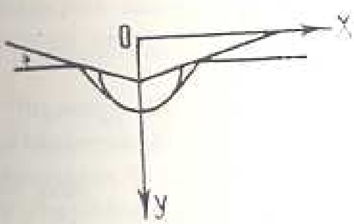
ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXIV, № 5, 1971 Механика

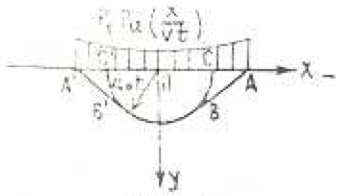
А. А. ГУРГЕНЯН

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ЛЕГРАСА К ЗАДАЧЕ О ДВИЖЕНИИ ЖИДКОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА

Рассматривается плоская нелинейная задача по определению параметров движения жидкости в окрестности точки соединения волновых фронтов методом Леграса [1]. К типу таких задач относятся задача о движении жидкого полупространства под действием ударной волны или твердых тел, а также задача о дифракции ударной волны на клине или конусе [2] (фиг. 1).



Фиг. 1.



Фиг. 2.

Во всех задачах в линейном случае возмущенная область ограничена звуковой окружностью BB' и линиями Маха $AB - A'B'$, соответствующими волновым фронтам, порожденным возмущениями во фронте на поверхности. Для определенности рассмотрим задачу о движении сжимаемой жидкости под действием давления, возникающего на поверхности в точке O и движущегося по границе жидкости по закону (фиг. 2)

$$P = \begin{cases} P_1 P_a\left(\dfrac{x}{Vt}\right) & x < Vt \\ 0 & x > Vt \end{cases} \tag{1}$$

где P—давление, t—время от начала движения, V—скорость фронта A давления по границе жидкости, P_1—давление в точке A, P_a—профиль давления за фронтом на поверхности. В случае, когда давление возникает в одной точке на поверхности, задача будет осесимметричной, если же давление возникает вдоль прямой на поверхности, задача будет плоской. Решение плоской задачи в линейной постановке для давления P при граничном условии (1) и нулевых начальных условиях найдено в [2], причем на AB и $A'B'$ $P = P_1$, а вблизи BB', если ввести полярные координаты r_1, θ, давление имеет вид

$$P = P_1 \frac{\sqrt{2}}{\pi} \sin\theta \, \frac{V}{a} \frac{\sqrt{t - \frac{r_1}{a}}}{\sqrt{\frac{r_1}{a}}} \int_{x}^{1} \frac{P_a(\xi)\, d\xi}{\left(1 - \frac{V}{a^2} \frac{x\xi}{t}\right)^2} \tag{2}$$

где a — начальная скорость звука в жидкости.

Решение (2) имеет особенность на звуковой волне $r_1 = at$. Для исправления решения можно применить метод замены линейных характеристических переменных $t - \frac{r_1}{a}$ через Y_1, где $Y_1 = \mathrm{const}$ — уравнение нелинейных характеристик [3]. Однако, это исправленное решение неверно вблизи точки B, где течение становится двумерным по r_1, θ. В [3] показано, что в этой области решение будет короткой волной, зависящей от двух переменных, и найдено частное решение этих уравнений. Для вышеперечисленных задач решения в окрестности точки B методом коротких волн исследованы в [4], причем условие непрерывности касательной составляющей скорости к ударной волне во всех задачах выполнено лишь в нулевом порядке.

Покажем, что используя метод Леграса, который приводит к численному интегрированию системы обыкновенных дифференциальных уравнений, можно определить окрестность точки B соединения фронтов волн, причем условиям на ударной волне — удовлетворить во втором порядке.

Рассмотрим метод Леграса.

В окрестности точки B фиг. 2 параметры жидкости представим в виде

$$P = \frac{\gamma}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + a_2(\alpha) + t l_1(\alpha)$$

$$v_r = \frac{\gamma}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + c_2(\alpha) + t l_3(\alpha)$$

$$v_\theta = b_2(\alpha) + t l_2'(\alpha)$$

$$r = 1 + l(\alpha) + t$$

$$\theta = \theta_0 + m(\alpha) \tag{3}$$

где α и t — параметры, причем $t = 0$ — уравнение ударной волны, $\gamma = \frac{P_1}{Bn}$, $Bn = \rho_0 a_0^2$, ρ_0 — начальная плотность жидкости.

Функции $l_1(\alpha)$, $l_3(\alpha)$, $l(\alpha)$ — первого порядка малости, $l_2(\alpha)$, $m(\alpha)$ — порядка $\frac{1}{2}$, $b_2(\alpha)$ — порядка $\frac{3}{2}$, $a_2(\alpha)$, $c_2(\alpha)$ — второго порядка.

Уравнение движения и неразрывности в плоской задаче в переменных $r = \frac{r_1}{t}$, θ имеет вид [3]

$$\frac{\partial v_r}{\partial r}[(v_r - r)^2 - a^2] + \frac{1}{r}(2r - v_r)v_\theta - \frac{2}{r}v_\theta(r - v_r)\frac{\partial v_r}{\partial \theta} +$$

$$+ \frac{1}{r}(v_\theta^2 - a^2)\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} - \frac{a^2}{r}v_r = 0 \qquad (4)$$

где скорость звука a находится по интегралу Лагранжа (движение считаем потенциальным)

$$a^2 = a_0^2 - \frac{n-1}{2}v^2 - (n-1)(\varphi - r v_r)$$

Если оставить в уравнении (4) члены, имеющие основной порядок малости, получим вблизи линии $r_1 = a_0 t$ уравнение

$$\frac{\partial v_r}{\partial r}[r^2 - a_0(n+1)v_r - a_0^2] - r\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} - a_0 v_r = 0$$

$$a^2 = a_0^2 - (n-1)a_0 v_r \qquad (5)$$

Уравнение (5) напишем в переменных (3), для этого вычислим

$$\frac{\partial \alpha}{\partial r} = O(t), \quad \frac{\partial t}{\partial r} = 1 + O(t), \quad \frac{\partial \alpha}{\partial \theta} = \frac{1}{m'(\alpha)} + O(t), \quad \frac{\partial t}{\partial \theta} = -\frac{l'(\alpha)}{m'(\alpha)} + O(t)$$

что дает

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} = l_3(\alpha), \quad \frac{\partial v_r}{\partial \theta} = \frac{\frac{\gamma}{\pi} + c_2 - l_3 l'}{m'(\alpha)}, \quad \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} = \frac{b_2' - l_2 l'}{m'(\alpha)} \qquad (6)$$

Подставляя (3) и (6) в (5), получим

$$-l_3 m'\left\{2l + 2t - (n-1)\left[\frac{\gamma}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + a_2 + t l_3\right]\right\} + b_2' -$$

$$- l_2 l' + m'\left[\frac{\gamma}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + a_2 + t l_3\right] = 0 \qquad (7)$$

Приравниваем нулю в (7) члены в основном порядке (3/2)

$$b_2' - l_2 l' + \frac{\gamma}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)m' = 0 \qquad (8)$$

Условие потенциальности $\frac{\partial v_r}{\partial \theta} = \frac{\partial r v_\theta}{\partial r}$ дает

$$\frac{\gamma}{\pi} - l_2 m' = 0 \qquad (9)$$

Напишем условия на ударной волне BB'. Условие непрерывности касательной составляющей скорости к фронту при потенциальном движении можно заменить условием

$$\Delta\varphi = \Delta v_r dr + r\Delta v_\theta d\theta = 0 \qquad (10)$$

где

$$\Delta v_r = \frac{\gamma}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + a_2(\alpha) + \cdots$$

$$\Delta v_\theta = b_2(\alpha) + \cdots$$

$$dr = l'(\alpha)\, d\alpha, \quad d\theta = m'(\alpha)\, d\alpha$$

подставляя эти выражения в (10), получим

$$\left[\frac{\gamma}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + a_2\right] l' d\alpha + b_2 (1 + l)\, m' d\alpha = 0$$

В основном порядке это уравнение дает

$$b_2(\alpha) = -\frac{\gamma}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\frac{l'(\alpha)}{m'(\alpha)} \qquad (11)$$

Другие соотношения на ударной волне можно представить в виде

$$\Delta v_r = \frac{2}{n+1}\left(\frac{a^2}{D - v_r} - D + v_r\right) \qquad (12)$$

где $D = a_0\left(1 + \frac{n+1}{4}\frac{P_1}{Bn}\right)$ есть скорость распространения ударной волны. Если перейти в (12) к переменным (3) и обозначить $\frac{l'(\alpha)}{m'(\alpha)} = L(\alpha)$, то после несложных вычислений можно получить

$$2l(\alpha) - L^2(\alpha) - \frac{n+1}{2}\frac{\gamma}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = 0 \qquad (13)$$

Разрешив уравнения (8), (9), (11), (13) относительно $l(\alpha)$, можно определить

$$l(\alpha) = \frac{5}{8}\frac{n+1}{2}\frac{\gamma}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \qquad (14)$$

На параболической линии BC известно [4], что $r = 1 + \frac{n+1}{2}\gamma$, то есть в точке пересечения ударной волны с параболической линией, где $l = l_n = 0$, имеет место $l(\alpha_0) = \frac{n+1}{2}\gamma$, в силу чего из (14) находится координата точки пересечения

$$\alpha_0 = -\frac{11}{10}\pi \qquad (15)$$

Однако этот результат неверен, потому что в силу (3) получается, что при переходе из области постоянного течения ABC в область BB' на ударной волне в точке B давление и скорость в первом порядке скачком возрастают $P = \frac{8}{5} P_1$, тогда как за точкой B имеется разрежение.

Оказывается, что метод Леграса можно успешно применить к этим задачам, если считать функции $l_1(\alpha)$, $l_2(\alpha)$ нулевого порядка и записать r и θ в виде

$$r = 1 + l(\alpha) + t\Gamma(\alpha), \quad \theta = \theta_0 + m(\alpha) + t\beta(\alpha)$$

где $\Gamma(\alpha)$ — нулевого порядка, $\beta(\alpha)$ — порядка $-\frac{1}{2}$.

Так как порядки этих функций можно задавать по-разному, то для получения единого решения можно с самого начала в исходных уравнениях перейти к безразмерным переменным и считать, что эти функции тоже безразмерные.

Вводя переменные [4]

$$v_r = a_0 \gamma \mu, \quad v_\theta = a_0 \sqrt{\frac{n+1}{2}} \gamma^{\frac{3}{2}} \nu, \quad r = a_0 \left(1 + \frac{n+1}{2} \gamma \delta \right)$$

$$\theta - \theta_0 = \sqrt{\frac{n+1}{2}} \gamma^{\frac{1}{2}} y$$

уравнение движения и неразрывности можно переписать в виде уравнений коротких волн (5)

$$\frac{\partial \mu}{\partial \delta} (\mu - \delta) + \frac{1}{2} \mu + \frac{1}{2} \frac{\partial \nu}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial y} = \frac{\partial \nu}{\partial \delta} \tag{16}$$

Соотношения на ударном фронте запишутся

$$\nu - \mu \sqrt{2\delta - \mu} = 0$$

$$\frac{\partial \delta}{\partial y} = -\sqrt{2\delta - \mu} \tag{17}$$

Решение этих уравнений ищем в виде

$$\mu = a_1(\alpha) + t l_2(\alpha)$$

$$\nu = b_2(\alpha) + t l_2(\alpha)$$

$$\delta = l(\alpha) + t\Gamma(\alpha)$$

$$Y = m(\alpha) + t\beta(\alpha) \tag{18}$$

где все функции безразмерные, причем $t = 0$ — уравнение ударной волны.

Первое уравнение (16) в переменных (18) имеет вид

$$[a_1\beta - l_3 m' + t(l_3'\beta - l_3\beta')][a_1 - l + t(l_3 - \Gamma)] +$$

$$+ \frac{1}{2}(a_1 + t l_3)[\beta l' - \Gamma m' + t(\beta\Gamma' - \Gamma\beta')] +$$

$$+ \frac{1}{2}[-b_2'\Gamma + l_2 l' + t(l_2\Gamma' - l_2'\Gamma)] = 0 \qquad (19)$$

Приравниваем нулю в (19) слагаемые, не содержащие t

$$(a_1\beta - l_3 m')(a_1 - l) + \frac{1}{2} a_1(\beta l' - \Gamma m') - \frac{1}{2} b_2'\Gamma + \frac{1}{2} l_2 l' = 0 \qquad (20)$$

слагаемые при t

$$(a_1\beta - l_3 m')(l_3 - \Gamma) + (\beta l_3' - \beta' l_3)(a_1 - l) + \frac{1}{2} l_3(\beta l' - \Gamma m') +$$

$$+ \frac{1}{2} a_1(\beta\Gamma' - \Gamma\beta') + \frac{1}{2}(l_2\Gamma' - l_2'\Gamma) = 0 \qquad (21)$$

при t^2

$$(\beta l_3' - \beta' l_3)(l_3 - \Gamma) + \frac{1}{2} l_3(\beta\Gamma' - \Gamma\beta') = 0 \qquad (22)$$

Второе уравнение (16) запишется в виде

$$-a_1\Gamma' + l_3 l' + t(l_3\Gamma' - l_3'\Gamma) - b_2'\beta + l_2 m' - t(\beta l_2' - l_2\beta') = 0 \qquad (23)$$

откуда получим

$$-a_1\Gamma' - l_3 l' - b_2'\beta + l_2 m' = 0 \qquad (24)$$

$$l_3\Gamma' - l_3'\Gamma - \beta l_2' + l_2\beta' = 0 \qquad (25)$$

Условия на ударной волне (17) дают

$$l' - \sqrt{2l - a_1}\, m' = 0 \qquad (26)$$

$$b_2' - a_1\sqrt{2l - a_1} = 0 \qquad (27)$$

Нетрудно показать, что в этих уравнениях l_3 входит однородно, так что можно положить $l_3(\alpha) = 1$.

На параболической линии BC известно

$$\mu = a_1 + t_0 = 1, \quad \lambda = l + t_0\Gamma = 1$$

Исключив из этих уравнений t_0, получим

$$l - (1 - a_1)\Gamma - 1 = 0 \qquad (28)$$

Для того, чтобы найти решение вблизи ударной волны, нужно интегрировать систему уравнений (20—27), а вблизи параболической линии—уравнения (20—25) и (28). Так как в обоих случаях система уравнений однородная относительно производных, то можно положить

$a_1(\alpha) = 1 - \alpha$ (как у Леграса), тогда вблизи ударной волны получится семь уравнений с шестью неизвестными, поэтому уравнение (22) следует отбросить, что возможно в силу малости l.

Граничным условием для этих систем может служить решение этих же уравнений в точке B, где легко определяются [4] $\alpha_0 = 0$, $l(\alpha_0) = b_2(\alpha_0) = 1$, $m(\alpha_0) = -1$. Для определения остальных неизвестных разложим функции в ряд Тейлора и оставим члены до второго порядка $\alpha - \alpha_0$, причем в точке B удовлетворяются все уравнения.

Получается следующая система алгебраических уравнений:

$$\beta l' - \Gamma m' - b_2' \Gamma + l_2 l' = 0$$

$$-2(\beta + m')(1 - \Gamma) + \beta l' - \Gamma m' + \Gamma'(l_2 + \beta) - \Gamma(l_2' + \beta') = 0$$

$$\beta \Gamma' + \beta'(\Gamma - 2) = 0$$

$$\Gamma + l' - b_2' \beta + l_2 m' = 0$$

$$\Gamma' - \beta l_2' + l_2 \beta' = 0$$

$$l' + m' = 0$$

$$b_2 + m' + \frac{1}{2} = 0$$

$$l' + \Gamma = 0$$

$$2(\beta + m')(1 - l') - \beta l' + \Gamma m' + l'(\beta' + l_2') - \Gamma'(b_2' + m') -$$

$$- \Gamma(b_2'' + m'') + l''(l_2 + \beta) = 0$$

$$\Gamma' + l'' - b_2'' \beta - b_2' \beta' + l_2' m' + l_2 m'' = 0$$

$$l'' + m'' + m' l' + \frac{1}{2} m' = 0$$

$$b_2' + 2l' - l'' + \frac{1}{4}(2l' + 1)^2 + 1 = 0 \qquad (29)$$

$$l'' + 2\Gamma' = 0$$

$$-2(\beta' + m'')(1 - \Gamma) + 2\Gamma'(\beta + m') + 3\beta' l' + \beta'(\Gamma + 2) -$$

$$- \Gamma'(\beta + m') - \beta l'' - \Gamma m'' + \Gamma''(l_2 + \beta) - \Gamma(l_2'' + \beta'') = 0$$

$$2\beta' \Gamma' + \beta \Gamma'' + (\Gamma - 2)\beta'' = 0$$

$$\Gamma'' - \beta l_2'' + l_2 \beta'' = 0$$

Получили, что число уравнений на единицу больше, чем число неизвестных, то есть всем условиям до второго порядка удовлетворить и найти решение в окрестности точки B невозможно, поэтому одно уравнение из системы (29) нужно отбросить. Оказывается, если отбросить условие на параболической линии во втором порядке, то получается противоречие, поэтому отбрасываем условие непрерывности касательной составляющей скорости к ударной волне во втором порядке.

При решении этой системы получается следующее соотношение:

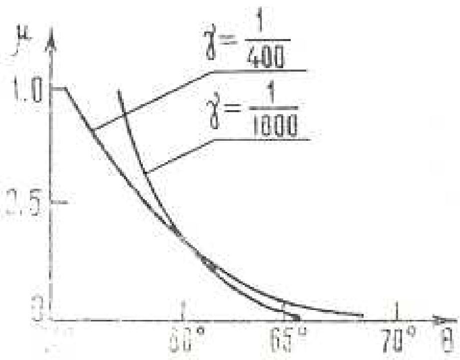
$$m'(\beta + \Gamma)(l_2 + \beta) = 0$$

Если приравнять нулю первый множитель, то все производные всех функций первого порядка и выше тождественно будут нулями. При равенстве нулю последней скобки получается противоречие.

Поэтому принимаем, что $\beta + \Gamma = 0$, причем точка B является особой. Разрешив эту систему уравнений, находим решение поставленной задачи в следующем виде:

$$\begin{aligned}
l(\alpha) &= 1 - 1.5\alpha - 0.375\alpha^2 \\
m(\alpha) &= -1 + 1.5\alpha - 1.125\alpha^2 \\
h_2(\alpha) &= 1 - 2.0\alpha - 1.250\alpha^2 \\
l_2(\alpha) &= 2 + 1.25\alpha - 0.28125\alpha^2 \\
\Gamma(\alpha) &= 1.5 + 0.375\alpha - 0.42185\alpha^2 \\
\beta(\alpha) &= -1.5 - 1.125\alpha + 0.42185\alpha^2
\end{aligned} \tag{30}$$

Это решение верно в малой окрестности точки B. Для определения решения вдали от точки соединения на ударной волне, нужно интегрировать систему уравнений (20—27) с граничными условиями, вычисленными по формулам (30), отходя от особой точки на малую величину аргумента. Результаты расчетов для значения $n = 7$, $M = 2$ приведены на фиг. 3.



Фиг.3

Решение (30) удовлетворяет условию непрерывности касательной составляющей скорости к ударной волне BB_1 в первом порядке по α, а условию на параболической линии во втором порядке. Поскольку нас интересует поведение решения вблизи фронта ударной волны BB_1, то желательно, чтобы все условия на ней удовлетворялись во втором порядке по α.

Оказывается, что возможно получить решение во втором порядке, если условие на параболической линии (28) удовлетворить в нулевом порядке, а недостающее уравнение для системы (29) получить из условия соединения этого решения с одномерным по ∂ решением (31) вдали от точки B [4]

$$\mu = \frac{3}{\pi^2 y^2} \tag{31}$$

Прибавляя к y постоянную C, что допустимо в силу того, что в указанной области y велико, и переходя к переменным (18), получим

$$a_1(\alpha) = \frac{3}{\pi^2 (m(\alpha) + C)^2} \tag{32}$$

Постоянная C определяется из условия, чтобы (32) удовлетворяла известным условиям в точке B [4] $a_1(\alpha_0) = 1$, $m(\alpha_0) = -1$. Разлагая (32) в ряд Тейлора по $\alpha - \alpha_0$, в первом порядке можно получить

$$m'(\alpha_0) = \frac{\sqrt{3}}{\pi} \tag{33}$$

Тогда систему уравнений (29), без восьмого и тринадцатого уравнений, выражающих условие на параболической линии в первом и во втором порядке, можно привести к одному уравнению

$$\begin{gathered} 84\Gamma^4 - 2\beta^4 + 100\Gamma^3\beta - \Gamma\beta^3 + 39^2\Gamma^2\beta^2 - 89\Gamma^3 - \\ - 12\beta^3 - 144\Gamma^2\beta - 78\Gamma\beta^2 = 0 \end{gathered} \tag{34}$$

причем остальные неизвестные в точке B выражаются через β и Γ следующим образом:

$$m'(\alpha_0) = \frac{1}{2}(\beta + 3\Gamma), \quad l'(\alpha_0) = -\frac{1}{2}(\beta + 3\Gamma), \quad b_2'(\alpha_0) = -\frac{1}{2}(\beta + 3\Gamma + 1)$$

$$l_2(\alpha_0) = \frac{\Gamma}{\beta + 3\Gamma} - \beta, \quad \beta'(\alpha_0) = -\frac{\beta^2(\beta + \Gamma)(\beta + 3\Gamma)}{2\Gamma^2}$$

$$\Gamma'(\alpha_0) = -\frac{\beta(2 - \Gamma)(\beta + \Gamma)(\beta + 3\Gamma)}{2\Gamma^2}$$

$$l_2(\alpha_0) = -\frac{(\beta + \Gamma)[2(\beta + 3\Gamma) - \beta^2(\beta + 3\Gamma) - 3\Gamma^2]}{2\Gamma^2} \tag{35}$$

$$m''(\alpha_0) = -\frac{\beta + 3\Gamma}{\beta + 2\Gamma} \times$$

$$\times \frac{\beta^4 + 2\Gamma\beta^3 - 4\Gamma^2\beta^2 - 9\Gamma^3\beta - 18\Gamma^4 + 6\beta^3 + 21\Gamma^3 + 30\Gamma\beta^2 + 38\Gamma^2\beta}{4\Gamma^2}$$

$$b_2'(\alpha_0) = -m'' + \frac{5(\beta + 3\Gamma - 1)}{4}, \quad l''(\alpha_0) = -m'' + \frac{(\beta + 3\Gamma)(\beta + 3\Gamma - 1)}{4}$$

Решая уравнение (34) вместе с условием (33), получим значения β и Γ. Определив остальные значения неизвестных по формулам (35), решение вблизи ударной волны представим в виде

$$
\begin{aligned}
l(\alpha) &= 1 - 0.5513\alpha - 0.1085\alpha^2 \\
m(\alpha) &= -1 + 0.5513\alpha + 0.0850\alpha^2 \\
b_2(\alpha) &= 1 - 1.0514\alpha - 0.0208\alpha^2 \\
l_2(\alpha) &= 0.9829 - 0.0662\alpha - 0.0836\alpha^2 \\
\Gamma(\alpha) &= 0.5338 - 0.0496\alpha - 0.0635\alpha^2 \\
\beta(\alpha) &= -0.4988 - 0.0169\alpha - 0.0222\alpha^2
\end{aligned}
\tag{36}
$$

Следует отметить, что полученное решение (36) приближенно удовлетворяет условиям на параболической линии в первом и во втором порядке по α, то есть (36) можно распространить в полную окрестность точки пересечения параболической линии с ударной волной BB_1.

Покажем другой подход к этой задаче, при котором решение в окрестности точки соединения удовлетворяет всем условиям включительно до второго порядка по $\alpha - \alpha_0$.

Пусть в окрестности особой точки B решения вблизи ударной волны BB_1 и параболической линии BC описываются разными функциями. Со стороны ударной волны функции обозначим черточкой и потребуем, чтобы эти функции переходили на некоторой линии $t = t(\alpha)$ в функции, описывающие окрестность параболической линии, то есть

$$
\begin{aligned}
\overline{a}_1(\alpha) - \overline{t}\,\overline{l}_3(\alpha) &= a_1(\alpha) - t l_3(\alpha) \\
\overline{b}_2(\alpha) + \overline{t}\,\overline{l}_2(\alpha) &= b_2(\alpha) + t l_2(\alpha) \\
\overline{l}(\alpha) + \overline{t}\,\overline{\Gamma}(\alpha) &= l(\alpha) + t\Gamma(\alpha) \\
\overline{m}(\alpha) + \overline{t}\,\overline{\beta}(\alpha) &= m(\alpha) + t\beta(\alpha)
\end{aligned}
\tag{37}
$$

Вблизи ударной волны BB_1 имеем уравнения (20–27), а вблизи параболической линии BC — (20–25) и (28). Эти уравнения вместе с условиями стыковки (37) дают решение данной задачи, причем здесь тоже принимаем

$$\overline{l}_3(\alpha) = l_3(\alpha) \equiv 1, \quad \overline{a}_1(\alpha) = a_1(\alpha) = 1 - \alpha$$

Если разложить функции, входящие в эти уравнения, в ряд Тейлора по $\alpha - \alpha_0$ и оставить члены до второго порядка по $\alpha - \alpha_0$, то переходя к точке $\alpha_0 = 0$, получим систему тридцати алгебраических уравнений, которые после громоздких выкладок приводятся к следующим трем уравнениям для трех неизвестных функций $\overline{\beta}$, $\overline{\Gamma}$ и $\overline{l}_2$:

$$
\begin{aligned}
2\overline{l}_2'(\Gamma' - \overline{m}') - \overline{\Gamma}''(\overline{l}_2 - l_2) - \overline{b}_2'(\overline{\Gamma}' - \Gamma') - 2\Gamma''(l_2' + \overline{b}_2') &= 0 \\
2\overline{l}_2'(\beta' + \overline{m}') + \overline{m}''(\overline{l}_2 - l_2) - \overline{b}_2'(\overline{\beta}' - \beta') - 2\beta''(l_2' + \overline{b}_2') &= 0
\end{aligned}
\tag{38}
$$

$$84\bar{\Gamma}^4 - 2\bar{\beta}^4 + 100\bar{\Gamma}^3\bar{\beta} - \bar{\Gamma}\bar{\beta}^3 + 39\bar{\Gamma}^2\bar{\beta}^2 - 89\bar{\Gamma}^3 - 12\bar{\beta}^3 -$$
$$- 144\bar{\Gamma}^2\bar{\beta} - 78\bar{\Gamma}\bar{\beta}^2 = 0$$

где

$$\beta = -\frac{3(\bar{\beta}+3\bar{\Gamma})}{1+3(\bar{\beta}+3\bar{\Gamma})}\, l_2 + \frac{\bar{\beta}+3\bar{\Gamma}}{1+3(\bar{\beta}+3\bar{\Gamma})}$$

$$\Gamma = \frac{\bar{\beta}+3\bar{\Gamma}}{1+3(\bar{\beta}+3\bar{\Gamma})}\, l_2 + \frac{(\bar{\beta}+3\bar{\Gamma})^2}{1+3(\bar{\beta}+3\bar{\Gamma})}$$

а остальные неизвестные выражаются через $\bar{\beta}$ и $\bar{\Gamma}$ по формуле (35).

Решая эти уравнения, представим решение в малой окрестности точки B в следующем виде:

$$\bar{m}(\alpha) = -1 + 0.4109\alpha - 0.5560\alpha^2$$
$$\bar{l}(\alpha) = 1 - 0.4109\alpha + 0.5427\alpha^2$$
$$\bar{b}_2(\alpha) = 1 - 0.9109\alpha + 0.8993\alpha^2$$
$$\bar{\beta}(\alpha) = -0.8095 + 0.2334\alpha + 0.0929\alpha^2$$
$$\bar{\Gamma}(\alpha) = 0.5406 - 0.4258\alpha - 0.0310\alpha^2$$
$$\bar{l}_2(\alpha) = 1.4578 - 0.1069\alpha + 0.1314\alpha^2$$
$$m(\alpha) = -1 + 1.5310\alpha, \quad l(\alpha) = 1 - 0.7843\alpha$$
$$b_2(\alpha) = 1 - 2.4853\alpha, \quad \Gamma(\alpha) = 0.7843$$
$$\beta(\alpha) = -1.5310, \quad l_2(\alpha) = 2.4853 \tag{39}$$

где с полученной точностью производные на параболической линии $\bar{\beta}'$, $\bar{\Gamma}'$, $\bar{l}_2'$, $\bar{\beta}''$, $\bar{\Gamma}''$, $\bar{l}_2''$, $\bar{m}''$, $\bar{l}''$, $\bar{b}_2''$ в точке B обращаются в нуль.

Линия стыковки в первом порядке определяется по формуле $t(\alpha) = 1.5322\alpha$ и проходит за параболической линией BC.

Таким образом, путем стыковки решений вблизи ударной волны и параболической линии найдено решение в окрестности точки B, удовлетворяющее всем условиям задачи, включительно до второго порядка по $\alpha - \alpha_0$. Этим же методом определено решение в осесимметричном случае, а также в задаче о проникании конуса в сжимаемую жидкость [5].

Автор выражает благодарность канд. физ.-мат. наук Багдоеву А. Г. за постановку задачи и за ценные замечания, а также сотрудникам Вычислительного центра ЕрПИ за выполненные расчеты.

Ереванский политехнический институт
им. К. Маркса

Поступила 12 XI 1970

Ա. Ա. ԳՈՒՐԳԵՆՅԱՆ

ԼԵԳՐԱՍԻ ՄԵԹՈԴԻ ԿԻՐԱՌՈՒՄԸ ՀԵՂՈՒԿ ԿԻՍԱՏԱՐԱԾՈՒԹՅԱՆ ՇԱՐԺՄԱՆ ԽՆԴՐԻ ՆԿԱՏՄԱՄԲ

Ամփոփում

Դիտարկվում է հարթ ոչ գծային խնդիր, որտեղ որոշվում են հեղուկի շարժման պարամետրերը ալիքային ճակատների հատման կետի մոտ Լեգրասի մեթոդով: Փնտրվող ֆունկցիաները և անկախ փոփոխականները ներկայացվում են ε և t պարամետրերից կախված ֆունկցիաների տեսքով, որտեղ t-ն բնութագրում է կետի հեռավորությունը հարվածային ալիքից, իսկ ε-ն անկյունային հեռավորությունը:

Այդ տիպի խնդիրներին են պատկանում հեղուկ կիսատարածության շարժման խնդիրը հարվածային ալիքի կամ պինդ մարմինների ազդման տակ, ինչպես նաև հարվածային ալիքի անդրադարձման խնդիրը սեպից կամ կոնից: Այս բոլոր խնդիրների լուծումը բերվում է սովորական դիֆերենցիալ հավասարումների սիստեմի, որոնք ինտեգրվում են թվային: Հեղուկ կիսատարածության շարժման խնդրի մեջ ցույց է տրված, որ պարաբոլիկ գծի և հարվածային ալիքի լուծումների ծայրակցման միջոցով հնարավոր է այդ ալիքների հատման կետի շրջակայքում լուծումը պատկերել շարքերի տեսքով, որը բավարարում է խնդրի բոլոր պայմաններին ներառյալ մինչև երկրորդ կարգում ըստ ε-ի:

APPLICATION OF THE LEGRAS METHOD TO THE PROBLEM ON MOTION OF ELUID HALF-SPACE

A. A. GURGENIAN

Summary

A nonlinear plane problem on the determination of parameters of fluid motion in the vicinity of a junction point of wave fronts by the Legras method is considered. The unknown functions as well as the independent variables are expanded into the series of parameters characterizing the distance from the shock wave and the angular distance respectively. The solution is reduced to a system of ordinary differential equations and is found numerically.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Legras, Jean.* Novelles applications de la methode de Lighthilla l'etudes des ondes de choc. Paris, ONERA 1953. p. 62. Comptes rendus de Seances, 1952.
2. *Багдоев А. Г.* Пространственные нестационарные движения сплошной среды с ударными волнами. Изд. АН Арм. ССР, Ереван, 1961.
3. *Багдоев А. Г.* Некоторые нелинейные задачи о движении сжимаемой жидкости. Изд. АН Арм. ССР, Ереван, 1967.
4. *Багдоев А. Г., Гургенян А. А.* Приближенные решения ряда нелинейных задач определения ударных волн в жидкости. Изв. АН Арм. ССР, сер. физ.-мат. наук, т. 21, № 1, 1968.
5. *Гургенян А. А.* Определение параметров жидкости в окрестности точки соединения волновых фронтов методом Леграса. Изв. АН Арм. ССР, сер. техн. наук, т. 24, № 6, 1971.