

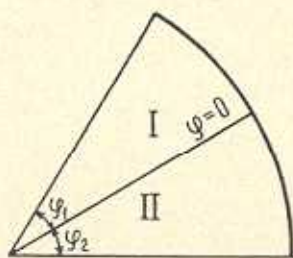
Р. К. АЛЕКСАНЯН

СТАЦИОНАРНОЕ ТЕМПЕРАТУРНОЕ ПОЛЕ В СОСТАВНОМ КРУГОВОМ СЕКТОРЕ

Температурная задача или эквивалентные ей задачи теории упругости и электростатики для неоднородных сред рассмотрены в работах [1—5] и др.

В настоящей статье рассматривается задача о плоском стационарном температурном поле в составном круговом секторе. Решение строится при помощи системы собственных функций обыкновенного дифференциального оператора, порождаемого рассматриваемой краевой задачей для уравнения Лапласа.

1. Поместим начало полярной системы координат в вершине составного сектора, направим полярную ось по линии раздела сред с различными коэффициентами теплопроводности (фиг. 1). Предполагается, что контакт между средами является идеальным и что отсутствуют тепловые источники.



Фиг. 1.

Функции распределения температуры в областях I и II удовлетворяют уравнению Лапласа [1]

$$\frac{\partial^2 U_i}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_i}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U_i}{\partial \varphi^2} = 0 \quad (i = 1, 2) \quad (1.1)$$

и следующим условиям на линии раздела и на границе области:

$$\begin{aligned} U_1|_{\varphi=\varphi_1} &= U_2|_{\varphi=-\varphi_2} = 0 & 0 < r < 1 \\ U_1|_{r=1} &= f_1(\varphi) & 0 < \varphi < \varphi_1 \\ U_2|_{r=1} &= f_2(\varphi) & -\varphi_2 < \varphi < 0 \end{aligned} \quad (1.2)$$

$$U_1|_{\varphi=0} = U_2|_{\varphi=0}, \quad k_1 \frac{\partial U_1}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=0} = k_2 \frac{\partial U_2}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=0}, \quad 0 < r < 1$$

где k_1 и k_2 — коэффициенты теплопроводности соответствующих материалов.

Решение (1.1) в областях I и II представляем в следующем виде:

$$U_i(r, \varphi) = r^{\lambda^{(i)}} (A_i \cos \lambda^{(i)} \varphi + B_i \sin \lambda^{(i)} \varphi) \quad (i = 1, 2) \quad (1.3)$$

Удовлетворяя условиям (1.2), на основании (1.3) находим

$$\begin{aligned} \lambda^{(1)} = \lambda^{(2)} = \lambda, \quad B_2 = \mu B_1, \quad A_1 = A_2 \\ A_1 \cos \lambda \varphi_1 + B_1 \sin \lambda \varphi_1 = 0 \\ A_2 \cos \lambda \varphi_2 - B_2 \sin \lambda \varphi_2 = 0 \end{aligned} \quad (1.4)$$

где $\mu = \frac{k_1}{k_2}$.

Из условия существования нетривиального решения однородной системы (1.4) для λ получим следующее уравнение:

$$(\mu + 1) \sin \lambda (\varphi_1 + \varphi_2) + (1 - \mu) \sin \lambda (\varphi_1 - \varphi_2) = 0 \quad (1.5)$$

Функции распределения температуры в областях I и II можно представить в виде ряда по функциям (1.3), соответствующим положительным корням уравнения (1.5). Отрицательные корни уравнения (1.5) для функции распределения температуры не представляют интереса, так как температура должна быть ограниченной.

Для каждого собственного числа λ_n , не являющегося одновременно корнем уравнения $\cos \lambda_n \varphi_1 = 0$, из системы (1.4) получим

$$A_{1n} = A_{2n} = -B_{1n} \operatorname{tg} \lambda_n \varphi_1, \quad B_{2n} = \mu B_{1n} \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (1.6)$$

Общее решение рассматриваемой задачи можно представить в виде

$$U = \sum_{n=1}^{\infty} B_n r^{\lambda_n} U_n(\varphi) \quad (0 \leq r \leq 1, \quad -\varphi_2 \leq \varphi \leq \varphi_1) \quad (1.7)$$

где

$$U_n(\varphi) = \begin{cases} U_{1n}(\varphi) = \sin \lambda_n \varphi - \operatorname{tg} \lambda_n \varphi_1 \cos \lambda_n \varphi_1 & 0 \leq \varphi \leq \varphi_1 \\ U_{2n}(\varphi) = \mu \sin \lambda_n \varphi - \operatorname{tg} \lambda_n \varphi_1 \cos \lambda_n \varphi_1 & -\varphi_2 \leq \varphi \leq 0 \end{cases} \quad (1.8)$$

Если уравнения (1.5) и $\cos \lambda_n \varphi_1 = 0$ имеют общие корни, то в (1.7) появляется ряд вида $\sum A_n r^{\lambda_n} \cos \lambda_n \varphi$.

Система функций $U_n(\varphi)$ ортогональна в интервале $(-\varphi_2 \leq \varphi \leq \varphi_1)$ с кусочно-постоянным весом

$$k(\varphi) = \begin{cases} k_1 = \text{const} & 0 \leq \varphi \leq \varphi_1 \\ k_2 = \text{const} & -\varphi_2 \leq \varphi \leq 0 \end{cases} \quad (1.9)$$

Входящие в (1.7) коэффициенты B_n можно определить, задаваясь температурой или условием подвода тепла на дуговых частях контуров областей I и II.

Пусть $U|_{r=1} = f(\varphi)$ ($-\varphi_2 \leq \varphi \leq \varphi_1$). Разложим $f(\varphi)$ в области $(-\varphi_2 \leq \varphi \leq \varphi_1)$ в ряд по ортогональным функциям

$$f(\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n U_n(\varphi) \quad (1.10)$$

где

$$a_n = \frac{\int_{-\varphi_2}^{\varphi_1} k(\varphi) f(\varphi) U_n(\varphi) d\varphi}{\int_{-\varphi_2}^{\varphi_1} k(\varphi) U_n^2(\varphi) d\varphi} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

Для распределения температуры получим

$$U(r, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n r^{\lambda_n} U_n(\varphi) \quad (0 \leq r \leq 1, \quad -\varphi_2 \leq \varphi \leq \varphi_1) \quad (1.11)$$

2. Рассмотрим температурное поле в полукруге для следующих частных случаев.

а) Пусть $\varphi_1 = \varphi_2 = \frac{\pi}{2}$, а температура на дуговых частях контуров областей I и II определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} f_1(\varphi) &= U_{01} = \text{const} & \left(r=1, \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \right) \\ f_2(\varphi) &= U_{02} = \text{const} & \left(r=1, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq 0 \right) \end{aligned} \quad (2.1)$$

Для остальных граничных и контактных условий принимаем (1.2). Корни уравнения (1.5) в этом случае — натуральные числа $\lambda = 1, 2, \dots$. Температурная функция в областях I и II имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} U_1(r, \varphi) &= \sum_{n=1}^{\infty} B_{2n} r^{2n} \sin 2n\varphi + \sum_{n=1}^{\infty} B_{2n-1} r^{2n-1} \cos (2n-1)\varphi \\ &\quad \left(0 \leq r \leq 1, \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \right) \\ U_2(r, \varphi) &= \sum_{n=1}^{\infty} \mu B_{2n} r^{2n} \sin 2n\varphi + \sum_{n=1}^{\infty} B_{2n-1} r^{2n-1} \cos (2n-1)\varphi \\ &\quad \left(0 \leq r \leq 1, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq 0 \right) \end{aligned} \quad (2.2)$$

Из граничных условий (2.1) находим

$$B_{2n} = \frac{2(U_{01} - U_{02})}{\pi(1+\mu)} \frac{1 - (-1)^n}{n} \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (2.3)$$

$$B_{2n-1} = \frac{4(U_{02} + \mu U_{01})}{\pi(1+\mu)} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$$

Подставляя (2.3) в (2.2) и суммируя, получим

$$U_1(r, \varphi) = \frac{2(U_{01} - U_{02})}{\pi(1+\mu)} \operatorname{arctg} \frac{2r^2 \sin 2\varphi}{1-r^4} +$$

$$+ \frac{2(U_{02} + \mu U_{01})}{\pi(1+\mu)} \operatorname{arctg} \frac{2r \cos \varphi}{1-r^2}$$

$$U_2(r, \varphi) = \frac{2\mu(U_{01} - U_{02})}{\pi(1+\mu)} \operatorname{arctg} \frac{2r^2 \sin 2\varphi}{1-r^4} +$$

$$+ \frac{2(U_{02} + \mu U_{01})}{\pi(1+\mu)} \operatorname{arctg} \frac{2r \cos \varphi}{1-r^2} \quad (2.4)$$

В случае $U_{01} = U_{02} = U_0$ получим

$$U_i(r, \varphi) = \frac{2U_0}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{2r \cos \varphi}{1-r^2} \quad (i = 1, 2)$$

Распределение температуры в областях I и II не зависит от отношения коэффициентов теплопроводности $\mu = \frac{k_1}{k_2}$. Теплообмен между составляющими частями полукруга в этом случае отсутствует и полученное решение совпадает с известными для отдельных областей I и II решениями [8].

6) Пусть $\varphi_1 = \frac{\pi}{4}$, $\varphi_2 = \frac{3\pi}{4}$ и $f_1(\varphi) = U_0$, $f_2(\varphi) = U_0$. Для собственных чисел λ в этом случае из (1.5) получим

$$\lambda_n^{(0)} = 2n, \quad \lambda_n^{(1)} = \frac{2}{\pi} \arccos \frac{1-\mu}{2(1+\mu)} + 4(n-1)$$

$$\lambda_n^{(2)} = -\frac{2}{\pi} \arccos \frac{1-\mu}{2(1+\mu)} + 4n \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (2.5)$$

Температурные функции для этого случая строим в виде суммы

$$U_1 = U_{10} + U_{11} + U_{12} \quad \left(0 \leq r \leq 1, \quad 0 \leq \varphi < \frac{\pi}{4}\right)$$

$$U_2 = U_{20} + U_{21} + U_{22} \quad \left(0 \leq r \leq 1, \quad -\frac{3\pi}{4} \leq \varphi < 0\right) \quad (2.6)$$

Из уравнений (1.4) для корней $\lambda_n^{(0)} = 2n$ ($n = 1, 2, \dots$) получим

$$A_{2n}^{(0)} = 0, \quad B_{2n}^{(0)} = 0$$



Для $\lambda_n = \lambda_n^{(1)} = \frac{2}{\pi} \arccos \frac{1-\mu}{2(1+\mu)} + 4(n-1)$, ($n=1, 2, \dots$) из уравнений (1.4) получим

$$\begin{aligned} A_n^{(1)} \cos \gamma + B_n^{(1)} \sin \gamma &= 0 \\ A_n^{(1)} \cos 3\gamma - \mu B_n^{(1)} \sin 3\gamma &= 0 \end{aligned} \quad (2.7)$$

где

$$\gamma = \frac{1}{2} \arccos \frac{1-\mu}{2(1+\mu)} \quad (2.8)$$

Из (2.7) получим

$$A_n^{(1)} = -B_n^{(1)} \operatorname{tg} \gamma \quad \text{или} \quad A_n^{(1)} = -\mu B_n^{(1)} \operatorname{tg} 3\gamma \quad (n=1, 2, \dots)$$

Эти два значения $A_n^{(1)}$ не противоречивые, так как

$$\operatorname{tg} \gamma = \mu \operatorname{tg} 3\gamma \quad (2.9)$$

При $\lambda_n = \lambda_n^{(2)} = -\frac{2}{\pi} \arccos \frac{1-\mu}{2(1+\mu)} + 4n$ ($n=1, 2, \dots$) из уравнений (1.4) получим

$$\begin{aligned} A_n^{(2)} \cos \gamma - B_n^{(2)} \sin \gamma &= 0 \\ A_n^{(2)} \cos 3\gamma + \mu B_n^{(2)} \sin 3\gamma &= 0 \end{aligned}$$

откуда

$$A_n^{(2)} = B_n^{(2)} \operatorname{tg} \gamma$$

Используя граничное условие на дуге $r=1$, $f_i(\varphi) = U_0$ ($i=1, 2$), с помощью (1.10) и (2.5) для коэффициентов $B_{2n}^{(0)}$, $A_{2n-1}^{(0)}$, $B_n^{(1)}$, $B_n^{(2)}$ получим следующие значения:

$$\begin{aligned} B_{2n}^{(0)} &= 0, \quad A_{2n-1}^{(0)} = \frac{4U_0}{\pi(3+\mu)} \frac{(-1)^n}{2n-1} \\ B_n^{(1)} &= A \frac{(-1)^{n-1}}{\lambda_n^{(1)}}, \quad B_n^{(2)} = A \frac{(-1)^n}{\lambda_n^{(2)}} \quad (n=1, 2, \dots) \end{aligned}$$

где

$$A = \frac{32 U_0 \sin^2 \gamma}{\pi (3\mu \sec^2 3\gamma + \sec^2 \gamma) \cos 3\gamma}$$

После некоторых преобразований окончательно для слагаемых, входящих в суммы (2.6), получим следующие выражения:

$$\begin{aligned}
 U_{10} &= \frac{2U_0(1-\mu)}{\pi(3+\mu)} \operatorname{arctg} \frac{2r^2 \cos 2\varphi}{1-r^4} \\
 U_{11} &= \frac{A\pi r^{\frac{4}{\pi}\gamma}}{4 \cos \gamma} \left\{ \sin\left(\frac{4}{\pi}\gamma\varphi - \gamma\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n r^{4n} \cos 4n\varphi}{\pi n + \gamma} + \right. \\
 &\quad \left. + \cos\left(\frac{4}{\pi}\gamma\varphi - \gamma\right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n r^{4n} \sin 4n\varphi}{\pi n + \gamma} \right\} \\
 U_{12} &= \frac{A\pi r^{\frac{4}{\pi}\gamma}}{4 \cos \gamma} \left\{ \sin\left(\gamma - \frac{4}{\pi}\gamma\varphi\right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n r^{4n} \cos 4n\varphi}{\pi n - \gamma} + \right. \\
 &\quad \left. + \cos\left(\gamma - \frac{4}{\pi}\gamma\varphi\right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n r^{4n} \sin 4n\varphi}{\pi n - \gamma} \right\} \\
 &\quad \left(0 \leq r \leq 1, \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}\right)
 \end{aligned} \tag{2.10}$$

$$U_{20} = U_{10}$$

$$\begin{aligned}
 U_{21} &= \frac{A\pi r^{\frac{4}{\pi}\gamma}}{4 \cos 3\gamma} \left\{ \cos\left(\frac{4}{\pi}\gamma\varphi + 3\gamma\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n r^{4n} \sin 4n\varphi}{\pi n + \gamma} + \right. \\
 &\quad \left. + \sin\left(\frac{4}{\pi}\gamma\varphi + 3\gamma\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n r^{4n} \cos 4n\varphi}{\pi n + \gamma} \right\} \\
 U_{22} &= \frac{A\pi r^{\frac{4}{\pi}\gamma}}{4 \cos 3\gamma} \left\{ \cos\left(\frac{4}{\pi}\gamma\varphi + 3\gamma\right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n r^{4n} \sin 4n\varphi}{\pi n - \gamma} - \right. \\
 &\quad \left. - \sin\left(\frac{4}{\pi}\gamma\varphi + 3\gamma\right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n r^{4n} \cos 4n\varphi}{\pi n - \gamma} \right\} \\
 &\quad \left(0 \leq r \leq 1, \quad -\frac{3\pi}{4} \leq \varphi \leq 0\right)
 \end{aligned} \tag{2.11}$$

При других значениях углов φ_1 и φ_2 для распределения температуры в областях I и II получаются разложения, аналогичные (2.10) и (2.11).

Ряды собственных функций, соответствующие нецелым значениям собственных чисел λ_n , можно выразить через неполную бета-функцию

$$U_{11} = 2\varphi_2^*(r, \varphi) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n r^{4n} \cos 4n\varphi}{p+n} + 2\varphi_1^*(r, \varphi) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n r^{4n} \sin 4n\varphi}{p+n}$$

Вводя обозначение $z = -r^4 e^{4i\varphi}$ ($0 \leq r \leq 1$, $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$), после некоторых преобразований получим

$$U_{11} = \frac{2\varphi_2^*}{p} + (\varphi_2^* - i\varphi_1^*)F(z) + (\varphi_2^* + i\varphi_1^*)\bar{F}(z)$$

или

$$U_{11} = 2 \left| \frac{\varphi_2^*}{p} + \varphi_2^* \operatorname{Re} F(z) + \varphi_1^* \operatorname{Im} F(z) \right| \quad (2.12)$$

где

$$F(z) = z^{-p} \int_0^z \frac{z_1^p}{1-z_1} dz_1, \quad p = \frac{\gamma}{\pi} = \frac{1}{2\pi} \arccos \frac{1-\mu}{2(1+\mu)}$$

$$\varphi_1^* = \frac{Ar^{4p} \cos(4p\varphi - \gamma)}{8 \cos \gamma}, \quad \varphi_2^* = \frac{Ar^{4p} \sin(4p\varphi - \gamma)}{8 \cos \gamma}$$

$$\frac{1}{6} \leq p \leq \frac{1}{3} \quad \text{при} \quad 0 \leq \mu < \infty$$

Аналогичным путем получим

$$U_{12} = -\frac{r^4}{1-p} (\varphi_3^* \sin 4\varphi + \varphi_4^* \cos 4\varphi) + \varphi_4^* \operatorname{Re} \Phi(z) + \varphi_3^* \operatorname{Im} \Phi(z) \quad (2.13)$$

$$U_{21} = \mu \left| \frac{\psi_2^*}{p} + \psi_2^* \operatorname{Re} F(z) + \psi_1^* \operatorname{Im} F(z) \right| \quad (2.14)$$

$$U_{22} = -\frac{\mu r^4}{1-p} (\psi_3^* \sin 4\varphi + \psi_4^* \cos 4\varphi) + \mu \psi_4^* \operatorname{Re} \Phi(z) + \mu \psi_3^* \operatorname{Im} \Phi(z) \quad (2.15)$$

где

$$\Phi(z) = z^p \int_0^z \frac{z_1^{1-p}}{1-z_1} dz_1$$

$$\varphi_3^* = \frac{Ar^{-4p} \cos(\gamma - 4p\varphi)}{4 \cos \gamma}, \quad \varphi_4^* = \frac{Ar^{-4p} \sin(\gamma - 4p\varphi)}{4 \cos \gamma}$$

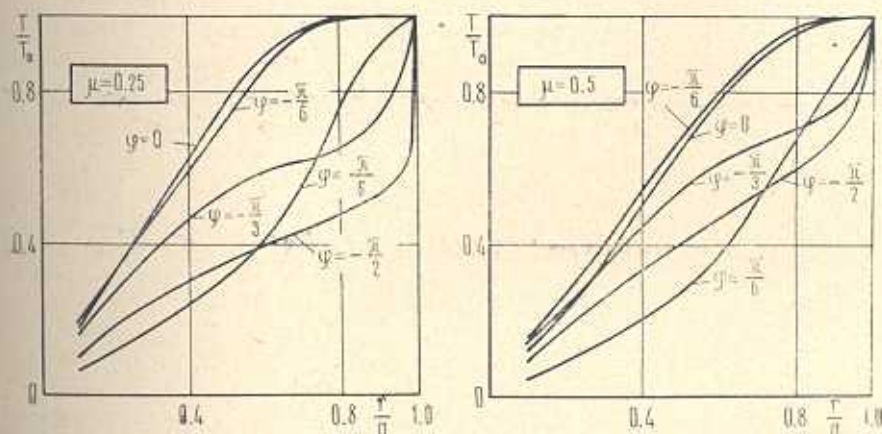
$$\psi_1^* = \frac{Ar^{4p} \cos(4p\varphi + 3\gamma)}{4 \cos 3\gamma}, \quad \psi_2^* = \frac{Ar^{4p} \sin(4p\varphi + 3\gamma)}{4 \cos 3\gamma}$$

$$\psi_3^* = \frac{Ar^{-4p} \cos(4p\varphi + 3\gamma)}{4 \cos 3\gamma}, \quad \psi_4^* = -\frac{Ar^{-4p} \sin(4p\varphi + 3\gamma)}{4 \cos 3\gamma}$$

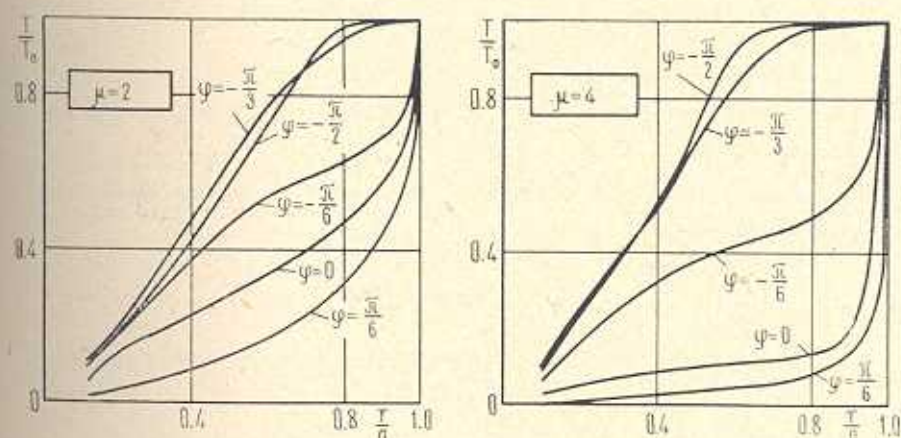
Для рациональных значений параметра p распределение температуры в областях I и II выражается через элементарные функции.

При некоторых значениях отношения коэффициентов теплопроводности составляющих сектор материалов вычислено распределение температуры в областях I и II в случае $\varphi_1 = \frac{\pi}{4}$, $\varphi_2 = \frac{3\pi}{4}$. Результаты

вычисления для сектора круга радиуса a представлены графически (фиг. 2, 3).



Фиг. 2.



Фиг. 3.

3. Рассмотрим распределение температуры в составном секторе, когда на его контуре задана температура.

Распределение температуры ищем в следующем виде:

$$T_i(r, \varphi) = U_i(r, \varphi) + V_i(r, \varphi) \quad (i=1, 2) \quad (3.1)$$

где функции $U_i(r, \varphi)$ ($i = 1, 2$) удовлетворяют уравнению (1.1) и условиям (1.2), а функции $V_i(r, \varphi)$ определяются уравнением

$$\Delta V_i = 0 \quad (i = 1, 2) \quad (3.2)$$

и условиями

$$\begin{aligned} V_1|_{r=r_1} &= \tau_1(r), & V_2|_{r=r_2} &= \tau_2(r) \\ V_1|_{\varphi=0} &= V_2|_{\varphi=0}, & k_1 \frac{\partial U_1}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=0} &= k_2 \frac{\partial U_2}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=0} \end{aligned} \quad (3.3)$$

Функции $\gamma_i(r)$ ($i = 1, 2$) непрерывны и удовлетворяют условию $\gamma_1(0) = \gamma_2(0)$.

Рассмотрим множество чисел $\{\beta_n\}$, среди которых нет корней уравнения (1.5). Пусть множество $\{\beta_n\}$ удовлетворяет условиям теоремы Мюнтца-Соса [7], на основании которой произвольную непрерывную функцию можно равномерно аппроксимировать на $(0, 1)$ полиномами вида

$$c_0 + \sum c_n r^{\beta_n} \quad (3.4)$$

Представляя функции $\gamma_i(r)$ ($i = 1, 2$) в виде степенных рядов

$$\gamma_1(r) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n r^{\beta_n}, \quad \gamma_2(r) = b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n r^{\beta_n} \quad (3.5)$$

местное решение уравнений (3.2) в окрестности начала координат ищем в виде

$$\begin{aligned} v_1(r, \varphi) &= A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^{\beta_n} (A_n \cos \beta_n \varphi + B_n \sin \beta_n \varphi) \\ v_2(r, \varphi) &= C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^{\beta_n} (C_n \cos \beta_n \varphi + D_n \sin \beta_n \varphi) \end{aligned} \quad (3.6)$$

Удовлетворяя при помощи (3.5) и (3.6) условиям (3.3), для искоемых коэффициентов получим

$$\begin{aligned} A_0 &= C_0 = a_0 = b_0 \\ A_n &= C_n = \frac{2}{\Delta} (a_n \mu \sin \beta_n \varphi_2 + b_n \sin \beta_n \varphi_1) \\ \frac{1}{\mu} D_n &= B_n = \frac{2}{\Delta} (a_n \cos \beta_n \varphi_2 - b_n \cos \beta_n \varphi_1) \end{aligned} \quad (3.7)$$

где

$$\Delta(\beta_n) = (\mu + 1) \sin(\varphi_1 + \varphi_2) \beta_n - (\mu - 1) \sin(\varphi_1 - \varphi_2) \beta_n \quad (3.8)$$

Согласно условию подбора чисел β_n $\Delta(\beta_n) \neq 0$. Подставляя значения коэффициентов из (3.7) в (3.5), получим решения уравнений (3.2), удовлетворяющие условиям (3.3). Заменяем $f_i(\varphi)$ в (1.2) функциями $f(\varphi) - f'_i(\varphi)$, где $f'_i(\varphi)$ — значения $V_i(r, \varphi)$ при $r = 1$. Тогда $T_i(r, \varphi)$ будут решениями стационарной задачи теплопроводности для составного сектора, когда на дуговых и радиальных частях контура задана температура, которая в рассматриваемой области может быть представлена в следующем виде:

$$T_1(r, \varphi) = T_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^{\beta_n} (A_n \cos \beta_n \varphi + B_n \sin \beta_n \varphi) + \sum_{n=1}^{\infty} E_n r^{\lambda_n} U_{1n}(\varphi) \quad (3.9)$$

$$(0 \leq r \leq 1, \quad 0 \leq \varphi \leq \varphi_1)$$

$$T_2(r, \varphi) = T_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^{\beta_n} (C_n \cos \beta_n \varphi + D_n \sin \beta_n \varphi) + \sum_{n=1}^{\infty} E_n r^{\lambda_n} U_{2n}(\varphi) \quad (3.10)$$

$$(0 \leq r \leq 1, \quad -\varphi_2 \leq \varphi \leq 0)$$

где

$$U_{1n}(\varphi) = \sin \lambda_n \varphi - \operatorname{tg} \lambda_n \varphi_1 \cos \lambda_n \varphi, \quad (0 \leq \varphi \leq \varphi_1)$$

$$U_{2n}(\varphi) = \mu \sin \lambda_n \varphi - \operatorname{tg} \lambda_n \varphi_1 \cos \lambda_n \varphi, \quad (-\varphi_2 \leq \varphi \leq 0)$$

Отметим, что решение задачи теплопроводности для составного сектора может быть представлено в виде (3.9) и (3.10) при более общих граничных условиях, например, когда на границе области задан подвод тепла или на некотором участке границы задан подвод тепла, а на остальном — температура.

Определение распределения температуры в составном секторе необходимо для исследования полей температурных напряжений в окрестности края поверхности соединения составного элемента.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 22 X 1970

Թ. Կ. ԱԿԵՄԱՆՅԱՆ

ՍՏԱՅԻՆԱԲ ԶԵՐՄԱՍՏԻՃԱՆԱՅԻՆ ԳԱՇՏԸ ԲԱՂԱԳՐՅԱԼ ՇՐՋԱՆԱՅԻՆ
ՍԵԿՏՈՐՈՒՄ

Ա մ փ ո փ ո մ

Գիտարկվում է հարթ, ստացիոնար ջերմաստիճանային դաշտի որոշման խնդիրը երկու տարբեր նյութերից պատրաստված բաղադրյալ շրջանային սեկտորում:

Ջերմաստիճանի բաշխումը ներկայացվում է համապատասխան երկին-տերվայային կորային խնդրի սեփական ֆունկցիաների շարքի տեսքով:

Որոշված է ջերմաստիճանի բաշխումը $\varphi_1 = 45^\circ$, $\varphi_2 = 135^\circ$ դեպքում, սեկտոր կազմող նյութերի ջերմահաղորդականության գործակիցների հարաբերության որոշ արժեքների համար:

STATIONARY TEMPERATURE FIELD IN A COMPOSITE
CIRCULAR SECTOR

R. K. ALEXANIAN

S u m m a r y

The problem of a plane stationary temperature field in a composite circular sector made of two different materials is considered.

The temperature distribution is represented as a series of eigenfunctions of a corresponding two-interval boundary problem.

The temperature distribution at $\varphi = 45^\circ$, $\varphi = 135^\circ$ is determined for some values of the ratio of thermal conduction coefficients for the sector materials.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Лыков А. В. Теория теплопроводности. Изд. Высшая школа, М., 1967.
2. Гринберг Г. А. Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений. Изд. АН СССР, М., 1948.
3. Арутюнян Н. Х. и Абрамян Б. А. Кручение упругих тел. Физматгиз, М., 1963.
4. Минасян Р. С. Об одной задаче установившегося распространения тепла в составном параллелепипеде. Докл. АН Арм.ССР, т. 38, № 2, 1964.
5. Минасян Р. С. О плоском установившемся течении тепла в составном цилиндре при наличии теплообмена с двумя различными окружающими средами. Докл. АН Арм.ССР, т. 34, № 5, 1964.
6. Геворкян С. Х. Исследование особенностей решений в некоторых задачах теории упругости анизотропного тела. Изв. АН Арм.ССР, Механика, т. XXI, № 4, 1968.
7. Винер Н. и Пели Р. Преобразования Фурье в комплексной области. Изд. Наука, М., 1964.
8. Карслоу Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел. Изд. Наука, М., 1964.
9. Градштейн И. С. и Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Физматгиз, М., 1962.