

А. А. БАБАОЯН, А. М. МКРТЧЯН

ОБ ОДНОЙ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ПРЯМОУГОЛЬНИКА

Решается плоская задача теории упругости для прямоугольника, когда к серединам его краев приложены жесткие симметрично расположенные штампы, то есть на всех участках граничные условия заданы в смешанном виде.

Плоская задача для прямоугольника, когда на границе известны напряжения или перемещения, раньше рассматривалась в работах [1, 2].

Смешанная задача для прямоугольника, когда на двух противоположных кромках приложены штампы, исследована в [3]. Плоская задача для прямоугольника, сжимаемого по всем кромкам двумя одинаковыми симметрично расположенными у краев жесткими штампами, рассмотрена в работе [4].

1. Рассмотрим плоскую задачу для прямоугольника, сжимаемого по всем кромкам штампами, расположенными симметрично относительно осей прямоугольника (фиг. 1). Длины штампов, приложенных к противоположным кромкам, одинаковы, а к смежным — разные. Предполагается, для простоты выкладок, что внешние нагрузки, приложенные как к штампам, так и к участкам контура прямоугольника вне штампов симметричны относительно осей прямоугольника. Касательные напряжения на границе отсутствуют.

Граничные условия данной задачи следующие:

$$\tau_{xy}(-a, y) = \tau_{xy}(x, \pm b) = 0$$

Фиг. 1.

$$\begin{aligned} u(\pm a, y) &= f_2(y) \quad (|y| < c) & v(x, \pm b) &= f_4(x) \quad (|x| < d) \\ \sigma_x(\pm a, y) &= (f_1)y \quad (c < |y| < b) & \tau_{xy}(x, \pm b) &= f_3(x) \quad (d < |x| < a) \end{aligned} \quad (1.1)$$

В силу симметрии функцию Эйри будем определять только в четвертой части основной области, удовлетворяя при этом условиям симметрии на осях $x = 0, y = 0$

$$u(0, y) = v(x, 0) = \tau_{xy}(x, 0) = \tau_{xy}(0, y) = 0$$

Напряжения и перемещения определяются через бигармоническую функцию Эйри по формулам

$$\begin{aligned} z_x &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}, \quad z_y = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \\ Eu &= \int \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} dx - \gamma \frac{\partial \Phi}{\partial x} - l_0 y + f_0 \\ Ev &= \int \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} dy - \gamma \frac{\partial \Phi}{\partial y} + l_0 x - g_0 \end{aligned} \quad (1.2)$$

В силу симметрии задачи функцию напряжений Эйри ищем в виде

$$\begin{aligned} \Phi(x, y) &= c_1 x^2 + c_2 y^2 + \sum_{k=1}^{\infty} [B_k \operatorname{ch} z_k y + C_k z_k y \operatorname{sh} z_k y] \cos z_k x + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} [F_k \operatorname{ch} z_k x + G_k z_k x \operatorname{sh} z_k x] \cos z_k y; \quad z_k = \frac{k\pi}{a}, \quad \beta_k = \frac{k\pi}{b} \end{aligned} \quad (1.3)$$

При выборе функции $\Phi(x, y)$ в виде (1.3) и при $l_0 = g_0 = f_0 = 0$ условия симметрии удовлетворяются автоматически.

Удовлетворяя условиям равенства нулю тангенциальных напряжений на краях прямоугольника, между коэффициентами F_k , G_k , B_k и C_k получим соотношения

$$B_k = -C_k(1 + z_k b \operatorname{cth} z_k b); \quad F_k = -G_k(1 + \beta_k a \operatorname{cth} \beta_k a) \quad (1.4)$$

Удовлетворяя затем смешанным условиям (1.1), учитывая (1.4) и отображая одномерные области $(0 < x < a)$ и $(0 < y < b)$ на области $(0 < \xi < \pi)$ и $(0 < \eta < \pi)$ соответственно, получим следующую систему парных тригонометрических рядов-уравнений:

$$\begin{aligned} \gamma_1 X_0 + \sum_{k=1}^{\infty} k^{-1} X_k (1 - N_k) \cos k \eta &= \gamma_{12} Y_0 + F_2(\eta) \quad (0 < \eta < \eta_1) \\ X_0 + \sum_{k=1}^{\infty} X_k \cos k \eta &= \frac{b^2}{a^2} \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p \frac{(1 - M_p) Y_p}{\operatorname{sh} z_p b} \times \\ &\times \left[\operatorname{ch} p \frac{b}{a} (\eta - z_p b) - \frac{\operatorname{ch} p \frac{b}{a} (\pi - \eta)}{\operatorname{sh} z_p b} - p \frac{b}{a} (\pi - \eta) \operatorname{sh} p \frac{b}{a} \eta \right] + F_1(\eta) \\ &\quad (\eta_1 < \eta < \pi) \end{aligned} \quad (1.5)$$

$$\gamma_2 Y_0 + \sum_{k=1}^{\infty} k^{-1} Y_k (1 - M_k) \cos k \xi = \gamma_{21} X_0 - F_2(\xi) \quad (0 < \xi < \xi_1)$$

$$Y_0 + \sum_{k=1}^{\infty} Y_k \cos k \xi = \frac{a^2}{b^2} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^{p-1} (1 - N_p) X_p}{\operatorname{sh} \beta_p a} \times$$

$$\times \left[\operatorname{chp} \frac{a}{b} \xi - \frac{\operatorname{chp} \frac{a}{b} (\pi - \xi)}{\operatorname{sh}^2 \rho a} - p \frac{a}{b} (\pi - \xi) \operatorname{shp} \frac{a}{b} \xi \right] + F_2(\xi) \\ (\xi_1 < \xi < \pi)$$

Здесь введены обозначения

$$X_k = k^2 G_k \left(\operatorname{ch} \xi_k a + \frac{\xi_k a}{\operatorname{sh}^2 \xi_k a} \right); \quad Y_k = k^2 C_k \left(\operatorname{ch} \xi_k b + \frac{\xi_k b}{\operatorname{sh}^2 \xi_k b} \right) \\ X_0 = 2 \frac{b^2}{\pi^2} c_0; \quad Y_0 = 2 \frac{a^2}{\pi^2} c_1 \\ N_k = \frac{2 \xi_k a + 1 - e^{-2 \xi_k a}}{\operatorname{sh} 2 \xi_k a + 2 \xi_k a}; \quad M_k = \frac{2 \xi_k b + 1 - e^{-2 \xi_k b}}{\operatorname{sh} 2 \xi_k b + 2 \xi_k b} \\ F_1(\eta) = \frac{b^2}{\pi^2} f_1 \left(\frac{\eta b}{\pi} \right); \quad F_2(\eta) = E \frac{b}{2\pi} f_2 \left(\frac{\eta b}{\pi} \right) \\ F_3(\xi) = \frac{a^2}{\pi^2} f_3 \left(\frac{\xi a}{\pi} \right); \quad F_4(\xi) = E \frac{a}{2\pi} f_4 \left(\frac{\xi a}{\pi} \right) \\ \eta_1 = \frac{\pi c}{b}, \quad \xi_1 = \frac{\pi d}{a}, \quad \eta_2 = \frac{\pi a}{2b}, \quad \xi_2 = \frac{\pi b}{2a} \quad (1.6)$$

Считая правые части парных уравнений (1.5) известными и пользуясь решением такого рода уравнений [5], приведем (1.5) к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений

$$X_k = \sum_{p=1}^{\infty} a_{pk}^{(1)} X_p + \sum_{p=1}^{\infty} b_{pk}^{(1)} Y_p + \gamma_k^{(1)} \\ Y_k = \sum_{p=1}^{\infty} a_{pk}^{(2)} Y_p + \sum_{p=1}^{\infty} b_{pk}^{(2)} X_p + \gamma_k^{(2)} \quad (1.7)$$

Коэффициенты при неизвестных (1.7) определяются формулами

$$a_{pk}^{(1)} = \frac{k}{2} N J_{pk}(\eta_1); \quad b_{pk}^{(1)} = \frac{k}{2} \frac{b^2}{a^2} (-1)^p (1 - M_p) J_{kp} \frac{b}{\pi}(\eta_1) \\ a_{pk}^{(2)} = \frac{k}{2} M J_{pk}(\xi_1); \quad b_{pk}^{(2)} = \frac{k}{2} \frac{a^2}{b^2} (-1)^p (1 - N_p) J_{kp} \frac{a}{b}(\xi_1) \quad (1.8)$$

а свободные члены — выражениями

$$\gamma_k^{(1)} = \frac{k}{2} \int_{\eta_1}^{\eta_2} G_2(\eta) z_k(\cos \eta) \operatorname{ctg} \frac{\eta}{2} d\eta - \\ - \frac{k}{2} \int_{\xi_1}^{\xi_2} G_1(\xi) z_k(\cos \xi) \operatorname{ctg} \frac{\xi}{2} d\xi - X_{0y_k}(\cos \eta_2) \quad (1.9)$$

$$\begin{aligned} \tau_k^{(2)} = & \frac{k}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} G_i(\theta) z_k(\cos \theta) \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} d\theta - \\ & - \frac{k}{2} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} G_i(\theta) z_k(\cos \theta) \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} d\theta + Y_0 y_k(\cos \frac{\pi}{2}) \end{aligned} \quad (1.9)$$

Здесь функции $G_i(\theta)$ ($i = 1 - 4$) имеют вид

$$\begin{aligned} G_1(\theta) = & \frac{2 \sqrt{2}}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{F_1(\eta) \sin \frac{\eta}{2} d\eta}{\sqrt{\cos \theta - \cos \eta}} \quad (i = 1, 3) \\ G_2(\theta) = & \frac{2 \sqrt{2}}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{F_2(\eta) \sin \frac{\eta}{2} d\eta}{1 - \cos \eta - \cos \theta} \quad (i = 2, 4) \end{aligned} \quad (1.10)$$

В формулах (1.8) введены обозначения

$$\begin{aligned} I_{kp}(x) = & \int_0^{\frac{\pi}{2}} z_k(\cos \theta) z_p(\cos \theta) \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} d\theta \\ J_{pk}(x) = & \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} z_k(\cos \theta) L_p(\cos \theta) \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} d\theta \\ L_p(\cos \theta) = & \frac{2 \sqrt{2}}{\pi \operatorname{sh} p \pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\operatorname{ch} p x - p \pi \frac{\operatorname{ch} p (\pi - x)}{\operatorname{sh} p \pi} - \right. \\ & \left. - p (\pi - x) \operatorname{sh} p x \right] \frac{\sin \frac{x}{2} dx}{\sqrt{\cos \theta - \cos x}} \end{aligned} \quad (1.11)$$

Функции $y_k(\cos \theta)$ и $z_k(\cos \theta)$ представляют собой частные случаи функций Якоби и выражаются суммой и разностью полиномов Лежандра соответственно. Дифференциальные соотношения и интегральные представления для этих функций приводятся в работе [5].

2. Приведем некоторые свойства функции $L_p(x)$. Отметим, что с функцией $L_p(x)$ тесно связаны функции $H_p(x)$, $R_p(x)$ и $K_p(x)$, которые выражаются формулами

$$\begin{aligned} H_p(\cos \theta) = & \frac{2 \sqrt{2}}{\pi \operatorname{sh} p \pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\operatorname{sh} p x + p \pi \frac{\operatorname{sh} p (\pi - x)}{\operatorname{sh} p \pi} - \right. \\ & \left. - p (\pi - x) \operatorname{ch} p x \right] \frac{\cos \frac{x}{2} dx}{\sqrt{\cos \theta - \cos x}} \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned}
 R_p(\cos \theta) &= \frac{2\sqrt{2}}{\pi \operatorname{sh} p\pi} \int_0^\pi \frac{\operatorname{ch} p x \sin \frac{x}{2} dx}{\sqrt{\cos \theta - \cos x}} \\
 K_p(\cos \theta) &= \frac{2\sqrt{2}}{\pi \operatorname{sh} p\pi} \int_0^\pi \frac{\operatorname{sh} p x \cos \frac{x}{2} dx}{\sqrt{\cos \theta - \cos x}}
 \end{aligned} \quad (2.1)$$

Непосредственной подстановкой нетрудно убедиться, что $L_p(x)$ и вспомогательные функции (2.1) удовлетворяют следующим дифференциальным соотношениям:

$$\begin{aligned}
 L_p(x) &= -\frac{p}{1+x} [H_p(x) + K_p(x)], \quad R_p(x) = -\frac{p}{1-x} K_p(x) \\
 H_p(x) &= -\frac{p}{1-x} [L_p(x) + R_p(x)], \quad \frac{2\sqrt{2}}{\pi(1-x)\sqrt{1-x}} \\
 K_p(x) &= -\frac{p}{1-x} R_p(x) + \frac{2\sqrt{2}}{\pi(1-x)\sqrt{1+x}}
 \end{aligned} \quad (2.2)$$

Из (2.2) следует, что функции $L_p(x)$ и $K_p(x)$ являются решениями дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}
 (1-x) [(1+x) L_p'(x)]' - p^2 L_p(x) &= 2p^2 R_p(x) - \frac{4\sqrt{2}p}{\pi\sqrt{1+x}} \\
 (1-x) [(1+x) K_p'(x)]' - p^2 K_p(x) &= -\frac{2\sqrt{2}p}{\pi\sqrt{1-x}}
 \end{aligned} \quad (2.3)$$

Пользуясь теперь дифференциальным уравнением для $z_k(x)$ [5] и (2.3), вычислим второй интеграл (1.11), рассматривая его как интеграл типа Ломмеля [6]

$$\begin{aligned}
 \int \frac{z_k(x) L_p(x)}{1-x} dx &= \frac{k y_k(x) L_p(x) - p z_k(x) [H_p(x) + K_p(x)]}{k^2 + p^2} \\
 &\quad - \frac{2p^2}{(k^2 + p^2)^2} [k y_k(x) R_p(x) - p z_k(x) K_p(x)] \\
 &\quad + \frac{4\sqrt{2}k^2 p}{(k^2 + p^2)^2} \int \frac{z_k(x) dx}{(1-x)\sqrt{1+x}}
 \end{aligned} \quad (2.4)$$

Отметим, что функции $L_p(x)$, $H_p(x)$, $R_p(x)$, $K_p(x)$ при больших p имеют следующий асимптотический порядок:

$$L_p(\cos \theta) \sim O\left(e^{-p(\pi-\theta)} + \frac{1}{p^3}\right) \quad (0 < \theta < \pi) \quad (2.5)$$

$$H_p(\cos \vartheta), \quad K_p(\cos \vartheta) \sim O\left(\frac{1}{p^2}\right)$$

$$R_p(\cos \vartheta) \sim O\left(\frac{1}{p}\right) \quad (0 < \vartheta < \pi) \quad (2.5)$$

а на концах основного интервала $[0, \pi]$ принимает следующие значения:

$$L_p(1) = H_p(-1) = K_p(-1) = 0, \quad R_p(1) = \frac{2}{p\pi}$$

$$R_p(-1) = 2\operatorname{cth} p\pi, \quad L_p(-1) = 2\left(\operatorname{cth} p\pi - \frac{p\pi}{\operatorname{sh}^2 p\pi}\right)$$

$$H_p(1) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k(-1)^{k+1}[p^2 - k^2]}{[p^2 + k^2]^2}$$

$$K_p(1) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k(-1)^{k+1}}{p^2 + k^2} \quad (2.6)$$

3. Исследуем бесконечные системы (1.7).

Докажем, что в общем случае бесконечные системы (1.7) квази-инвариантно регулярны. Для этого нужно оценить ряды

$$\sum_{p=1}^{\infty} |a_{pk}^{(i)}|, \quad \sum_{p=1}^{\infty} |b_{pk}^{(i)}| \quad (i=1, 2)$$

Из (1.6) видно, что числа N_p и M_p , входящие в вышеуказанные ряды, при любом „ p “ остаются меньше единицы и при больших значениях индекса стремятся к нулю как $N_p \sim O(pe^{-p^2})$ и $M_p \sim O(pe^{-p^2})$, где $\delta = 2\pi a/b$, $\gamma = 2\pi b/a$. Вследствие быстрой сходимости вышеуказанных рядов, их суммы будут по индексу „ k “ иметь такой же порядок убывания, как и их общие члены, то есть

$$\sum_{p=1}^{\infty} |a_{pk}^{(i)}| \leq O(k^{-1/2}) \quad (3.1)$$

Далее, пользуясь значением интеграла $J_{pk}(x)$ и (2.5), будем иметь

$$\sum_{p=1}^{\infty} |b_{pk}^{(i)}| \leq \frac{1}{k} \sum_{p=1}^{\infty} e^{-ph_1} \left\{ \frac{Ak + Bp}{p(k^2 + \epsilon_i^2 p^2)} + \frac{kpC + p^2 D}{(k^2 + \epsilon_i^2 p^2)^2} \right\} +$$

$$+ \frac{1}{k} \sum_{p=1}^{\infty} \left\{ \frac{kp^2 E + F}{k^2 + \epsilon_i^2 p^2} + \frac{kpG + p^2 H}{(k^2 + \epsilon_i^2 p^2)^2} \right\} \sim O(k^{-1/2})$$

$$h_1 = \frac{(b-c)\pi}{a}, \quad h_2 = \frac{(a-d)\pi}{b}$$

$$\lambda_1 = \frac{b^2}{a^2}, \quad \lambda_2 = \frac{a^2}{b^2} \quad (h_i > 0) \quad (i = 1, 2) \quad (3.2)$$

Полученные оценки стремятся к нулю при $k \rightarrow \infty$, поэтому, начиная с некоторого значения k_0 , сумма модулей коэффициентов при неизвестных станет меньше единицы, то есть система (1.7) квазиполна регулярна.

Накладывая обычные условия на граничные функции [4], легко показать, что функции $G_i(\eta)$ (1.10) непрерывные. При этом свободные члены $\gamma_k^{(i)}$ бесконечной системы (1.7) имеют порядок $O(k^{-1/2})$. Применяя метод последовательных приближений, нетрудно показать, что X_k и Y_k также имеют порядок $O(k^{-1/2})$.

Неизвестные X_k и Y_k , определяемые из (1.7), выражаются через неизвестные постоянные X_0 , Y_0 и удовлетворяют первым уравнениям (1.5) с точностью до постоянного слагаемого (так как при получении системы (1.7) эти уравнения были продифференцированы). Удовлетворяя первым уравнениям (1.5) [4], пользуясь формулами (2.4) и (1.6), для определения X_0 , Y_0 получим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} \gamma_1 X_0 \left[1 - \frac{4b}{a\pi} \ln \left(\sin \frac{\eta_1}{2} \right) \right] - \gamma_2 Y_0 &= \frac{Eb}{2\pi} f_2(0) - \\ &- \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{\infty} X_p N_p \frac{y_p(\cos i_1)}{p} - \\ &- \frac{1}{2} \int_0^{\eta_1} G_2(\eta) \operatorname{ctg} \frac{\eta}{2} d\eta - \frac{1}{2} \int_0^{\eta_2} G_1(\eta) \operatorname{ctg} \frac{\eta}{2} d\eta - \\ &+ \frac{b}{2a} \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^{p-1} Y_p (1 - M_p) \frac{1}{p} [K_{p+1/2}(\cos i_1) - H_{p+1/2}(\cos i_1)] \\ \gamma_2 Y_0 \left[1 - \frac{4a}{b\pi} \ln \left(\sin \frac{\eta_2}{2} \right) \right] - \gamma_1 X_0 &= \frac{Ea}{2\pi} f_4(0) - \\ &- \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{\infty} Y_p M_p \frac{y_p(\cos i_2)}{p} - \\ &- \frac{1}{2} \int_0^{\eta_1} G_4(\eta) \operatorname{ctg} \frac{\eta}{2} d\eta - \frac{1}{2} \int_0^{\eta_2} G_2(\eta) \operatorname{ctg} \frac{\eta}{2} d\eta - \\ &+ \frac{a}{2b} \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^{p-1} X_p (1 - N_p) \frac{1}{p} [K_{p+1/2}(\cos i_2) - H_{p+1/2}(\cos i_2)] \end{aligned} \quad (3.3)$$

При получении (3.3) было использовано также значение интеграла

$$\int_0^{\eta} \frac{L_p(x) dx}{1-x} = \frac{1}{p} [K_p(x) - H_p(x)]$$

4. Приведем формулы для напряжений и перемещений.

Подставляя в выражения (1.2) значение функции (1.3) и учитывая при этом (1.4) и (1.6), для определения перемещений и напряжений во всех точках области получим следующие выражения:

$$\begin{aligned}
 Eu(x, y) &= \frac{\pi}{a} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{Y_k(1-M_k)}{k} \sin \alpha_k x \times \\
 &\times \left\{ (1-\nu) \frac{\operatorname{ch} \alpha_k y}{\operatorname{sh} \alpha_k b} - (1+\nu) \left[\alpha_k b \frac{\operatorname{ch} \alpha_k (b-y)}{\operatorname{sh}^2 \alpha_k b} + \alpha_k (b-y) \frac{\operatorname{sh} \alpha_k y}{\operatorname{sh} \alpha_k b} \right] \right\} + \\
 &+ \frac{\pi}{b} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{X_k(1-N_k)}{k} \cos \beta_k y \left\{ 2 \frac{\operatorname{sh} \beta_k x}{\operatorname{sh}^2 \beta_k a} - (1-\nu) \left[\beta_k a \frac{\operatorname{sh} \beta_k (a-x)}{\operatorname{sh}^2 \beta_k a} - \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \beta_k (a-x) \frac{\operatorname{ch} \beta_k x}{\operatorname{sh} \beta_k a} \right] \right\} + \pi^2 x \left(\frac{X_0}{b^2} - \nu \frac{Y_0}{a^2} \right) \\
 \varepsilon_x(x, y) &= \frac{\pi^2}{a^2} \sum_{k=1}^{\infty} Y_k(1-M_k) \cos \alpha_k x \times \\
 &\times \left[\frac{\operatorname{ch} \alpha_k y}{\operatorname{sh} \alpha_k b} - \alpha_k b \frac{\operatorname{ch} \alpha_k (b-y)}{\operatorname{sh}^2 \alpha_k b} - \alpha_k (b-y) \frac{\operatorname{sh} \alpha_k y}{\operatorname{sh} \alpha_k b} \right] + \\
 &+ \frac{\pi^2}{b^2} \sum_{k=1}^{\infty} X_k(1-N_k) \cos \beta_k y \left[\frac{\operatorname{ch} \beta_k x}{\operatorname{sh} \beta_k a} + \beta_k a \frac{\operatorname{ch} \beta_k (a-x)}{\operatorname{sh}^2 \beta_k a} + \right. \\
 &\quad \left. + \beta_k (a-x) \frac{\operatorname{sh} \beta_k x}{\operatorname{sh} \beta_k a} \right] + \frac{\pi^2}{b^2} X_0 \\
 \varepsilon_{xy}(x, y) &= \frac{\pi^2}{a^2} \sum_{k=1}^{\infty} Y_k(1-M_k) \sin \alpha_k x \times \\
 &\times \left[\alpha_k b \frac{\operatorname{sh} \alpha_k (b-y)}{\operatorname{sh}^2 \alpha_k b} - \alpha_k (b-y) \frac{\operatorname{ch} \alpha_k y}{\operatorname{sh} \alpha_k b} \right] + \\
 &+ \frac{\pi^2}{b^2} \sum_{k=1}^{\infty} X_k(1-N_k) \sin \beta_k y \times \\
 &\times \left[\beta_k a \frac{\operatorname{sh} \beta_k (a-x)}{\operatorname{sh}^2 \beta_k a} - \beta_k (a-x) \frac{\operatorname{ch} \beta_k x}{\operatorname{sh} \beta_k a} \right] \quad (4.1)
 \end{aligned}$$

Аналогичные формулы получим для определения перемещения $v(x, y)$ и нормального напряжения $\varepsilon_y(x, y)$ посредством замены в (4.1)

$$X_k \leftrightarrow Y_k, x \leftrightarrow y, a \leftrightarrow b, \alpha_k \leftrightarrow \beta_k, N_k \leftrightarrow M_k, P \leftrightarrow Q \quad (4.2)$$

Эти формулы верны для всех значений x и y . Но поскольку некоторые ряды, входящие в выражения перемещений и напряжений, на границе прямоугольника сходятся медленно (условно), улучшим сходимость этих рядов на границе области. Для этого в выражения (4.1) подставим значения неизвестных X_k и Y_k из (1.7). После ряда выкладок [4] для контактного напряжения $z(x, y)$ получается следующее выражение:

$$\begin{aligned} z\left(a, \frac{b}{\pi} \tau_1\right) &= \frac{R \cos \frac{\tau_1}{2}}{1 - \cos \tau_1 - \cos \tau_1} + \frac{\pi^2}{2b^2} G_1(\pi) + \\ &+ \frac{\pi^2}{\sqrt{2} b^2} \cos \frac{\tau_1}{2} \left\{ \sum_{p=1}^{\infty} p X_p N_p \int_0^{\tau_1} y_p(\cos b) \frac{\operatorname{tg} \frac{b}{2} d\theta}{1 - \cos \tau_1 - \cos b} + \right. \\ &+ \int_0^{\tau_1} \frac{\tilde{G}_2(b) d\theta}{1 - \cos \tau_1 - \cos b} - \int_0^{\tau_1} \frac{G_1(b) d\theta}{1 - \cos \tau_1 - \cos b} + \frac{b^2}{a^2} \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p p Y_p (1 - M_p) \times \\ &\times \left. \int_0^{\tau_1} \frac{[H_{p, h+}(\cos b) + K_{p, h+}(\cos b)] \operatorname{tg} \frac{b}{2} d\theta}{1 - \cos \tau_1 - \cos b} \right\} \quad (0 = \tau_1 = \tau_1) \quad (4.3) \end{aligned}$$

Здесь коэффициент R при особенности нормального напряжения $z(a, y)$ определяется формулой:

$$\begin{aligned} R &= \frac{\pi^2}{\sqrt{2} b^2} \left\{ \sum_{p=1}^{\infty} X_p N_p [z_p(\cos \tau_1) - G_2(\tau_1) - G_1(\tau_1) - 2X_0 - \right. \\ &\left. - \frac{b^2}{a^2} \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p Y_p (1 - M_p) L_{p, h+}(\cos \tau_1) \right\} \quad (4.4) \end{aligned}$$

Для определения перемещения $u(a, y)$ вне штампов получим

$$\begin{aligned} Eu\left(a, \frac{b}{\pi} \tau_1\right) &= Ef_z(0) + \frac{2\pi}{b} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{X_p N_p}{p} (1 - \cos p\tau_1) + \\ &+ \frac{1}{b} \frac{\pi}{2} \sin \frac{\tau_1}{2} \left\{ \int_0^{\tau_1} \frac{G_1(b) \operatorname{ctg} \frac{b}{2} d\theta}{1 - \cos b - \cos \tau_1} - \right. \\ &- \int_0^{\tau_1} \frac{G_2(b) \operatorname{ctg} \frac{b}{2} d\theta}{1 - \cos b - \cos \tau_1} - \sum_{p=1}^{\infty} X_p N_p \int_0^{\tau_1} \frac{z_p(\cos b) \operatorname{ctg} \frac{b}{2} d\theta}{1 - \cos b - \cos \tau_1} \end{aligned} \quad (4.5)$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{4X_0}{\sqrt{1-\cos\gamma_1}} \ln \frac{\sqrt{1-\cos\gamma_1} + \sqrt{\cos\gamma_1 - \cos\gamma_2}}{\sqrt{1-\cos\gamma_2}} + \\
& + \frac{b^2}{a^2} \sum_{p=1}^{\infty} Y_p (1-M_p) (-1)^{p+1} \int_{\gamma_1}^{\pi} \frac{L_p b \tau (\cos\theta) \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2}}{\sqrt{\cos\theta - \cos\gamma_1}} d\theta \quad (4.5) \\
& (\gamma_1 < \gamma_2 < \pi)
\end{aligned}$$

Аналогичные выражения для $\sigma_y \left(\frac{a^2}{\pi}, b \right)$ и $v \left(\frac{a^2}{\pi}, b \right)$ могут быть получены из (4.3) — (4.5) заменой $\gamma_1 = \frac{\pi}{2}$ и (4.2).

Имея формулы контактных напряжений, нетрудно получить связи между силами P , Q , действующими на штампы (фиг. 1) и осадками этих штампов

$$\begin{aligned}
P &= \frac{\pi^2}{a^2} Y_0 - \frac{a}{\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f_3 \left(\frac{a}{\pi} \right) d\xi \\
Q &= \frac{\pi^2}{b^2} X_0 - \frac{b}{\pi} \int_{\gamma_1}^{\pi} f_3 \left(\frac{b}{\pi} \right) d\eta
\end{aligned}$$

5. Рассмотрим некоторые частные случаи значений параметров.

а) $a = b$, $c = d$. В этом случае $X_k = Y_k$, $X_0 = Y_0$, и решение задачи сводится к определению неизвестных X_k из одной бесконечной системы линейных уравнений.

б) $c = b$, то есть штамп приложен по всей длине стороны. Из первых уравнений (1.7) с учетом (2.6) получим

$$\begin{aligned}
X_k &= \frac{2k}{\pi(1-N_k)} \int_0^{\pi} F_2(\gamma) \cos k\gamma d\gamma \\
\gamma_1 X_0 - \gamma_{12} Y_0 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} F_2(\gamma) d\gamma \quad (5.1)
\end{aligned}$$

и решение сводится к определению Y_k из второго уравнения (1.7) с учетом (5.1).

В случае полосы под действием симметричных периодических штампов $F_2(\gamma) = 0$ из (5.1) получим $X_k = 0$. Регулярность оставшейся системы можно улучшить введением нового неизвестного $Z_k = Y_k/k$. Из второго уравнения (1.7) получается

$$Z_k = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{p a_{pk}^{(2)}}{k} Z_p + \frac{a_{1k}^{(2)}}{k} \quad (5.2)$$

$$\sum_{p=1}^{\infty} \left| \frac{p}{k} a_{pk}^{(2)} \right| \sim O(k^{-3/2}); \quad \frac{\gamma_k^{(2)}}{k} \sim O(k^{-3/2}) \quad (5.2)$$

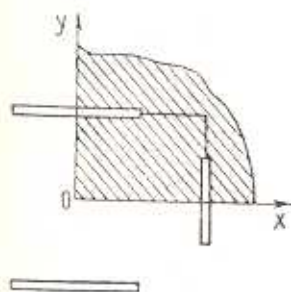
в) $c = 0$, то есть стороны BC и DA свободны от штампов и на них действуют нормальные напряжения.

В этом случае первое уравнение бесконечной системы (1.7) и первое равенство (3.3) принимают соответственно вид

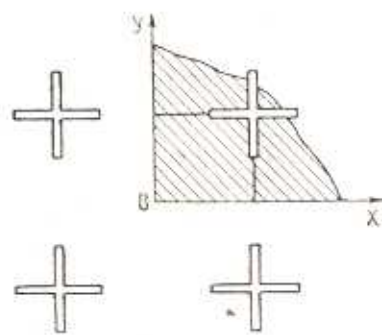
$$\begin{aligned} X_k &= \frac{2b^3k(-1)^k}{\pi a^3} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{p(-1)^{p-1}(1-M_p)Y_p}{\left| \left(p \frac{b}{a} \right)^2 \pm k^2 \right|^2} + \\ &+ \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} F_1(\gamma) \cos k\gamma d\gamma \\ X_0 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} F_1(\gamma) d\gamma \end{aligned} \quad (5.3)$$

Полученная здесь система для данного случая ((5.3) и второе уравнение (1.7)) также квазивполне регулярна. При этом нетрудно получить решение рассматриваемой задачи в случаях $a \rightarrow \infty$ или $b \rightarrow \infty$.

г) $c = d = 0$, то есть по всему контуру заданы напряжения. В этом случае решение приводится к определению неизвестных коэффициентов из вполне регулярной бесконечной системы [1].



Фиг. 2.



Фиг. 3.

Отметим, наконец, что задача, рассмотренная в работе [4], при $f_2(y) = f_4(x) = 0$ соответствует плоской задаче для неограниченной плоскости с двоякопериодическими прямолинейными разрезами (фиг. 2), а рассмотренная здесь задача при $f_2(y) = f_4(x) = 0$ соответствует уже плоской задаче теории упругости для бесконечной плоскости, ослабленной двоякопериодическими крестообразными разрезами (фиг. 3).

Аналогично может быть рассмотрена задача в том случае, когда между штампами и материалом прямоугольника существует кулоновское трение или жесткое сцепление.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 15 IV 1971

Ա. Հ. ԲԱԲԼՅԱՆ, Ա. Մ. ՄԿՐՏՉՅԱՆ

ՈՒՂՂԱՆԿՅԱՆ ՀԱՄԱՐ ՄԻ ԽԱՌԸ ԽՆԴԻՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ա մ փ ո փ ո ս մ

Դիտարկվում է առանձգականության տեսության հարթ խնդիրը ուղղանկյան համար, երբ ուղղանկյան բոլոր կողմերի վրա կցրային պայմանները տրված են խառը ձևով: Ընդունվում է, որ արտաքին չոշափող լարումները բացակայում են և ուղղանկյունը սեղմվում է կողմերի կենտրոններում դրված բացարձակ կոշտ գրոշմների միջոցով, որոնց կողմերի երկարությունները տարբեր են: Ենթադրվում է նաև, որ կա սիմետրիայի երկու առանցք:

Խնդիրը լուծվում է Ֆուրյեի մեթոդով: Շարքերի գործակիցների որոշման համար սկզբում ստացվում են եռանկյունաշափական դույզ հավասարումներ, ալիուհենան՝ հանքահաշվական անվերջ սխառումներ: Շուրջ է տրվում ալի սխառումների քվադր-լիոմին սկզբայարությունը: Ստացված են բանաձևեր տեղադրությունների և կոնտակտային լարումների հաշվման համար:

Դիտարկված են մասնավոր դեպքեր պարամետրերի սահմանային արժեքների և որոշ կցրային պայմանների համար:

A MIXED PROBLEM FOR A RECTANGULAR REGION

A. A. BABLOYAN, A. M. MKRTCHIAN

S u m m a r y

A plane problem for a rectangular region is solved where on all its areas the boundary conditions are given in a mixed form.

The tangent strains along the contour are assumed to be absent and the rectangle to be pressed on all its sides with rigid punches symmetrically spaced at its centres. The length of the punches applied on opposite sides is the same while that acting on the neighbouring ones is different.

The problem is reduced to a system of dual trigonometrical equations, and then to a quasiregular infinite system of linear algebraic equations.

Some particular cases for the limit values of parameters and for different boundary conditions are considered.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Абрамян Б. А. К плоской задаче теории упругости для прямоугольника. ПММ, т. XXI, вып. 1, 1957.
2. Абрамян Б. А., Манукян М. М. Решение плоской задачи теории упругости для прямоугольника в перемещениях. Докл. АН Арм. ССР, т. XXV, № 4, 1957, 177—184.
3. Бабоян А. А., Мелконян А. П. Об одной смешанной задаче плоской теории упругости. Изв. АН Арм. ССР, Механика, т. XXIII, № 5, 1970.
4. Бабоян А. А., Гулакян Н. О. Об одной смешанной задаче для прямоугольника. Изв. АН Арм. ССР, Механика, т. XXII, № 1, 1969.
5. Бабоян А. А. Решение некоторых парных уравнений, встречающихся в задачах теории упругости. ПММ, т. XXXI, вып. 2, № 4, 1967.
6. Гобсон Е. Р. Теория сферических и эллипсоидальных функций. ИЛ, М., 1952.