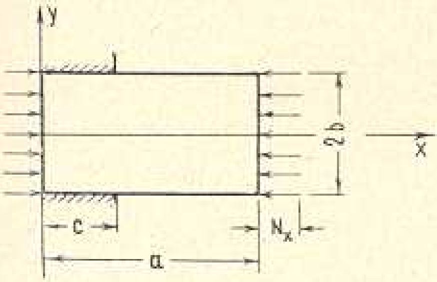
Следовательно, для неизвестных b и Z_n получим следующую систему уравнений:

$$b-\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m Z_m=0 \tag{3.17}$$

$$(-1)^n c_n b - Z_n - \frac{2n+1}{2}\sum_{m=0}^{\infty} a_{nm} Z_m = 0 \quad (n=0,1,2,\ldots)$$

Учитывая (3.8) и что при больших n $P_n(x)$ стремится к нулю как $1/n^{1/2}$, легко проверить, что, начиная с некоторого n_0 $(n>n_0,\ m>n_0)$, процесс итераций для определителя системы (3.17), а следовательно и для системы (3.11) будет сходящимся.

4. В качестве второй задачи определим критические значения потери устойчивости прямоугольной пластины при следующих граничных условиях (фиг. 2):



Фиг. 2.

$$w=\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=0 \text{ при } x=0 \text{ и } x=a \tag{4.1}$$

$$\left.\begin{aligned} w=\frac{\partial w}{\partial y}&=0 \text{ при } 0\leqslant x\leqslant c\\ w=\frac{\partial^2 w}{\partial^2 y}&=0 \text{ при } c<x\leqslant a\\ &\text{при } y=\pm b\end{aligned}\right\} \tag{4.2}$$

Следовательно, решение (1.1) будем искать в виде

$$w=\sum_{m=1}^{\infty} f_m(y)\sin\frac{m\pi}{a}x \tag{4.3}$$

содержащем в себе все возможные формы потери устойчивости. Как видно, ход решения данной задачи полностью будет совпадать с решением первой задачи в случае антисимметрии относительно оси y. Критические значения N_x определяются также из определителя системы (2.18).

В заключение приведем результаты численного примера. Вычисления производились на ЭВМ „Раздан-3“ для пластин, у которых $\frac{h}{b}=\frac{1}{100}$ при различных значениях отношений сторон $\frac{a}{b}$ и $\beta=\frac{\pi}{a}c$. В тех случаях, когда $\frac{a}{b}<2$, были решены определители второго и третьего порядка, а при $\frac{a}{b}>2$ — восьмого и десятого порядка. В табл. 1 приводятся значения безразмерной величины $N_x\frac{h^2}{D}\cdot 10^6$, полученные из определителей третьего $\left(\frac{a}{b}<2\right)$ и десятого $\left(\frac{a}{b}>2\right)$ порядка.

Таблица 1

a/b \ β	0	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	π
$0.4\sqrt{2}$	3594	3640	3717	3754	3758
$0.5\sqrt{2}$	2489	2553	2656	2708	2714
$0.6\sqrt{2}$	1907	1975	2108	2180	2187
$\sqrt{2}$	1117	1225	1505	1707	1730
2	987	1137	1456	1833	1898
4	987	1075	1100	1393	1720
6	987	1025	1073	1171	1740
8	987	1007	1027	1099	1720

Значения $\beta = 0$ и $\beta = \pi$ означают, что стороны $y = \pm b$ полностью свободно оперты или полностью заделаны, следовательно, N_x можно вычислить по [3].

Следует отметить, что приведенные значения практически совпадают со значениями, полученными из определителей второго $\left(\frac{a}{b} < 2\right)$ и восьмого $\left(\frac{a}{b} \geqslant 2\right)$ порядка (наибольшее отклонение составляет всего лишь 0.06%). Как видно из таблицы, значение $N_x \frac{h^2}{D} \cdot 10^6$ вместе с возрастанием β увеличивается, оставаясь между известными из [3] пределами, причем это увеличение для разных отношений $\frac{a}{b}$ происходит не с одинаковой скоростью.

Ереванский политехнический институт
им. К. Маркса

Поступила 16 IV 1971

Գ. Ա. ՄՈՎՍԻՍՅԱՆ

ԽԱՌԸ ԵԶՐԱՅԻՆ ՊԱՅՄԱՆՆԵՐՈՎ ՈՒՂՂԱՆԿՅՈՒՆ ՍԱԼԻ ԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅՈՒՆԸ ԿՈՐՑՆՈՂ ԿՐԻՏԻԿԱԿԱՆ ՃԻԳԵՐԻ ՈՐՈՇՄԱՆ ՇՈՒՐՋԸ

Ամփոփում

Դիտարկվում է ուղղանկյուն սալ, որի երկու հանդիպակաց կողմերը լրիվ ազատ հենված են, իսկ մյուս երկու կողմերի համար տրված են խառը պայմաններ։

Ուժերը կիրառված են լրիվ ազատ հենված կողմերի վրա։ Սալի կայունության կորցնելու ձևերը վերցվում են Ֆուրյեի շարքերի տեսքով։ Ինտեգրման հաստատունների համար եզրային պայմաններից ստացվում են զույգ շարք-հավասարումներ, որոնք բերվում են գծային հանրահաշվական հավասարումների անվերջ սիստեմի։ Ճիգերի կրիտիկական արժեքները որոշվում են այդ սիստեմի որոշչի զրո լինելու պայմանից։ Բերվում է թվային օրինակ։

ON DEFINITION OF CRITICAL INSTABILITY FORCES FOR A RECTANGULAR PLATE WITH MIXED BOUNDARY CONDITIONS

G. A. MOVSISIAN

Summary

The value of critical forces of instability for o rectangular plate with mixed boundary conditions is determined. It is supposed that forces are applied to those two opposite sides which are freely supported. The deflection forms are taken in the Fourier series. For the constants of integration dual trigonometrical series are obtained from the boundary conditions; these series are reduced to an infinite set of linear algebraic equations. The values of critical forces are defined equating the determinant of the set to zero. It is proved that the process of iteration converges. A numerical example is given.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Минасян Р. С.* Об одной смешанной задаче изгиба прямоугольной пластинки. Докл. АН АрмССР, т. 22, № 1, 1956.
2. *Мовсисян Г. А.* К определению частот собственных колебаний прямоугольной пластины при смешанных граничных условиях. Изв. АН АрмССР, Механика, т. XXIV, № 5, 1971.
3. *Тимошенко С. П.* Устойчивость упругих систем. ГИТТА, М-Л., 1946.
4. *Лебедев Н. Н.* Специальные функции и их приложения. ГИТТА, М., 1953.
5. *Баблоян А. А.* Решение некоторых парных уравнений. ПММ, т. 31, в. 4, 1967.
6. *Баблоян А. А.* Решение некоторых „парных" рядов. Докл. АН АрмССР, т. 39, № 3, 1964.