

Г. А. БАБАДЖАНЯН, А. Е. ДАНИЕЛЯН

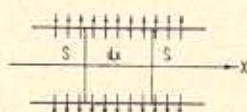
## НЕУСТАНОВИВШЕЕСЯ ДВИЖЕНИЕ РЕАЛЬНОГО ГАЗА В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ТРУБЕ С ПРОНИЦАЕМЫМИ СТЕНКАМИ

Решение задачи о неустановившемся движении реального газа по длинному газопроводу с учетом пористости газопровода имеет большое теоретическое и практическое значение.

В настоящей работе при помощи численных методов исследуется нестационарное движение реального газа в цилиндрической трубе с проницаемыми стенками. Определяются законы распределений давления, скорости и плотности, а также изменение расхода газа в газопроводе, в зависимости от заданного закона расхода в конце газопровода.

### § 1. Дифференциальные уравнения движения. Начальные и граничные условия

Рассмотрим нестационарное, изотермическое движение реального газа в длинном газопроводе с проницаемыми стенками. Движение газа принимается одномерным [1].



Фиг. 1.

Скорость отсоса принимаем пропорциональной давлению, то есть

$$v = \alpha p$$

где  $\alpha$  — коэффициент пропорциональности, зависящий от степени проницаемости стенок трубы.

Задача в такой постановке описывается системой дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} -\frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{\xi \rho u^2}{8\delta} \\ -\frac{\partial \rho}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{2\alpha p}{r_0} \rho \\ p &= \rho g R T, \quad G = g \rho u \end{aligned} \quad (1.1)$$

где  $p$ ,  $u$  и  $\rho$  — соответственно средние по сечению давление, скорость и плотность газа,

$\xi$  — безразмерный коэффициент сопротивления,

$\delta$  — гидравлический радиус сечения трубы,

$R$  — газовая постоянная,

$T$  — абсолютная температура,

$g$  — ускорение силы тяжести,

$r_0$  — радиус трубы,

$G$  — весовой расход,

$s$  — площадь поперечного сечения трубы.

Требуется определить давление, плотность, скорость и расход газа в любой момент времени в любом сечении газопровода при нестационарном режиме работы, обусловленном переменным потреблением газа в сутки.

Система дифференциальных уравнений (1.1) приводится к следующему нелинейному уравнению относительно квадрата давления:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = \sqrt{-\frac{\xi}{4\delta gRT} \frac{1}{P} \frac{\partial P}{\partial x}} \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{aP}{r_0} \sqrt{-\frac{4\xi}{gRT\delta} \frac{\partial P}{\partial x}} \quad (1.2)$$

где

$$P(x, t) = p^2(x, t)$$

Решим уравнение (1.2) при следующих граничных и начальных условиях:

$$\text{при } x = 0 \quad P = P_n = \text{const}$$

$$\text{при } x = L \quad \frac{\partial P}{\partial x} = -\frac{RT\xi}{4g\delta s^2} G^2(t) \quad (1.3)$$

$$\text{при } t = 0 \quad P = P_0(x)$$

Здесь  $G(t)$  — заданная функция, характеризующая закон изменения расхода в конце трубопровода;

$P_0(x)$  — функция, показывающая закон изменения квадрата давления вдоль трубопровода при стационарном режиме;

$L$  — длина трубопровода.

## § 2. Определение функции $P_0(x)$

Стационарное одномерное движение реального газа в цилиндрической трубе с провицаемыми стенками описывается системой дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} -\frac{dp}{dx} &= \frac{\xi \rho u^2}{8\delta} \\ \frac{d}{dx}(\rho u) + \frac{2ap}{r_0} p &= 0 \\ p &= \rho gRT \end{aligned} \quad (2.1)$$

Систему (2.1) легко привести к нелинейному обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка относительно квадрата давления

$$\frac{d^2 P}{dx^2} = \frac{aP}{r_0} \sqrt{-\frac{4z}{gRT_0} \frac{dP}{dx}} \quad (2.2)$$

Уравнение (2.2) можно привести к квадратуре.

Решение этого уравнения выражается через функцию Вейерштрасса.

Так как основная задача, то есть уравнение (1.2) решается численным методом, то считаем целесообразным уравнение (2.2) решать численно и применить результат как начальное условие для задачи (1.2) — (1.3).

Итак, стационарная задача приводится к решению уравнения (2.2) с граничными условиями

$$\begin{aligned} P &= P_n \quad \text{при } x = 0 \\ P &= P_k \quad \text{при } x = L \end{aligned} \quad (2.3)$$

где  $P_n$  и  $P_k$  — значения квадратов давления в начале и конце трубопровода.

Приведя уравнение (2.2) и граничные условия (2.3) к безразмерному виду, решаем методом проб и ошибок [2].

Имеем

$$\begin{aligned} P'' &= 2aP \sqrt{-P'} \\ P &= 1 \quad \text{при } x = 0 \\ P &= \frac{P_k}{P_n} \quad \text{при } x = 1 \end{aligned} \quad (2.4)$$

где

$$a = \frac{z}{r_0} \sqrt{\frac{4L^2 P_n}{gRT_0}}$$

Обозначим  $\sqrt{-P'} = |z|$  или  $P' = -z^2$

$$P'' = -2zz'$$

Подставляя в (2.4), получаем

$$z' = -aP \frac{|z|}{z}$$

Уравнение (2.4) заменяем системой двух дифференциальных уравнений первого порядка

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dx} &= -z^2 \\ \frac{dz}{dx} &= -aP \frac{|z|}{z} \end{aligned} \quad (2.5)$$

Обозначим  $z(0)$  через  $\lambda$  и попробуем найти два таких значения  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  ( $\lambda_1 < \lambda < \lambda_2$ ), чтобы

$$\text{для } \lambda_1: P(1) < \frac{P_x}{P_n}; \quad \text{для } \lambda_2: P(1) > \frac{P_x}{P_n} \quad (2.6)$$

Так как  $P(1)$  есть непрерывная функция от  $\lambda$ , то можно методом проб быстрее сузить длину отрезка  $[\lambda_1 - \lambda_2]$  и найти такое значение  $\lambda$ , при котором  $P(1)$  с желаемой точностью равняется  $\frac{P_x}{P_n}$ .

Решение уравнения (2.4) для различных значений  $\alpha$  приводится в виде таблицы.

Таблица

№№	$x$	$\alpha=5.6 \cdot 10^{-8}$ м <sup>3</sup> /кг·сек	$\alpha=5.6 \cdot 10^{-6}$ м <sup>3</sup> /кг·сек	$\alpha=5.6 \cdot 10^{-4}$ м <sup>3</sup> /кг·сек	$\alpha=5.6 \cdot 10^{-3}$ м <sup>3</sup> /кг·сек
-1	-0.025	1.02121914	1.02122988	1.02278533	1.03666673
0	0.025	0.97878086	0.97877012	0.97721467	0.96333327
1	0.075	0.93634259	0.93631367	0.93198412	0.89417516
2	0.125	0.89390438	0.89386145	0.88718765	0.83008584
3	0.175	0.85146620	0.85141327	0.84280244	0.77052924
4	0.225	0.80902505	0.80896893	0.79880616	0.71503133
5	0.275	0.76658996	0.76652826	0.75517694	0.66317159
6	0.325	0.72415189	0.72409106	0.71189332	0.61457585
7	0.375	0.68171385	0.68165714	0.66893422	0.56891021
8	0.425	0.63927585	0.63922629	0.62627895	0.52587569
9	0.475	0.59683789	0.59679833	0.58390715	0.48520381
10	0.525	0.55439992	0.55437308	0.54179880	0.44665265
11	0.575	0.51196201	0.51195034	0.49993417	0.41000351
12	0.625	0.46952411	0.46952990	0.45829378	0.37505795
13	0.675	0.42708623	0.42711159	0.41685845	0.34163523
14	0.725	0.38464837	0.38469521	0.37560918	0.30957013
15	0.775	0.34221053	0.34228057	0.33452721	0.27871090
16	0.825	0.29977271	0.29986746	0.29359395	0.24891757
17	0.875	0.25733490	0.25745572	0.25279099	0.22006034
18	0.925	0.21489717	0.21504514	0.21210006	0.19201825
19	0.975	0.17245931	0.17263554	0.17150299	0.16467788
20	1.025	0.13008145	0.13022646	0.13096497	0.13779647

### § 3. Решение задачи (1.2)–(1.3)

Рассмотрим модельную задачу

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{1}{M(x, t)} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - N(x, t) \frac{\partial \Phi}{\partial x} - H(x, t) \Phi + S(x, t) \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} \Phi(x, 0) &= f(x) \\ \Phi(0, t) &= \varphi(t) \\ \frac{\partial \Phi}{\partial x} \Big|_{x=1} &= \psi(t) \end{aligned} \quad (3.2)$$

Возьмем сетку узлов:

$$\begin{aligned} x_i &= \left(i + \frac{1}{2}\right)h; \quad t_j = jk \\ \left(i = -1, 0, 1, 2, \dots, N; \quad j = 0, 1, 2, \dots; \quad h = \frac{1}{N}\right) \end{aligned} \quad (3.3)$$

и для внутреннего узла  $(i, j)$  запишем разностное уравнение

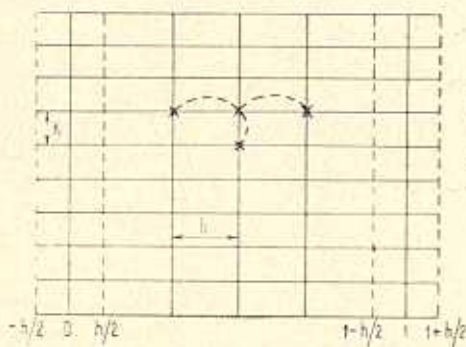
$$\begin{aligned} \frac{\Phi_{ij} - \Phi_{i, j-1}}{k} &= \frac{1}{M_{ij}} \frac{\Phi_{i+1, j} - 2\Phi_{i, j} + \Phi_{i-1, j}}{h^2} - \\ &- N_{ij} \frac{\Phi_{i, j} - \Phi_{i-1, j}}{h} - H_{i, j} \Phi_{i, j} + S_{i, j} \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$(i = 0, 1, 2, \dots, N-1; \quad j = 1, 2, 3, \dots)$$

аппроксимирующее уравнение (3.1) в узле  $(i, j)$  с точностью до  $O(k + h^2)$ .

Здесь  $h$  — шаг по переменной  $x$ , а  $k$  — шаг по переменной  $t$ .

Схема разбиения показана на фиг. 2.



Фиг. 2.

Выбор шага по времени  $k$  производится в зависимости от шага по переменной  $x$ , сохраняя условие устойчивости конечно-разностной схемы. Как показано на фиг. 2, для решения данной задачи применена устойчивая, неявная разностная схема [3].

Аппроксимации начальных и граничных условий будут:

$$\begin{aligned} \Phi(x_i, 0) &= f(x_i) \quad (i = -1, 0, 1, 2, \dots, N) \\ \Phi(0, t_j) &= \varphi(t_j) \quad (j = 1, 2, 3, \dots) \\ \frac{\Phi_{N, j} - \Phi_{N-1, j}}{h} &= \psi(t_j) \quad (j = 1, 2, 3, \dots) \end{aligned} \quad (3.5)$$

Решение задачи (3.4)–(3.5) производим методом прогонки [4]. Видоизменив уравнение (3.4), получим

$$\begin{aligned} \Phi_{i+1, j} - \left( 2 + \frac{h^2}{k} M_{i, j} + hM_{i, j}N_{i, j} + h^2M_{i, j}H_{i, j} \right) \Phi_{i, j} + \\ + (1 + hM_{i, j}N_{i, j}) \Phi_{i-1, j} + \frac{h^2M_{i, j}}{k} \Phi_{i, j-1} + h^2M_{i, j}S_{i, j} = 0 \end{aligned} \quad (3.6)$$

которое при  $j = m$  принимает вид

$$\Phi_{i+1, m} - A_{i, m} \Phi_{i, m} + C_{i, m} \Phi_{i-1, m} + B_{i, m} = 0 \quad (3.7)$$

где

$$A_{i, m} = 2 + \frac{h^2}{k} M_{i, m} \left( 1 + \frac{k}{h} N_{i, m} + kH_{i, m} \right)$$

$$C_{i, m} = 1 + hM_{i, m}N_{i, m}$$

$$B_{i, m} = \frac{h^2}{k} M_{i, m} (\Phi_{i, m-1} + kS_{i, m})$$

$$(m = 1, 2, 3, \dots)$$

Будем перегонять левое граничное условие в правый граничный узел, то есть будем находить такие  $D_{i, m}$  и  $E_{i, m}$ , чтобы при всех  $i = 0, 1, 2, \dots, N$

$$\Phi_{i-1, m} = D_{i, m} \Phi_{i, m} + E_{i, m} \quad (3.8)$$

Подставляя  $\Phi_{i-1, m}$  из (3.8) в (3.7), будем иметь

$$\Phi_{i+1, m} - A_{i, m} \Phi_{i, m} + C_{i, m} (D_{i, m} \Phi_{i, m} + E_{i, m}) + B_{i, m} = 0$$

или, разрешая относительно  $\Phi_{i, m}$

$$\Phi_{i, m} = D_{i+1, m} \Phi_{i+1, m} + E_{i+1, m} \quad (3.9)$$

где

$$D_{i+1, m} = \frac{1}{A_{i, m} - C_{i, m} D_{i, m}} \quad (3.10)$$

$$E_{i+1, m} = (B_{i, m} + C_{i, m} E_{i, m}) D_{i+1, m} \quad (3.11)$$

Зная  $A_{i, m}$ ,  $B_{i, m}$ ,  $C_{i, m}$ , находим с помощью рекуррентных соотношений (3.10) и (3.11)  $D_{i, m}$ ,  $E_{i, m}$  и, далее, с помощью (3.8) обратной прогонкой находим последовательно  $\Phi_{i-1, m}$  ( $i = N-1, N-2, \dots, 0$ ).

Вернемся конкретно к задаче (1.2)–(1.3).

Имеем

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = \sqrt{-\frac{\xi}{4\sigma gRT} \frac{1}{P} \frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial P}{\partial t}} + \frac{2P}{r_0} \sqrt{-\frac{\xi}{2\sigma gRT} \frac{\partial P}{\partial x}}$$

или

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{-\frac{\xi}{4\gamma gRT} \frac{1}{P} \frac{\partial P}{\partial x}}} \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} - \frac{\sqrt{2} \alpha}{r_0} P^{3/2} \quad (3.12)$$

Обозначим

$$\sqrt{-\frac{\xi}{4\gamma gRT} \frac{1}{P} \frac{\partial P}{\partial x}} = M(x, t)$$

$$\frac{\sqrt{2} \alpha}{r_0} \sqrt{P} = H(x, t)$$

Уравнение (3.12) принимает вид

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{1}{M(x, t)} \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} - H(x, t) P \quad (3.13)$$

Для удобства вычислений уравнение (3.13), граничные и начальные условия (1.3) предварительно приводим к безразмерному виду с помощью соотношений

$$P = P_0 P', \quad x = Lx', \quad t = t_0 t' \quad (3.14)$$

где  $P_0$  — квадрат давления в начале трубопровода,

$L$  — характерная длина (длина трубопровода),

$t_0$  — характерное время.

Сравнивая уравнение (3.13) с уравнением (3.1), замечаем, что в данном случае  $N(x, t) = 0$ ,  $S(x, t) = 0$ , а  $M(x, t)$  и  $H(x, t)$  определяются вышенаписанными формулами, аппроксимация которых в узле  $(i, j)$  будет:

$$M_{i,j} = \sqrt{-\frac{\xi}{4\gamma gRT} \frac{1}{P_{i,j-1}} \frac{P_{i,j-1} - P_{i-1,j-1}}{h}} \quad (3.15)$$

$$H_{i,j} = \frac{\sqrt{2} \alpha}{r_0} \sqrt{P_{i,j-1}} \quad (3.16)$$

Следовательно, вышеизложенный разностный метод решения модельной задачи (3.1)–(3.2) вполне применим для решения задачи (1.2)–(1.3). С этой целью на основе формул, соответствующих формулам (3.6)–(3.11), была составлена программа на ЭВМ „Раздан-3“, реализующая метод прогонки.

Определяя давление из уравнения (1.2), можно вычислить плотность, скорость и расход газа в любом сечении газопровода для любого момента времени по формулам:

$$\rho(x, t) = \frac{1}{gRT} p(x, t) \quad (3.17)$$

$$u(x, t) = \sqrt{-\frac{8\gamma gRT}{\xi} \frac{1}{p} \frac{\partial p}{\partial x}} \quad (3.18)$$

$$G_1(x, t) = \frac{S}{RT} p(x, t) u(x, t) \quad (3.19)$$

$$G_2(x, t) = \frac{2\pi r_0^2}{RT} p^2(x, t) \quad (3.20)$$

где  $G_1(x, t)$  — расход газа, протекающего через сечение  $S$  со скоростью  $u$ ,

$G_2(x, t)$  — расход газа, протекающего через пористую боковую поверхность цилиндрической трубы единичной длины со скоростью  $v = \alpha p$ .

#### § 4. Численный пример

Для вычисления численного примера были использованы метод вычисления и данные работы [5], кроме длины трубопровода, которую в этом случае приняли 10 км ( $L = 10$  км).

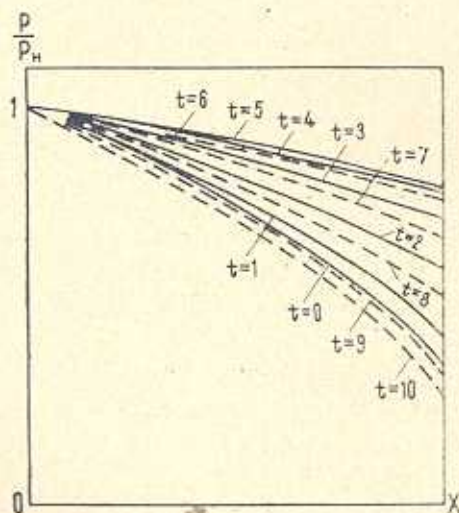
Интервал  $[0; 1]$ , соответствующий длине газопровода, разбивается на 20 участков, то есть

$$h = 0.05, \text{ а } k = 0.01$$

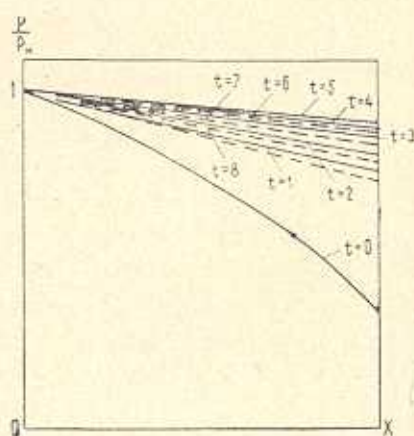
Для проверки точности вычислений задачи решаем, уменьшая шаги  $h$  и  $k$  вдвое, вчетверо, и сравниваем полученные результаты. Совпадение с достаточной степенью точности результатов говорит о практической сходимости метода.

Вычисления произведены для случаев

$$\alpha = 0; 5.6 \cdot 10^{-8}; 5.6 \cdot 10^{-6}; 5.6 \cdot 10^{-4}; 5.6 \cdot 10^{-3}$$



Фиг. 3.

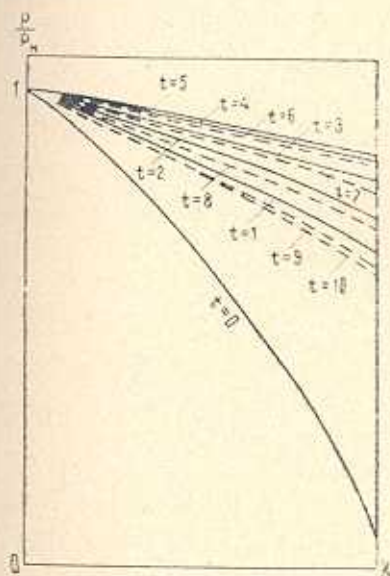


Фиг. 4.

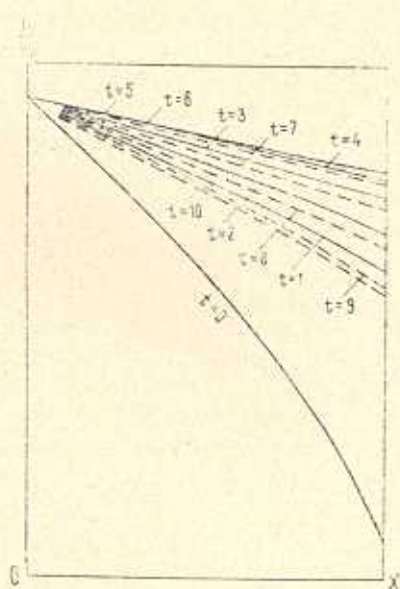
Распределения давления по длине газопровода в любой момент времени приведены на фиг. 3, 4, 5, 6, 7.



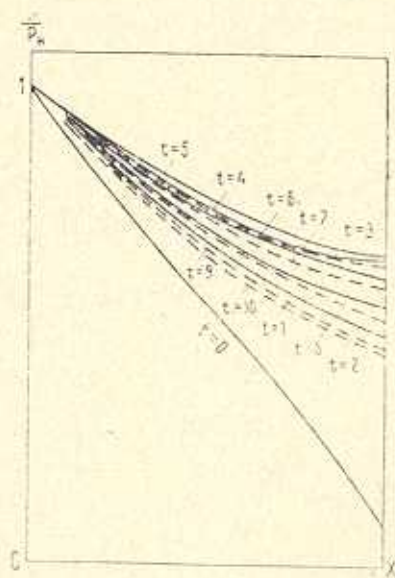
При  $\alpha = 0$  получаем результаты в более уточненном виде. Здесь имеем в виду тот факт, что при выводе уравнения (1.2) из системы уравнений (1.1), в отличие от других работ, никаких допущений не делали. На основании полученных результатов можно сделать следующие выводы.



Фиг. 5.



Фиг. 6.



Фиг. 7.

1. В рассматриваемом интервале значений  $\alpha$  перепад давления по длине пористой трубы увеличивается. Это обстоятельство подтверждает экспериментальные результаты работы [6].

2. Значение давления в одинаковых сечениях для пористой трубы больше, чем значение его для непроницаемой трубы.

3. Давление при увеличении коэффициента  $\alpha$  до некоторого критического значения  $\alpha_{кр}$  увеличивается, после чего начинает падать.

Ереванский государственный  
университет

Поступила 15 VII 1971

Պ. Հ. ԲԱԲԱԶՅԱՆԻ, Լ. Ե. ԳԱՆԵԼԻԱՆԻ

ԻՐԱԿԱՆ ԳԱԶԻ ՈՂ-ՍՏԱՅԻՈՆԱՐ ՇԱՐՔՈՒԹՅՈՒՆ ԽԱԿՈՏԿԵՆ ՊԱՏԵՐՈՎ  
ԳԼԱՆԱՅԻՆ ԽՈՂՈՎԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

Ա մ ֆ ո լ ո լ ո լ

Իրատրված է իրական գազի ու-ստացիոնար, իզոթերմ շարժումը ծաղատկեն պատկերով զլանային խողովակում: Որոշվում է ճնշման բաշխման օրենքը ծակոտկենության գործակցի տարբեր արժեքների համար:

Խնդիրը բերվում է երկրորդ կարգի մասնական ածանցյալներով ուղղային դիֆերենցիալ հավասարման ինտեգրմանը՝ խառը եզրային պայմաններով: Լուծումը կատարվում է թվային մեթոդներով: Այդ նպատակով կազմված է ծրագիր «Հրազդան-3» էլեկտրոնային հաշվիչ մեքենայի համար:

Որոշվում է գազի ճնշման բաշխման օրենքը ժամանակի տարբեր ակրն-թարթների համար:

Լուծված է թվային օրինակ: Կառուցված են ճնշման գրաֆիկները ժամանակի տարբեր պահերի և ծակոտկենության գործակցի տարբեր արժեքների համար:

## UNSTEADY MOTION OF THE REAL GAS IN A CYLINDRICAL TUBE WITH PERMEABLE WALLS

G. H. BABADJANIAN, L. E. DANIELIAN

### S u m m a r y

Unsteady isothermal motion of the real gas in a cylindrical permeable tube is considered. The problem is reduced to the solution of a second order nonlinear differential equation in partial derivations with mixed boundary conditions.

The solution is obtained by a numerical method on the "Razdan-3" computer.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Райзберг Б. А. и Самсонов К. П. О применимости одномерной модели к описанию стационарного течения вязкой несжимаемой жидкости в цилиндрической трубе с пористыми стенками. Инж. ж., т. 4, вып. 1, 1964.
2. Хеммин Р. В. Численные методы. Изд. Наука, Физматгиз, ИЛ, 1968.
3. Рихтмайер Р. Д. Разностные методы решения краевых задач. ИЛ, М., 1960.
4. Березин И. С. и Жидков Н. П. Методы вычислений, т. 11. Физматгиз, М., 1960.
5. Даниелян Л. Е. Неустановившееся движение реального газа в длинном газопроводе. Изв. АН АрмССР, Механика, т. 23, № 1, 1970.
6. Коченов И. С. и Баранова Л. И. Течение в каналах с пористыми стенками. Тепло- и массоперенос, т. 1, Минск, 1965.
7. Смирнов А. С., Генкина Л. А., Хушпулян М. М., Чернов Д. А. Транспорт и хранение газа. М., 1962.