ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXIV, № 5, 1971 Механика

Г. А. МОВСИСЯН

К ОПРЕДЕЛЕНИЮ ЧАСТОТ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ПЛАСТИН ПРИ СМЕШАННЫХ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ

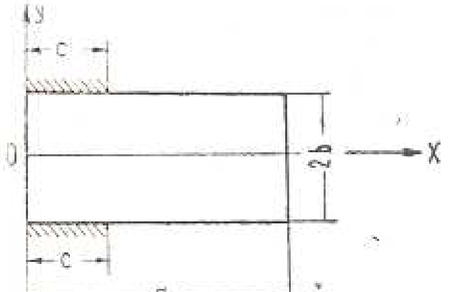
В настоящей работе определяются частоты собственных колебаний прямоугольной пластинки, когда две ее противоположные стороны свободно оперты, а на двух других сторонах заданы смешанные условия. Формы колебаний ищутся в виде рядов Фурье. Для постоянных интегрирования, после удовлетворения граничным условиям, получаются парные ряды-уравнения, которые приводятся к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений. Частоты собственных колебаний определяются из условия приравнивания нулю определителя этой системы. Доказывается, что процесс итераций сходится.

Существуют работы, посвященные решению задачи изгиба пластины при смешанных граничных условиях, а Б. Н. Бубликом [1] методом сеток решена задача об определении частот собственных колебаний прямоугольной пластинки с разрезами, вдоль которых, как и по всему контуру, пластинка свободно оперта.

1. Дифференциальное уравнение колебаний пластины берется в виде

$$D\nabla^2\nabla^2 w + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \tag{1.1}$$

где $\rho = \dfrac{\gamma}{g}$ — плотность материала пластинки, h — ее толщина, D — цилиндрическая жесткость.



Фиг. 1

Согласно предположению имеем следующие граничные условия (фиг. 1):

$$w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \text{ при } x = 0 \text{ и } x = a \tag{1.2}$$

$$\left.\begin{aligned} w = \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \quad \text{при} \quad 0 \leqslant x < c \\ w = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad \text{при} \quad c < x \leqslant a \end{aligned}\right| \quad \text{при} \quad y = \pm b \tag{1.3}$$

2. Решение (1.1) ищем в виде

$$w(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} f_m(y) \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \omega t \tag{2.1}$$

Подставив (2.1) в уравнение (1.1), получаем следующее дифференциальное уравнение:

$$f_m^{IV}(y) - 2\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 f_m''(y) + \left[\left(\frac{m\pi}{a}\right)^4 - \rho \frac{h\omega^2}{D}\right] f_m(y) = 0 \tag{2.2}$$

общее решение которого будет

$$f_m(y) = C_m^{(1)} \operatorname{ch} k_1 y + C_m^{(2)} \cos k_2 y + C_m^{(3)} \operatorname{sh} k_1 y + C_m^{(4)} \sin k_2 y \tag{2.3}$$

где

$$k_1 = \sqrt{\omega \sqrt{\frac{\rho h}{D}} + \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2}, \quad k_2 = \sqrt{\omega \sqrt{\frac{\rho h}{D}} - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2} \tag{2.4}$$

Удовлетворяя граничным условиям (1.2) и (1.3), получаем следующие выражения

$$\sum_{m=1}^{\infty} C_m^{(2)} (k_1 \operatorname{th} k_1 b \cos k_2 b + k_2 \sin k_2 b) \sin \frac{m\pi}{a} x = 0 \quad (0 \leqslant x < c)$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} C_m^{(2)} \cos k_2 b \, (k_1^2 + k_2^2) \sin \frac{m\pi}{a} x = 0 \quad (c < x \leqslant a) \tag{2.5}$$

Введя обозначения

$$X_m = C_m^{(2)} \cos k_2 b \sqrt{\frac{\rho h}{D}} \frac{\omega}{m} \tag{2.6}$$

и

$$\varphi = \frac{\pi x}{a}, \quad \xi = \frac{\pi c}{a}$$

и учитывая, что

$$k_1^2 + k_2^2 = 2 \sqrt{\frac{\rho h}{D}} \, \omega \tag{2.7}$$

парные уравнения (2.5) можно свести к виду

$$\sum_{m=1}^{\infty} X_m (k_1 \operatorname{th} k_1 b + k_2 \operatorname{tg} k_2 b) \frac{m}{\omega} \sqrt{\frac{D}{\rho h}} \sin m\varphi = 0 \quad (0 < \varphi < \beta)$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} m X_m \sin m\varphi = 0 \quad (\beta < \varphi < \pi) \tag{2.8}$$

После некоторых преобразований система (2.8) приводится к виду

$$\sum_{m=1}^{\infty} X_m (1 - N_m) \sin m\varphi = 0 \quad (0 < \varphi < \beta)$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} m X_m \sin m\varphi = 0 \quad (\beta < \varphi < \pi) \tag{2.9}$$

где

$$N_m = 1 - (k_1 \operatorname{th} k_1 b + k_2 \operatorname{tg} k_2 b) \frac{m}{\omega} \sqrt{\frac{D}{\rho h}} \frac{\pi}{a} \tag{2.10}$$

Пользуясь формулой $\operatorname{tg} ix = i \operatorname{th} x$ $(i^2 = -1)$ нетрудно показать, что при $m \to \infty$ N_m имеет порядок

$$N_m = \frac{\alpha}{m^4} + O\left(\frac{1}{m^6}\right), \text{ где } \alpha = \frac{1}{4} \omega^2 a^4 \frac{\rho h}{D} \tag{2.11}$$

Продифференцировав первое уравнение (2.9) по φ, умножим на $\cos \varphi/2 (\cos\varphi - \cos\theta)^{-1/2}$, а затем проинтегрируем по φ от 0 до θ. Второе уравнение (2.9) умножим на $\cos\varphi/2 (\cos\theta - \cos\varphi)^{-1/2}$ и проинтегрируем по φ от θ до π. После перечисленных действий, воспользовавшись формулами для интегральных представлений полиномов Лежандра [2]

$$y_m(\cos\theta) = P_{m-1}(\cos\theta) + P_m(\cos\theta) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \int_0^{\theta} \frac{\cos m\varphi \cos\varphi/2 \, d\varphi}{(\cos\varphi - \cos\theta)^{1/2}} =$$

$$= \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \int_{\theta}^{\pi} \frac{\sin m\varphi \cos\varphi/2 \, d\varphi}{(\cos\theta - \cos\varphi)^{1/2}}$$

$$z_m(\cos\theta) = P_{m-1}(\cos\theta) - P_m(\cos\theta) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \int_0^{\theta} \frac{\sin m\varphi \sin\varphi/2 \, d\varphi}{(\cos\varphi - \cos\theta)^{1/2}} =$$

$$= \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \int_{\theta}^{\pi} \frac{\cos m\varphi \sin\varphi/2 \, d\varphi}{(\cos\theta - \cos\varphi)^{1/2}} \tag{2.12}$$

парные ряды—уравнения (2.9) можно свести к виду

$$\sum_{m=1}^{\infty} mX_m (1 - N_m)\, y_m(\cos\theta) = 0 \qquad (0 \leqslant \theta \leqslant \beta)$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} mX_m\, y_m(\cos\theta) = 0 \quad (\beta < \theta \leqslant \pi) \tag{2.13}$$

Согласно [3] для определения неизвестных коэффициентов X_m получим следующую бесконечную систему линейных однородных алгебраических уравнений

$$X_n = \sum_{m=1}^{\infty} a_{mn} X_m \quad (n = 1, 2, 3, \cdots\cdots) \tag{2.14}$$

где

$$a_{nm} = \frac{mN_m}{2} \int_0^{\beta} y_m(\cos\theta)\, y_n(\cos\theta) \operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\, d\theta =$$

$$= \frac{mN_m}{2} \frac{ny_m(\cos\beta)\, z_n(\cos\beta) - my_n(\cos\beta)\, z_m(\cos\beta)}{n^2 - m^2}$$

$$a_{nn} = \frac{nN_n}{2} \int_0^{\beta} y_n^2(\cos\theta) \operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\, d\theta = \frac{N_n}{4} \Big\{ 2 - 2P_{n-1}(\cos\beta)\, P_n(\cos\beta) +$$

$$+ P_{n-1}^2(\cos\beta) - P_n^2(\cos\beta) - 4 \sum_{k=1}^{n-1} P_k(\cos\beta)\, [\cos\beta P_k(\cos\beta) -$$

$$- P_{k-1}(\cos\beta)] \Big\} \quad (n = 2, 3, 4, \cdots\cdots)$$

$$a_{11} = \frac{N_1}{2} \int_0^{\beta} y_1^2(\cos\theta) \operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\, d\theta = \frac{N_1}{4} [3 - \cos\beta(\cos\beta + 2)] \tag{2.15}$$

Для существования ненулевых решений коэффициентов X_n необходимо, чтобы определитель системы уравнений

$$\sum_{m=1}^{\infty} a_{nm} X_m - X_n = 0 \quad (n = 1, 2, 3, \cdots\cdots) \tag{2.16}$$

равнялся нулю. Из этого же условия и найдутся частоты собственных колебаний.

Докажем, что процесс итераций сходится. Так как функции $y_m(x)$ и $z_m(x)$ являются линейными комбинациями полиномов Лежандра, то при больших m они будут стремиться к нулю как $P_m(x)$ [2], то есть

$$\left.\begin{matrix} |y_m(x)| \\ |z_m(x)| \end{matrix}\right\} < \frac{2}{m^{1/2}}, \quad (m \gg 1), \quad |x| < 1 - \varepsilon \tag{2.17}$$

Учитывая (2.11) и (2.17), получим

$$\sum_{m=1}^{\infty} |a_{nm}| = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} m|N_m| \times$$

$$\times \left| \frac{n y_m(\cos\beta)\, z_n(\cos\beta) - m y_n(\cos\beta)\, z_m(\cos\beta)}{n^2 - m^2} \right| < \frac{\alpha}{n^4} +$$

$$+ \frac{\alpha}{2} \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq n}}^{\infty} \left| \frac{n y_m(\cos\beta)\, z_n(\cos\beta) - m y_n(\cos\beta)\, z_m(\cos\beta)}{m^3 n^2 - m^2} \right| <$$

$$< \frac{\alpha}{n^4} + 2\alpha \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq n}}^{\infty} \frac{\dfrac{n^{1/2}}{m^{1/2}} + \dfrac{m^{1/2}}{n^{1/2}}}{m^3 |n^2 - m^2|} =$$

$$= \frac{\alpha}{n^4} + \frac{2\alpha}{n^{1/2}} \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq n}}^{\infty} \frac{1}{m^{1/2} |n - m|} = \frac{\alpha}{n^4} + \frac{2\alpha}{n^{1/2}} \left[\sum_{m=1}^{n-1} \frac{1}{m^{1/2}(n-m)} + \right.$$

$$\left. + \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{1}{m^{1/2}(m-n)} \right] < \frac{\alpha}{n^4} + \frac{2\alpha}{n^{1/2}} \left[\frac{2}{3n} + \frac{2}{n^2} + \frac{4}{n^2 \sqrt{n-1}} + \right.$$

$$\left. + \frac{4}{3n(n-1)\sqrt{n-1}} + \frac{2}{n^2} \ln(\sqrt{n} + \sqrt{n-1})^2 \right] <$$

$$< \frac{\alpha}{n^4} + \frac{2\alpha}{n^{1/2}} \left[\frac{5}{3(n-1)} + \frac{2}{n^2} + \frac{16}{3(n-1)^{3/2}} + \right.$$

$$\left. + \frac{2}{n^2} \ln 4n \right] < \frac{\alpha}{n^{3/2}} (4 \ln 4n - 3) \qquad (2.18)$$

Таким образом, начиная с некоторого n_0 имеем

$$\sum_{m=1}^{\infty} |a_{nm}| < 1, \quad n > n_0 \qquad (2.19)$$

Следовательно [4], процесс итераций является сходящимся.

3. В качестве численного примера рассматриваются колебания пластинки, для которой $\frac{h}{b} = \frac{1}{100}$. Вычисления произведены на ЭВМ „Раздан — 3".

В табл. 1 приводятся значения безразмерной основной частоты (наименьшей) $\omega \cdot 10^6 \sqrt{\frac{\gamma h^2}{D}}$. Эти значения получены из определителя третьего порядка при различных значениях $\frac{a}{b}$ и β или, что то же самое — c.

Небезынтересно заметить, что наибольшее отклонение решений, полученных из определителя второго порядка по отношению к приведенным в таблице решениям, составляет 0.75% $\left(\text{при } \frac{a}{b}=2,\ \beta=\frac{1}{4}\pi\right)$.

Таблица 1

a/b \ β	0	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	π
$0.4\sqrt{2}$	3327	3351	3386	3402	3404
$0.5\sqrt{2}$	2200	2246	2290	2312	2314
$0.6\sqrt{2}$	1604	1646	1700	1728	1732
$\sqrt{2}$	740	779	866	918	924
2	493	536	640	715	724
$\sqrt{6}$	433	453	561	652	664

Отметим, что частоты при $\beta=0$ (то есть когда пластинка свободно оперта), получаются из условия, что

$$k_2=\frac{2m-1}{2}\frac{\pi}{b} \tag{3.1}$$

Как видно из табл. 1, с увеличением β, то есть защемления, частоты колебаний возрастают, причем это возрастание усиливается вместе с увеличением отношения $\frac{a}{b}$.

Ереванский политехнический институт
им. К. Маркса

Поступила 9 XII 1970

Գ. Ա. ՄՈՎՍԻՍՅԱՆ

ԽԱՌԸ ԵԶՐԱՅԻՆ ՊԱՅՄԱՆՆԵՐՈՎ ՈՒՂՂԱՆԿՅՈՒՆ ՍԱԼԻ ՍԵՓԱԿԱՆ ՏԱՏԱՆՈՒՄՆԵՐԻ ՀԱՃԱԽԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՈՐՈՇՄԱՆ ՇՈՒՐՋԸ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Դիտարկվում է ուղղանկյուն սալ, որի երկու կողմերը ընդունվում են հոդակապով ամրացված, իսկ մյուս երկու կողմերի համար վերցվում են խառը պայմաններ: Տատանումների ձևը որոնվում է Ֆուրյեի շարքերի տեսքով: Եզրային պայմաններին բավարարելով ինտեգրման հաստատունների համար ստացվում են զույգ շարք-հավասարումներ, որոնք բերվում են գծային հանրահաշվական հավասարումների անվերջ սիստեմի: Սեփական տատանումների հաճախականությունը որոշվում է այդ սիստեմի որոշչի զրո լինելու պայմանից: Բերված է թվային օրինակ $\frac{a}{b}$, β *մի քանի արժեքների համար:*

ON THE DEFINITION OF FREQUENCIES OF PROPER VIBRATION OF A RECTANGULAR PLATE IN MIXED BOUNDARY CONDITIONS

G. A. MOVSISIAN

S u m m a r y

In the present work the frequencies of proper vibration of a rectangular plate are determined whose two opposite sides are freely supported, with mixed boundary conditions given on its other two sides. The modes of vibration are taken as the Fourier series. For the constants of integration dual trigonometrical series are obtained from the boundary conditions, these series being reduced to an infinite system of linear algebraic equations. The frequencies of proper vibration are defined by setting the determinant of the system to zero. The process of iteration is proved to converge. A numerical example is presented.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бубляк Б. Н.* Определение частот собственных колебаний прямоугольных пластин с разрезами. Прикл. механ. Отделение математики, механики и кибернетики АН УССР, т. IV, в. 4, 1968.
2. *Лебедев Н. Н.* Специальные функции и их приложения. ГИТТА, М., 1953.
3. *Баблоян А. А.* Решение некоторых парных уравнений. ПММ, т. 31, в. 4, 1967.
4. *Загускин В. Л.* Справочник по численным методам решения уравнений. Физматгиз, М., 1960.