ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXIV, № 6, 1971 Механика

Р. М. КИРАКОСЯН

НЕКОТОРЫЕ ТЕОРЕМЫ ОБ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОМ РАВНОВЕСИИ ТЕЛА ПРИ ПЕРЕМЕННЫХ ВНЕШНИХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ

На основе общих теорем теории упруго-пластических сред, доказываются некоторые теоремы об упруго-пластическом равновесии тела при переменных внешних воздействиях, при этом рассматриваются устойчивые в смысле постулата Друккера идеально-пластические и произвольно упрочняющиеся материалы.

1. В прямоугольной декартовой системе координат x_i рассмотрим тело, находящееся под действием массовых сил X_i, поверхностных нагрузок P_i, приложенных на части поверхности S_p, и перемещений u_{0i}, заданных на остальной части поверхности тела S_u. Будем считать, что эти воздействия зависят от времени t, но они настолько медленно изменяются, что можно пренебречь инерционными эффектами. Все деформации считаются малыми, в силу чего при составлении уравнений равновесия и граничных условий пренебрегаются изменения геометрии тела, вызванные его деформированием. Материал тела предполагаем устойчивым в смысле постулата Друккера, идеально-пластическим или произвольно упрочняющимся с регулярной или сингулярной поверхностью текучести. Для упрочняющихся материалов дополнительно будем считать, что функции упрочнения не зависят от скоростей напряжений. Таким образом, рассматриваются те материалы, для которых доказаны общие теоремы теории упруго-пластических сред [1].

Известно, что распределение скоростей напряжений $\dot{\sigma}_{ij}$ в упрочняющемся материале статически возможно, если оно удовлетворяет дифференциальным уравнениям равновесия в объеме тела V и краевым условиям для напряжений на S_p. Статически возможное распределение скоростей напряжений в идеально-пластическом материале должно также удовлетворять дополнительному условию

$$\dot{f}^{*}\equiv\frac{\partial f}{\partial\sigma_{ij}}\dot{\sigma}_{ij}^{*}\leqslant 0,\quad \text{если}\quad f=0 \tag{1.1}$$

так как материал не может воспринимать напряжения, превышающие предел текучести (f — функция текучести).

Согласно минимальному принципу для скоростей напряжений [1], абсолютный минимум выражения*

---

* Случай разрывных полей не рассматривается.

$$\frac{1}{2}\int_v \dot{\sigma}_{ij}^{*} \dot{\varepsilon}_{ij}^{*} dv - \int_{s_u} \dot{\sigma}_{ij}^{*} n_j \dot{u}_{i0} ds \tag{1.2}$$

определенного для всех статически возможных распределений скоростей напряжений $\dot{\sigma}_{ij}^{*}$, отвечает действительному распределению скоростей $\dot{\sigma}_{ij}$. Здесь через $\dot{\varepsilon}_{ij}^{*}$ обозначены скорости деформаций, соответствующие статически возможным скоростям напряжений $\dot{\sigma}_{ij}^{*}$, n_i — единичный вектор внешней нормали к поверхности тела, суммирование производится по повторяющимся латинским индексам.

Рассмотрим решение краевой задачи в скоростях напряжений в линейно упругой постановке, то есть распределение скоростей упругих напряжений $\dot{\sigma}_{ij}^{(e)}$ при тех же скоростях изменения воздействий $\dot{X}_i$, $\dot{P}_i$ и $\dot{u}_{i0}$.

Очевидно, что эти скорости в случае упрочняющихся материалов всегда, а в случае идеально-пластических материалов при соблюдении дополнительного условия (1.1) являются статически возможными. Следовательно, в качестве статически возможного распределения скоростей напряжений можно принимать поле скоростей упругих напряжений $\dot{\sigma}_{ij}^{(e)}$, при этом не забывая, что в случае идеально-пластических материалов это означает ограничиться классом задач, для которых условие (1.1) удовлетворяется.

Полагая $\dot{\sigma}_{ij}^{*} = \dot{\sigma}_{ij}^{(e)}$, согласно минимальному принципу для скоростей напряжений имеем

$$\frac{1}{2}\int_v \dot{\sigma}_{ij}^{(e)} \dot{\varepsilon}_{ij}^{*(e)} dv - \int_{s_u} \dot{\sigma}_{ij}^{(e)} n_j \dot{u}_{i0} ds \geqslant \frac{1}{2}\int_v \dot{\sigma}_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} dv - \int_{s_u} \dot{\sigma}_{ij} n_j \dot{u}_i ds \tag{1.3}$$

где $\dot{\sigma}_{ij}$ и $\dot{\varepsilon}_{ij}$ — действительные поля скоростей напряжений и деформаций. Скорости деформаций $\dot{\varepsilon}_{ij}^{*(e)}$ соответствуют статически возможным скоростям напряжений $\dot{\sigma}_{ij}^{(e)}$ и имеют вид

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{*(e)} = A_{ijhk} \dot{\sigma}_{hk}^{(e)} + \dot{\varepsilon}_{ij}^{*\,(e)} = \dot{\varepsilon}_{ij}^{(e)} + \dot{\varepsilon}_{ij}^{\cdot\cdot\,(e)} \tag{1.4}$$

где $\dot{\varepsilon}_{ij}^{(e)}$ — действительные скорости деформаций в идеально линейно упругом теле при скоростях воздействий $\dot{X}_i$, $\dot{P}_i$ и $\dot{u}_{i0}$, а $\dot{\varepsilon}_{ij}^{\cdot\cdot\,(e)}$ — скорости пластических деформаций, которые имели бы место, если бы действительные напряжения σ_{ij} изменялись бы со скоростями $\dot{\sigma}_{ij}^{(e)}$.

Уравнение виртуальных работ [1]

$$\int_v \dot{\sigma}_{ij}' \dot{\varepsilon}_{ij}' dv = \int_v \dot{X}_i' \dot{u}_i' dv + \int_s \dot{P}_i' \dot{u}_i' ds \tag{1.5}$$

справедливо для любого распределения скоростей напряжений $\dot{\sigma}_{ij}'$, уравновешенного внешними нагрузками $\dot{X}_i'$, $\dot{P}_i'$, и для любого поля скоростей перемещений $\dot{u}_i^*$ с соответствующим ему распределением скоростей деформаций

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^* = \frac{1}{2}\left(\dot{u}_{i,j}^* + \dot{u}_{j,i}^*\right)$$

(запятая перед индексом i означает частную производную по координате x_i). В уравнении виртуальных работ (1.5) поля скоростей $\dot{\sigma}_{ij}$ и $\dot{\varepsilon}_{ij}^*$, вообще говоря, не связаны между собой.

Заметим, что разность скоростей напряжений $[\dot{\sigma}_{ij}^{(e)} - \dot{\sigma}_{ij}]$ самоуравновешена и соответствует нулевым скоростям на S_p; действительные скорости деформаций $\dot{\varepsilon}_{ij}$ совместны и соответствуют заданным на S_v скоростям $\dot{u}_{i0}$. Применяя уравнение виртуальных работ (1.5) для $[\dot{\sigma}_{ij}^{(e)} - \dot{\sigma}_{ij}]$ и $\dot{\varepsilon}_{ij}$, находим

$$\int\limits_{S_v} [\dot{\sigma}_{ij}^{(e)} - \dot{\sigma}_{ij}]\, n_j \dot{u}_{i0}\, ds = \int\limits_v [\dot{\sigma}_{ij}^{(e)} - \dot{\sigma}_{ij}]\, \dot{\varepsilon}_{ij}\, dv \tag{1.6}$$

С помощью (1.5) и (1.6) неравенство (1.3) приводим к виду

$$\int\limits_v \dot{\sigma}_{ij}^{(e)} \dot{\varepsilon}_{ij}^{*(e)}\, dv - J \geqslant 0 \tag{1.7}$$

где

$$J = \int\limits_v [2\dot{\sigma}_{ij}^{(e)} \dot{\varepsilon}_{ij} - \dot{\sigma}_{ij}^{(e)} \dot{\varepsilon}_{ij}^{(e)} - \dot{\sigma}_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}]\, dv \tag{1.8}$$

Минимальный принцип для скоростей напряжений для идеально линейно-упругого тела формулируется так же, как и для упруго-пластического тела, только с той разницей, что скорости деформаций $\dot{\varepsilon}_{ij}^*$, соответствующие статически возможным скоростям напряжений $\dot{\sigma}_{ij}^*$, определяются из соотношений упругости

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^* = A_{ijkk}\, \dot{\sigma}_{kk}^* \tag{1.9}$$

В качестве статически возможного поля скоростей напряжений в рассмотренном „упругом" теле можно принять $\dot{\sigma}_{ij}^* = \dot{\sigma}_{ij}$, то есть действительное поле скоростей напряжений в реальном упруго-пластическом теле при тех же скоростях воздействий $\dot{X}_i$, $\dot{P}_i$ и $\dot{u}_{i0}$. При этом роль действительных скоростей напряжений и деформаций играют $\dot{\sigma}_{ij}^{(e)}$ и $\dot{\varepsilon}_{ij}^{(e)}$ — решение „упругой" задачи в скоростях.

Согласно минимальному принципу для скоростей напряжений „упругого" тела при $\dot{\sigma}_{ij}^* = \dot{\sigma}_{ij}$ имеем

$$\frac{1}{2}\int_v \dot\sigma_{ij}\ddot\varepsilon_{ij}dv - \int_{s_u}\dot\sigma_{ij}n_j\dot u_{i0}ds \geq \frac{1}{2}\int_v \dot\sigma^{(e)}_{ij}\dot\varepsilon^{(e)}_{ij}dv - \int_{s_u}\dot\sigma^{(e)}_{ij}n_j\dot u_{i0}ds \tag{1.10}$$

Пользуясь уравнением виртуальных работ (1.5), для самоуравновешенных скоростей напряжений $[\dot\sigma_{ij} - \dot\sigma^{(e)}_{ij}]$ и действительных скоростей деформаций „упругого" тела $\dot\varepsilon^{(e)}_{ij}$, будем иметь

$$\int_{s_u}[\dot\sigma_{ij} - \dot\sigma^{(e)}_{ij}]n_j\dot u_{i0}ds = \int_v[\dot\sigma_{ij} - \dot\sigma^{(e)}_{ij}]\dot\varepsilon^{(e)}_{ij}dv \tag{1.11}$$

Учитывая (1.11), из (1.10) получим

$$\int_v[\dot\sigma_{ij}\ddot\varepsilon_{ij} + \dot\sigma^{(e)}_{ij}\dot\varepsilon^{(e)}_{ij} - 2\dot\sigma_{ij}\dot\varepsilon^{(e)}_{ij}]\,dv \geq 0 \tag{1.12}$$

Так как [1]

$$\dot\sigma_{ij} = \dot\sigma^{(e)}_{ij} + \dot\rho_{ij}$$

где $\dot\rho_{ij}$ — скорости остаточных напряжений, из (1.9) для $\ddot\varepsilon_{ij}$ имеем

$$\ddot\varepsilon_{ij} = A_{ijhk}[\dot\sigma^{(e)}_{hk} + \dot\rho_{hk}] = \dot\varepsilon^{(e)}_{ij} + \ddot\varepsilon_{ij\rho} \tag{1.13}$$

Здесь через $\ddot\varepsilon_{ij\rho}$ обозначены скорости упругих деформаций, соответствующие скоростям остаточных напряжений $\dot\rho_{ij}$.

Подставляя (1.13) в (1.12), находим

$$\int_v[\dot\sigma^{(e)}_{ij}\dot\varepsilon^{(e)}_{ij} + \dot\sigma_{ij}\ddot\varepsilon_{ij\rho} - \dot\sigma_{ij}\dot\varepsilon^{(e)}_{ij}]\,dv \geq 0 \tag{1.14}$$

Из уравнения виртуальных работ (1.5) для самоуравновешенных скоростей $[\dot\sigma_{ij} - \dot\sigma^{(e)}_{ij}]$ и совместных скоростей деформаций $[\dot\varepsilon_{ij} - \dot\varepsilon^{(e)}_{ij}]$, которым отвечают скорости перемещений, равные нулю на S_u, имеем

$$\int_v[\dot\sigma_{ij} - \dot\sigma^{(e)}_{ij}][\dot\varepsilon_{ij} - \dot\varepsilon^{(e)}_{ij}]\,dv = 0 \tag{1.15}$$

Вычитая из (1.14) два раза (1.15) и имея в виду равенство

$$\dot\varepsilon_{ij} = \dot\varepsilon^{(e)}_{ij} + \ddot\varepsilon_{ij\rho} + \ddot\varepsilon_{ij}$$

получим

$$J - \int_v \dot\sigma_{ij}\ddot\varepsilon_{ij}dv \geq 0 \tag{1.16}$$

Как будет показано ниже, неравенства (1.7) и (1.16) позволяют доказать некоторые теоремы об упруго-пластическом равновесии тела при переменных внешних воздействиях.

2. *Теорема о приспособляемости при произвольном упрочнении материала.* Известные теоремы Мелана и Койтера о приспособляемости тел к переменным нагрузкам относятся к идеально-пластическим материалам. Для упрочняющихся материалов в силу появляющейся деформационной неоднородности пластических свойств нельзя ожидать существования теорем о приспособляемости в обычном смысле. Вопрос о приспособляемости при упрочнении материала, разумеется, должен ставиться вполне конкретно, с указанием конкретной программы изменения внешних воздействий, предшествующей наступлению приспособляемости.

Пусть в момент времени $t = t_0$ в теле из упрочняющегося материала реализовано упруго-пластическое состояние

$$\sigma_{ij}^{0} = \sigma_{ij}(t_0), \qquad \overset{*}{\varepsilon}_{ij} = \varepsilon_{ij}(t_0) \tag{2.1}$$

отвечающее значениям воздействия

$$X_i^0 = X_i(t_0), \quad P_i^0 = P_i(t_0), \quad \overset{*}{u}_{i0} = u_{i0}(t_0)$$

при данной истории их изменения.

Допустим, что в дальнейшем в некотором интервале времени $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ воздействия на тело X_i, P_i и u_{i0} изменяются таким образом, что ни в одной точке тела не появляются новые пластические деформации. Тогда будем говорить, что тело из упрочняющегося материала, имеющее при $t = t_0$ упруго-пластическое состояние (2.1), приспособилось к дальнейшим изменениям внешних воздействий в данном интервале времени $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$. Термин „приспособляемость" при упрочнении материала будем понимать именно в этом смысле. Тогда справедлива следующая теорема.

Теорема. *Для того, чтобы тело из упрочняющегося материала, имеющее при $t = t_0$ упруго-пластическое состояние (2.1), приспособилось к дальнейшим изменениям внешних воздействий X_i, P_i и u_{i0} в интервале времени $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, необходимо и достаточно, чтобы напряжения*

$$\bar{\sigma}_{ij} = \sigma_{ij}^{0} + \int_{t_0}^{t} \dot{\sigma}_{ij}^{(e)} dt, \qquad t_0 \leqslant t \leqslant t_1 \tag{2.2}$$

ни в одной точке тела не вызывали бы новых пластических деформаций, то есть удовлетворялось бы условие

$$\int_{v} \dot{\sigma}_{ij}^{(e)} \dot{\varepsilon}_{ij}^{*(e)} dv = 0, \qquad t_0 \leqslant t \leqslant t_1 \tag{2.3}$$

Необходимость условия (2.3) непосредственно вытекает из определения приспособляемости.

Заметим, что достаточное условие приспособляемости тела при устойчивых упрочняющихся материалах с помощью постулата Друккера можно представить в виде

$$\int\limits_{v} \dot{\sigma}_{ij}\, \dot{\varepsilon}_{ij}^{''} dv = 0, \quad t_0 \leqslant t \leqslant t_1 \tag{2.4}$$

где $\dot{\sigma}_{ij}$ и $\dot{\varepsilon}_{ij}^{''}$ — действительные скорости напряжений и пластических деформаций.

Достаточность же условия (2.3) докажем путем установления неравенства

$$\int\limits_{v} \dot{\sigma}_{ij}^{(e)}\, \dot{\varepsilon}_{ij}^{(e)} dv \geqslant \int\limits_{v} \dot{\sigma}_{ij}\, \dot{\varepsilon}_{ij}^{''} dv \tag{2.5}$$

Нетрудно заметить, что, складывая (1.7) и (1.16), приходим к неравенству (2.5), чем и завершается доказательство сформулированной теоремы.

В качестве примера применения этой теоремы может служить задача об упруго-пластическом осесимметричном изгибе круглой защемленной пластинки под действием конусообразно распределенной нагрузки, которая при постоянной равнодействующей устремляется к равномерной нагрузке.

Заметим, что доказанная теорема о приспособляемости позволяет, в частности, выяснить вопрос о наступлении процесса разгрузки во всех точках тела.

3. *Теорема о работе скоростей внешних нагрузок.* Из (1.16) в силу постулата Друккера следует неотрицательность интеграла J (1.8), который при фиксированных перемещениях на S_u с помощью уравнения виртуальных работ (1.5) приводится к виду

$$J = \int\limits_{v} [\dot{\sigma}_{ij}\, \dot{\varepsilon}_{ij} - \dot{\sigma}_{ij}^{(e)}\, \dot{\varepsilon}_{ij}^{(e)}]\, dv = \int\limits_{v} \dot{X}_i [\dot{u}_i - \dot{u}_i^{(e)}]\, dv + \int\limits_{s_p} \dot{P}_i [\dot{u}_i - \dot{u}_i^{(e)}]\, ds \geqslant 0$$

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема. *При фиксированных перемещениях на S_u работа скоростей внешних нагрузок $\dot{X}_i$ и $\dot{P}_i$ для упруго-пластического тела из упрочняющегося материала (или из идеально-пластического материала, но при соблюдении условия (1.1)) не меньше, чем в случае упругого материала.*

Теорему в общем случае можно доказать и для идеально-пластических материалов, освобождаясь от ограничения, налагаемого условием (1.1). Однако, на этом останавливаться не будем.

4. Теорема о действительности статически возможных скоростей изменения упругих напряжений для тел из идеально-пластических материалов.

Для устойчивых идеально-пластических материалов, согласно постулату Друккера, имеем [1]

$$\dot{\sigma}_{ij} \ddot{\varepsilon}_{ij} = 0 \tag{4.1}$$

для всех соответственных скоростей изменения напряжений и скоростей пластических деформаций.

Имея в виду это обстоятельство, для значения интеграла J (1.8) из неравенств (1.7) и (1.16), соответственно, получим

$$J \leqslant 0 \quad \text{и} \quad J \geqslant 0 \tag{4.2}$$

Комбинируя эти неравенства, приходим к результату

$$J = 0 \tag{4.3}$$

В силу этого, в случае идеально-пластических материалов, значения выражения (1.2), определенные для статически возможных скоростей упругих напряжений $\dot{\sigma}_{ij}^{(e)}$ и действительных скоростей $\dot{\sigma}_{ij}$, совпадают. Согласно минимальному принципу это равносильно совпадению самих скоростей напряжений, то есть

$$\dot{\sigma}_{ij} = \dot{\sigma}_{ij}^{(e)} \tag{4.4}$$

Отсюда вытекает теорема. *В случае идеально-пластических материалов статически возможные скорости упругих напряжений являются действительными.*

Из этой теоремы, в частности, вытекает, что если в некотором интервале времени $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ скорости упругих напряжений обеспечивают приспособляемость упруго-пластического тела из идеально-пластического материала, то приспособлямость на самом деле будет обеспечена. Этот результат отличается от теоремы о приспособляемости Мелана тем, что предполагает наличие решения упруго-пластической задачи для некоторого момента времени t_0, что позволяет существенно упростить вопрос выяснения приспособляемости тела к дальнейшим изменениям внешних воздействий при $t \geqslant t_0$.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 9 IV 1971

Ռ. Մ. ԿԻՐԱԿՈՍՅԱՆ

ՓՈՓՈԽԱԿԱՆ ԱՐՏԱՔԻՆ ԱԶԴԵՑՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԴԵՊՔՈՒՄ ԱՌԱՁԳԱՊԼԱՍՏԻ-ԿԱԿԱՆ ՄԱՐՄՆԻ ՀԱՎԱՍԱՐԱԿՇՌՈՒԹՅԱՆ ՎԵՐԱԲԵՐՅԱԼ ՄԻ ՔԱՆԻ ԹԵՈՐԵՄՆԵՐ

Ամփոփում

Առաձգա-պլաստիկական միջավայրի ընդհանուր թեորեմների հիման վրա ապացուցվում են առաձգա-պլաստիկական հավասարակշռության վերա-

բերյալ մի քանի թեորեմներ՝ փոփոխական արտաքին ազդեցությունների դեպքում։ Դիտարկվում են Դրուկերի պոստուլատի իմաստով կայուն իդեալական պլաստիկ և կամայական ամրապնդվող նյութեր։

SOME THEOREMS ON ELASTIC-PLASTIC EQUILIBRIUM OF A SOLID UNDER VARIABLE EXTERNAL EFFECTS

R. M. KIRAKOSIAN

Summary

On the basis of general theorems for elestic-plastic media some theorems on elastic-plastic equilibrium of a solid under variable external effects are proved.

Perfectly plastic and arbitrary hardening materials are considered in terms of Drucker's postulate.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Койтер В. Т.* Общие теоремы теории упруго-пластических сред. ИЛ, 1961.