ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXIV, № 5, 1971 Механика

Т. П. ПЕТРЕНКО

СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ УПРУГОГО ПОЛОГО ШАРА В ЖИДКОСТИ ИЛИ ГАЗЕ

В работе определяются собственные колебания полого шара, находящегося в жидкости или газе. Полый шар предполагается упругим и изотропным. В работе используются векторные сферические функции, успешно примененные Дж. Стрэттоном к решению ряда элекродинамических задач для сферы [1]. В результате было получено, что собственные колебания полого шара, находящегося в жидкости, делятся на классы: радиальные колебания, колебания первого класса (по терминологии Lamb'a) и колебания второго класса. Таким образом, собственные колебания упругого шарового слоя делятся на три класса колебаний, аналогичных классам колебаний упругого шара [2].

Пусть в жидкость или газ помещен полый шар $R_1 \leqslant R \leqslant R_2$, который является упругим и изотропным. Внутренняя поверхность $(R = R_1)$ свободна от напряжений.

Вектор скорости во внешней среде $\vec{v}$ будет представляться формулой

$$\vec{v} = \sum_{n=0}^{n=\infty} \sum_{m=0}^{m=n} \left(A_{emn} \vec{l}^{(3)}_{emn} + A_{omn} \vec{l}^{(3)}_{omn} \right) e^{-i\omega t} \tag{1}$$

а вектор смещения в упругой оболочке $\vec{u}^{(1)}$ будет представляться формулой

$$\vec{u}^{(1)} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{m=n} \{ B_{emn} \vec{l}^{(1)}_{emn} + B_{omn} \vec{l}^{(1)}_{omn} + C_{emn} \vec{m}^{(1)}_{emn} +$$

$$+ C_{omn} \vec{m}^{(1)}_{omn} + D_{emn} \vec{n}^{(1)}_{emn} + D_{omn} \vec{n}^{(1)}_{omn} +$$

$$+ E_{emn} \vec{l}^{(2)}_{emn} + E_{omn} \vec{l}^{(2)}_{omn} + F_{emn} \vec{m}^{(2)}_{emn} + F_{omn} \vec{m}^{(2)}_{omn} +$$

$$+ G_{emn} \vec{n}^{(2)}_{emn} + G_{omn} \vec{n}^{(2)}_{omn} \} e^{-i\omega t} \tag{2}$$

Здесь $\vec{l}$, $\vec{m}$ и $\vec{n}$ — сферические векторные волновые функции [1]:

$$\vec{l}_{\substack{emn\\o}} = \frac{\partial}{\partial R} z_n(kR) P_n^m(\cos\theta) \frac{\cos}{\sin} m\varphi \, \vec{i}_1 + \frac{1}{R} z_n(kR) \times$$

$$\times \frac{\partial}{\partial \theta} P_n^m(\cos\theta) \frac{\cos}{\sin} m\varphi \, \vec{i}_2 \mp \frac{m}{R\sin\theta} z_n(kR) P_n^m(\cos\theta) \frac{\sin}{\cos} m\varphi \, \vec{i}_3 \tag{3}$$

$$\vec m_{\substack{e\\o}mn} = \mp \frac{m}{\sin\theta}\, z_n(kR)\, P_n^m(\cos\theta) \frac{\sin}{\cos} m\varphi\, \vec i_2 -$$

$$- z_n(kR)\, \frac{\partial P_n^m}{\partial\theta}\, \frac{\cos}{\sin} m\varphi\, \vec i_3 \qquad (4)$$

$$\vec n_{\substack{e\\o}mn} = \frac{n(n+1)}{kR}\, z_n(kR)\, P_n^m(\cos\theta) \frac{\cos}{\sin} m\varphi\, \vec i_1 +$$

$$+ \frac{1}{kR}\, \frac{\partial}{\partial R}\, [R z_n]\, \frac{\partial P_n^m}{\partial\theta}\, \frac{\cos}{\sin} m\varphi\, \vec i_2 \mp \frac{m}{kR\sin\theta}\, \frac{\partial}{\partial R} \times$$

$$\times [R z_n(kR)]\, P_n^m(\cos\theta) \frac{\sin}{\cos} m\varphi\, \vec i_3 \qquad (5)$$

где $\vec i_1, \vec i_2, \vec i_3$ — единичные векторы сферической системы координат; z_n — сферическая бесселева функция $\left(z_n(\rho) = \sqrt{\frac{\pi}{2\rho}}\, Z_{n+1/2}(\rho), \right.$ где $Z_{n+1/2}(\rho)$ — цилиндрическая бесселева функция полуцелого порядка$\left.\right)$, $P_n^m(\cos\theta)$ — присоединенный полином Лежандра.

Поскольку движение в жидкости потенциально, вектор скорости $\vec v$ следует представлять в виде разложения только по векторам $\vec l_{\substack{e\\o}mn}$ ($\mathrm{rot}\, \vec m = 0$ и $\mathrm{rot}\, \vec n = 0$). В выражении для вектора скорости $\vec v$ функции $\vec l$ зависят от переменной kR, а в выражении для вектора смещения $\vec u^{(1)}$ функции $\vec l$ зависят от переменной $k_p R$, а функции $\vec m$ и $\vec n$ — от переменной $k_s R$. (k, k_p, k_s — абсолютные значения волновых векторов).

Верхний индекс (1) у сферических векторных функций означает, что для этих функций будут использованы бесселевы функции первого рода, а верхний индекс (3) — функции Ханкеля первого рода. В разложение вектора скорости жидкости $\vec v$ должны входить только функции Ханкеля первого рода, так как эти функции соответствуют расходящимся волнам, затухающим на бесконечности.

Граничные условия будут иметь вид:

на внешней поверхности (при $R = R_2$):

1) $v_R^{(1)} = v_R$

2) $\sigma_{RR}^{(1)} = -p$ (5)

3) $\sigma_{R\theta}^{(1)} = 0$

4) $\sigma_{R\varphi}^{(1)} = 0$

на внутренней поверхности (при $R = R_1$):

5) $\sigma_{RR}^{(1)} = 0$

6) $\sigma_{R\theta}^{(1)} = 0$ (6)

7) $\sigma_{R\varphi}^{(1)} = 0$

Для каждого n и каждого m граничные условия дают систему уравнений. При $n = 0$ получим следующую систему из трех уравнений:

$$
\begin{aligned}
a_{11}A_{e00} + a_{12}B_{e00} + a_{13}E_{e00} &= 0 \\
a_{21}A_{e00} + a_{22}B_{e00} + a_{23}E_{e00} &= 0 \\
a_{31}A_{e00} + a_{32}B_{e00} + a_{33}E_{e00} &= 0
\end{aligned}
\tag{7}
$$

где коэффициенты a_{11}, $a_{12}, \cdots$ равны

$$a_{11} = -h_0^{(1)'}(kR_2)\,k, \quad a_{12} = -i\omega j_0'(k_pR_2)\,k_p$$

$$a_{13} = -i\omega h_0^{(1)'}(k_pR_2)\,k_p, \quad a_{21} = i\,\frac{\lambda}{\omega}\,h_0^{(1)}(kR_2)\,k^2$$

$$a_{22} = -\lambda' k_p^2 j_0(k_pR_2) - 2\mu' j_0''(k_pR_2)\,k_p^2$$

$$a_{23} = -\lambda' k_p^2 h_0^{(1)}(k_pR_2) - 2\mu' h_0^{(1)''}(k_pR_2)\,k_p^2$$

$$a_{31} = 0$$

$$a_{32} = -\lambda' j_0(k_pR_1) - 2\mu' j_0''(k_pR_1)$$

$$a_{33} = -\lambda' h_0^{(1)}(k_pR_1) - 2\mu' h_0^{(1)''}(k_pR_1)$$

Здесь

$$k = \frac{\omega}{c}, \quad k_p = \omega\sqrt{\frac{\rho^{(1)}}{\lambda' - 2\mu'}}, \quad k_s = \omega\sqrt{\frac{\rho^{(1)}}{\mu'}}$$

где $\rho^{(1)}$ и λ', μ' — коэффициенты Ламэ и плотность в упругом слое. При $n \geqslant 1$ получаем следующие семь уравнений для коэффициентов A_{emn}, B_{emn}, C_{0mn}, D_{emn}, E_{emn}, F_{0mn}, G_{emn}:

$$
\begin{aligned}
b_{11}C_{0mn} + b_{12}F_{0mn} &= 0 \\
b_{21}C_{0mn} + b_{22}F_{0mn} &= 0
\end{aligned}
\tag{8}
$$

$$
\begin{aligned}
c_{11}A_{emn} + c_{12}B_{emn} + c_{13}D_{emn} + c_{14}E_{emn} + c_{15}G_{emn} &= 0 \\
c_{21}A_{emn} + c_{22}B_{emn} + c_{23}D_{emn} + c_{24}E_{emn} + c_{25}G_{emn} &= 0 \\
c_{31}A_{emn} + c_{32}B_{emn} + c_{33}D_{emn} + c_{34}E_{emn} + c_{35}G_{emn} &= 0 \\
c_{41}A_{emn} + c_{42}B_{emn} + c_{43}D_{emn} + c_{44}E_{emn} + c_{45}G_{emn} &= 0 \\
c_{51}A_{emn} + c_{52}B_{emn} + c_{53}D_{emn} + c_{54}E_{emn} + c_{55}G_{emn} &= 0
\end{aligned}
\tag{9}
$$

где коэффициенты b_{11}, $b_{12}, \cdots$ и c_{11}, $c_{12} \cdots$ равны

$$b_{11} = \frac{\partial}{\partial R_2}\left|\frac{1}{R_2}\,j_n(k_sR_2)\right|, \quad b_{12} = \frac{\partial}{\partial R_2}\left|\frac{1}{R_2}\,h_n^{(1)}(k_sR_2)\right|$$

$$b_{21} = \frac{\partial}{\partial R_1}\left|\frac{1}{R_1}\,j_n(k_sR_1)\right|, \quad b_{22} = \frac{\partial}{\partial R_1}\left|\frac{1}{R_1}\,h_n^{(1)}(k_sR_1)\right|$$

$$c_{11} = \frac{k}{j\omega} h_n^{(1)'}(kR_2), \quad c_{12} = j_n(k_p R_2) k_p$$

$$c_{13} = \frac{n(n+1)}{k_s R_2} j_n(k_s R_2), \quad c_{14} = h_n^{(1)'}(k_p R_2) k_p$$

$$c_{15} = \frac{n(n+1)}{k_s R_2} h_n^{(1)}(k_s R_2), \quad c_{21} = i \frac{\lambda k^2}{\omega} h_n^{(1)}(kR_2)$$

$$c_{22} = [-\lambda' j_n(k_p R_2) + 2\mu' j_n''(k_p R_2)] k_p^2$$

$$c_{23} = 2\mu' \frac{n(n+1)}{k_s} \frac{\partial}{\partial R_2} \left[\frac{1}{R_2} j_n(k_s R_2) \right]$$

$$c_{24} = [-\lambda' h_n^{(1)}(k_p R_2) + 2\mu' h_n^{(1)''}(k_p R_2)] k_p^2$$

$$c_{25} = 2\mu' \frac{n(n+1)}{k_s} \frac{\partial}{\partial R_2} \left[\frac{1}{R_2} h_n^{(1)}(k_s R_2) \right]$$

$$c_{31} = 0, \quad c_{32} = [-\lambda' j_n(k_p R_1) + 2\mu' j_n''(k_p R_1)] k_p^2$$

$$c_{33} = 2\mu' \frac{n(n+1)}{k_s} \frac{\partial}{\partial R_1} \left[\frac{1}{R_1} j_n(k_s R_1) \right]$$

$$c_{34} = [-\lambda' h_n^{(1)}(k_p R_1) + 2\mu' h_n^{(1)''}(k_p R_1)] k_p^2$$

$$c_{35} = 2\mu' \frac{n(n+1)}{k_s} \frac{\partial}{\partial R_1} \left[\frac{1}{R_1} h_n^{(1)}(k_s R_1) \right]$$

$$c_{41} = 0, \quad c_{42} = 2 \frac{\partial}{\partial R_2} \left[\frac{1}{R_2} j_n(k_p R_2) \right]$$

$$c_{43} = k_s \left\{ -\frac{2}{k_s R_2} j_n'(k_s R_2) + \left[-1 + \frac{2(n^2+n-1)}{(k_s R_2)^2} \right] j_n(k_s R_2) \right\}$$

$$c_{44} = 2 \frac{\partial}{\partial R_2} \left[\frac{1}{R_2} h_n^{(1)}(k_p R_2) \right]$$

$$c_{45} = k_s \left\{ \frac{-2}{k_s R_2} h_n^{(1)'}(k_s R_2) + \left[-1 + \frac{2(n^2+n-1)}{(k_s R_2)^2} \right] h_n^{(1)}(k_s R_2) \right\}$$

$$c_{51} = 0$$

$$c_{52} = 2 \frac{\partial}{\partial R_1} \left[\frac{1}{R_1} j_n(k_p R_1) \right]$$

$$c_{53} = k \left\{ \frac{-2}{k_s R_1} j_n'(k_s R_1) + \left[-1 + \frac{2(n^2+n-1)}{(k_s R_1)^2} \right] j_n(k_s R_1) \right\}$$

$$c_{54} = 2 \frac{\partial}{\partial R_1} \left[\frac{1}{R_1} h_n^{(1)}(k_p R_1) \right]$$

$$c_{55} = k_s \left\{ \frac{-2}{k_s R_1} h_n^{(1)\prime}(k_s R_1) + \left[-1 + \frac{2(n^2+n-1)}{(k_s R_1)^2} \right] h_n^{(1)}(k_s R_1) \right\}$$

Эти уравнения получены из первого, второго, третьего, пятого и шестого граничных условий путем приравнивания в левых и правых частях раненств (5) — (6) коэффициентов при $\cos m\varphi$, и из четвертого и седьмого граничных условий путем приравнивания коэффициентов при $\sin m\varphi$.

Из системы уравнений (7) видно, что собственные колебания упругого полого шара, имеющие место при $n = 0$, представляют собой радиальные колебания, частоты которых определяются из уравнения:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0 \qquad (10)$$

Из системы уравнений (8) и системы уравнений (9) видно, что собственные колебания упругого полого шара при $n \geq 1$ делятся на два класса: 1) колебания первого класса (по терминологии Lamb'a) с частотами, определяющимися из уравнения

$$\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} = 0 \qquad (11)$$

и 2) колебания второго класса, частоты которых определяются из уравнения

$$\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} & c_{35} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} & c_{45} \\ c_{51} & c_{52} & c_{53} & c_{54} & c_{55} \end{vmatrix} = 0 \qquad (12)$$

Тремя классами колебаний (радиальные колебания, колебания первого класса и колебания второго класса) исчерпываются все возможные классы собственных колебаний полого шара. Если мы приравняем выражения при $\sin m\varphi$ в левых и правых частях первого, второго, третьего, пятого и шестого уравнений граничных условий и выражения при $\cos m\varphi$ в четвертом и седьмом уравнениях, то получим уравнения, из которых можно будет определить только известные нам уже колебания первого класса колебания второго класса и невозможно будет определить какого-либо нового класса колебаний.

Собственные колебания упругого шарового слоя делятся на три класса колебаний, аналогичных классам колебаний упругого шара. Эти классы собственных колебаний шара со свободной от напряжения поверхностью были указаны еще в работах Jaerisch'a [3] и Lamb'a [4], но только без строгого решения. В докторской диссертации Г. И. Петрашеня [5] приводится строгое решение задачи собственных колебаний упругого шара.

Запишем уравнение частот радиальных колебаний (10):

$$k_p h_0^{(1)'}(kR_2)\{[-\lambda' j_0(k_pR_2)+2\mu' j_0''(k_pR_2)][-\lambda' h_0^{(1)}(k_pR_1)+$$

$$+2\mu' h_0^{(1)''}(k_pR_1)]-[-\lambda' j_0(k_pR_1)+2\mu' j_0''(k_pR_1)][-\lambda' h_0^{(1)}(k_pR_2)+$$

$$+2\mu' h_0^{(1)''}(k_pR_2)]\}+\lambda k h_0^{(1)}(kR_2)\{j_0'(k_pR_2)[-\lambda' h_0^{(1)}(k_pR_1)+$$

$$+2\mu' h_0^{(1)''}(k_pR_1)]-h_0^{(1)'}(k_pR_2)[-\lambda' j_0(k_pR_1)+2\mu' j_0''(k_pR_1)]\}=0 \qquad (13)$$

А собственные векторы смещения в упругой оболочке, соответствующие радиальным колебаниям, будут представляться формулами

$$\vec{u}_0=a_0\{[-\lambda' h_0^{(1)}(k_pR_1)+2\mu' h_0^{(1)''}(k_pR_1)]j_0'(k_pR)-$$

$$-[-\lambda' j_0(k_pR_1)+2\mu' j_0''(k_pR_1)]h_0^{(1)'}(k_pR_1)\}\vec{i}_1 \qquad (14)$$

Запишем уравнение частот колебаний первого класса (11):

$$\frac{\partial}{\partial R_2}\left[\frac{1}{R_2}j_n(k_sR_2)\right]\frac{\partial}{\partial R_1}\left[\frac{1}{R_1}h_n^{(1)}(k_sR_1)\right]-$$

$$-\frac{\partial}{\partial R_1}\left[\frac{1}{R_1}j_n(k_sR_1)\right]\frac{\partial}{\partial R_2}\left[\frac{1}{R_2}h_n^{(1)}(k_sR_2)\right]=0 \qquad (15)$$

Собственные векторы (четные и нечетные) для этого класса колебаний представляются следующими формулами:

$$\vec{u}_{emn}=b_{emn}\left\{\frac{\partial}{\partial R_1}\left[\frac{1}{R_1}h_n^{(1)}(k_sR_1)\right]\vec{m}_{emn}^{(1)}-\frac{\partial}{\partial R_1}\left[\frac{1}{R_1}j_n(k_sR_1)\right]\vec{m}_{emn}^{(3)}\right\}$$

$$\vec{u}_{0mn}=b_{0mn}\left\{\frac{\partial}{\partial R_1}\left[\frac{1}{R_1}h_n^{(1)}(k_sR_1)\right]\vec{m}_{0mn}^{(1)}-\right.$$

$$\left.-\frac{\partial}{\partial R_1}\left[\frac{1}{R_1}j_n(k_sR_1)\right]\vec{m}_{0mn}^{(3)}\right\} \qquad (16)$$

Запишем теперь уравнения частот колебаний второго класса (12):

$$h_n^{(1)'}(kR_2)\left\{4\mu' n(n+1)\frac{k_s}{R_1}\left(-1+\frac{2(n^2+n-2)}{(k_sR_1)^2}\right)A(j_n(k_sR_1),\times\right.$$

$$\times h_n^{(1)}(k_sR_1))k_p^2B(j_n(k_pR_2),h_n^{(1)}(k_sR_2))-C(h_n^{(1)}(k_pR_1),j_n(k_sR_1))\times$$

$$\times C(j_n(k_pR_2),h_n^{(1)}(k_sR_2))-C(h_n^{(1)}(k_pR_1),h_n^{(1)}(k_sR_1))\times$$

$$\times C(j_n(k_pR_2),j_n(k_sR_2))-4\mu' n(n+1)\frac{k_s}{R_2}k_p^2\left(-1+\frac{2(n^2+n-2)}{(k_sR_2)^2}\right)\times$$

$$\times A(h_n^{(1)}(k_sR_2),j_n(k_sR_2))B(j_n(k_pR_1),h_n^{(1)}(k_pR_1))-$$

$$
-C(h_n^{(1)}(k_pR_2),\ h_n^{(1)}(k_sR_2))\,C(j_n(k_pR_1),\ j_n(k_sR_1)) +
$$

$$
+C(h_n^{(1)}(k_pR_2),\ j_n(k_sR_2))\,C(j_n(k_pR_1),\ h_n^{(1)}(k_sR_1))\Big| +
$$

$$
+ikh_n^{(1)}(kR_2)\Big|-4\mu' n(n+1)\frac{k_s}{R_1}\frac{k_p}{R_2^2}\left(-1+\frac{2(n^2+n-2)}{(k_sR_1)^2}\right)\times
$$

$$
\times A(j_n(k_sR_1),\ h_n^{(1)}(k_sR_1))\,A(j_n(k_pR_2),\ h_n^{(1)}(k_pR_2)) -
$$

$$
-C(h_n^{(1)}(k_pR_1),\ j_n(k_sR_1))\,D(h_n^{(1)}(k_sR_2),\ j_n(k_pR_2)) +
$$

$$
+C(h_n^{(1)}(k_pR_1),\ h_n^{(1)}(k_sR_1))\,D(j_n(k_sR_2),\ j_n(k_pR_2)) +
$$

$$
+\frac{4n(n-1)}{k_sR_2^2}\,k_p^2\,A(j_n(k_sR_2),\ h_n^{(1)}(k_sR_2))\times
$$

$$
\times B(j_n(k_pR_1),\ h_n^{(1)}(k_pR_1)) - C(j_n(k_pR_1),\ h_n^{(1)}(k_sR_1))\times
$$

$$
\times D(j_n(k_sR_2),\ h_n^{(1)}(k_pR_2)) + C(j_n(k_pR_1),\ j_n(k_sR_1))\times
$$

$$
\times D(h_n^{(1)}(k_sR_2),\ h_n^{(1)}(k_pR_2))\Big| = 0 \tag{17}
$$

где величины A, B, C и D, введённые для краткости записи, определяются равенствами:

$$
A(z_n(k_sR_i),\ \zeta_n(k_sR_i)) = [z_n(k_sR_i)\,\zeta_n'(k_sR_i) - z_n'(k_sR_i)\,\zeta_n(k_sR_i)]
$$

$$
B(z_n(k_sR_i),\ \zeta_n(k_sR_i)) = \left\{\frac{\partial}{\partial R_i}\left(\frac{1}{R_i}z_n(k_sR_i)\right)[-\lambda'\zeta_n(k_sR_i) + 2\mu'\zeta_n''(k_sR_i)] - \frac{\partial}{\partial R_i}\left(\frac{1}{R_i}\zeta_n(k_sR_i)\right)[-\lambda' z_n(k_sR_i) + 2\mu' z_n''(k_sR_i)]\right\}
$$

$$
C(z_n(k_sR_i),\ \zeta_n(k_sR_i)) = \Big\{[-\lambda' z_n(k_sR_i) + 2\mu' z_n''(k_sR_i)]\,k_s^2\times
$$

$$
\times\Big[-\frac{2}{k_sR_i}\zeta_n'(k_sR_i) - \left(-1+\frac{2(n^2+n-1)}{(k_sR_i)^2}\right)\zeta_n(k_sR_i)\Big]k_s -
$$

$$
-4\mu'\frac{n(n-1)}{k_s}\frac{\partial}{\partial R_i}\left(\frac{1}{R_i}\zeta_n(k_sR_i)\right)\frac{\partial}{\partial R_i}\left(\frac{1}{R_i}z_n(k_sR_i)\right)\Big\}
$$

$$
D(z_n(k_sR_i),\ \zeta_n(k_sR_i)) = \Big[\frac{n(n+1)}{k_sR_i}z_n(k_sR_i)\times
$$

$$
\times 2\frac{\partial}{\partial R_i}\left(\frac{1}{R_i}\zeta_n(k_sR_i)\right) - \zeta_n(k_sR_i)\,k_sk_s\Big[\frac{-2}{k_sR_i}z_n'(k_sR_i) +
$$

$$+\left(-1+\frac{2(n^2+n-1)}{(k_sR_i)^2}\right)z_n(k_sR_i)\Bigg]\Bigg\}$$

А собственные векторы (четные и нечетные) колебаний второго класса имеют вид:

$$\vec{u}_{emn}=d_{emn}\,[\Delta_1\vec{l}^{(1)}_{emn}+\Delta_2\vec{n}^{(1)}_{emn}+\Delta_3\vec{l}^{(3)}_{emn}+\Delta_4\vec{n}^{(3)}_{emn}]$$

$$\vec{u}_{0mn}=d_{0mn}\,[\Delta_1\vec{l}^{(1)}_{0mn}+\Delta_2\vec{n}^{(1)}_{0mn}+\Delta_3\vec{l}^{(3)}_{0mn}+\Delta_1\vec{n}^{(3)}_{0mn}]$$

Здесь функции $\vec{l}$ зависят от k_p, а функции $\vec{n}$ — от k_s. Величины Δ_1, Δ_2, Δ_3, Δ_4 определяются из следующих формул:

$$\Delta_1=4\mu\,n(n+1)\frac{\partial}{\partial R_2}\Bigg|\frac{1}{R_2}h_n^{(1)}(k_pR_2)\Bigg|\frac{k_s}{R_1}\left(1-\frac{2(n^2-n-2)}{(k_sR_1)^2}\right)\times$$

$$\times A(j_n(k_sR_1),\,h_n^{(1)}(k_sR_1))+k_s\Bigg|\frac{-2}{k_sR_2}h_n^{(1)\prime}(k_sR_2)+$$

$$+\left(-1+\frac{2(n^2+n-1)}{(k_sR_2)^2}\right)h_n^{(1)}(k_sR_2)\Bigg|\,C(h_n^{(1)}(k_pR_1),\,j_n(k_sR_1))-$$

$$-k_s\Bigg|\frac{-2}{k_sR_2}j_n(k_sR_2)+\left(-1+\frac{2(n^2+n-1)}{(k_sR_2)^2}\right)\times$$

$$\times j_n(k_sR_2)\Bigg|\,C(h_n^{(1)}(k_pR_1),\,h_n^{(1)}(k_sR_1))$$

$$\Delta_2=-2\frac{\partial}{\partial R_2}\Bigg|\frac{1}{R_2}h_n^{(1)}(k_pR_2)\Bigg|\,C(j_n(k_pR_2),\,h_n^{(1)}(k_sR_1))-$$

$$+2k_p^2k_s\Bigg|\frac{-2}{k_sR_2}h_n^{(1)\prime}(k_sR_2)+\left(-1+\frac{2(n^2+n-1)}{(k_sR_2)^2}\right)h_n^{(1)}(k_sR_2)\Bigg|\times$$

$$\times B(h_n^{(1)}(k_pR_1),\,j_n(k_pR_1))-2\frac{\partial}{\partial R_2}\Bigg|\frac{1}{R_2}j_n(k_pR_2)\Bigg|\times$$

$$\times C(h_n^{(1)}(k_pR_1),\,h_n^{(1)}(k_sR_1))$$

$$\Delta_3=4\mu\frac{n(n+1)}{k_s}\frac{\partial}{\partial R_2}\Bigg[\frac{1}{R_2}j_n(k_pR_2)\Bigg|\frac{k_s^2}{R_1}\left(1-\frac{2(n^2+n-2)}{(k_sR_1)^2}\right)\times$$

$$\times A(h_n^{(1)}(k_sR_1),\,j_n(k_sR_1))-k_s\Bigg|\frac{-2}{k_sR_2}h_n^{(1)}(k_sR_2)+$$

$$+\left(-1+\frac{2(n^2+n-1)}{(k_sR_2)^2}\right)h_n^{(1)}(k_sR_2)\Bigg|\,C(j_n(k_pR_1),\,j_n(k_sR_1))+$$

$$+k_s\Bigg[\frac{-2}{k_sR_2}j_n(k_sR_2)+\left(-1+\frac{2(n^2+n-1)}{(k_sR_2)^2}\right)j_n(k_sR_2)\Bigg|\times$$

$$\times C(j_n(k_p R_1),\ h_n^{(1)}(k_s R_1))$$

$$\Delta_4 = 2\frac{\partial}{\partial R_2}\left|\frac{1}{R_2} h_n^{(2)}(k_p R_2)\right| C(j_n(k_p R_1),\ j_n(k_s R_1)) -$$

$$-2\frac{\partial}{\partial R_2}\left|\frac{1}{R_2} j_n(k_p R_2)\right| C(h_n^{(1)}(k_p R_1),\ j_n(k_s R_1)) -$$

$$+k_s\left|\frac{-2}{k_s R_2} j_n(k_s R_2) \quad \left(-1 + \frac{2(n^2+n-1)}{(k_s R_2)^2}\right) j_n(k_s R_2)\right|$$

$$2k_p^2 B(j_n(k_p R_1),\ h_n^{(1)}(k_p R_1))$$

Было исследовано только уравнение частот колебаний первого класса. В этом случае при больших значениях k_s получаем приближенное уравнение

$$\operatorname{tg} k_s(R_2 - R_1) = 0$$

Следовательно, при $k_s \gg 1$ корни k_s распределяются по периодическому закону с периодом $\pi/(R_2 - R_1)$. Было произведено вычисление корней уравнения (15) с точностью до 0.1 (при $R_1 = 1$ и $R_2 = 2$). Получены следующие корни: $k_s = 3.5$; $k_{s_1} = 6.5$; $k_{s_2} = 9.5$; $k_{s_3} = 12.6$; $k_{s_4} = 15.8$; $k_{s_5} = 18.9$ и т. д.

Донецкий государственный
университет

Поступила 3 XI 1970

Յ. Պ. ՊԵՏՐԵՆԿՈ

ՀԵՂՈՒԿԻ ԿԱՄ ԳԱԶԻ ՄԵՋ ԳՏՆՎՈՂ ԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ՍՆԱՄԵՋ ԳՆԴԻ ՍԵՓԱԿԱՆ ՏԱՏԱՆՈՒՄՆԵՐԸ

Ամփոփում

Դիտարկված է հեղուկի մեջ գտնվող սնամեջ գնդի սեփական տատանումների մասին խնդիրը: Սնամեջ գունդը ենթադրվում է առաձգական և իզոտրոպ:

Ցույց է տրված, որ սնամեջ գնդի սեփական տատանումները բաժանվում են դասերի՝ ռադիալ տատանումներ, առաջին դասի տատանումներ և երկրորդ դասի տատանումներ (ըստ Lamb-ի տերմինաբանության): Տատանումների այդ երեք դասով սպառվում են սնամեջ գնդի սեփական տատանումների բոլոր հնարավոր դասերը:

FREE OSCILLATIONS OF AN ELASTIC HOLLOW BALL IN LIQUID OR GAS

J. P. PETRENKO

Summary

A problem of free oscillations of an elastic hollow ball is considered. The ball is assumed to be isotropic. The ball free oscillations

may be divided into the three classes: the radial oscillations, the oscillations of the first class and those of the second class. These three classes exhaust all the possible classes of free oscillations of an elastic hollow ball.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Стрэттон Дж. А.* Теория электромагнетизма. ГИТТЛ, 1948.
2. *Ляв А.* Математическая теория упругости. М.—Л., 1935.
3. *Jearisch P.* Journ. f. Math. (Crelle), т. 88, 1880.
4. *Lamb H.* Proc. Math. Soc. (London), т. 13, 1882.
5. *Петрашень Г. И.* Докторск. диссертация „Метод шаровых векторов в предельных задачах математической физики". Ленинградская Военная Воздушная Академия Красной Армии, 1944.