

А. С. ХАЧИКЯН

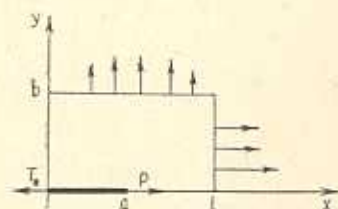
ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ПРЯМОУГОЛЬНИКА С ТОНКОСТЕННЫМ ВКЛЮЧЕНИЕМ

Рассматривается плоская задача теории упругости для прямоугольника с симметричным тонкостенным включением, подвергнутого действию симметричной внешней нагрузки. Решение этой задачи приводится к квази-вполне регулярной бесконечной системе линейных алгебраических уравнений.

Задачи определения напряженного состояния плоскости и полуплоскости с неограниченными стрингерами впервые были рассмотрены Меланом [1]. В работах [2—8] исследованы различные задачи для неограниченных областей с тонкостенными включениями и накладками конечной или бесконечной длины.

1. Рассмотрим прямоугольник $-l \leq x \leq l$, $-b \leq y < b$ с тонкостенным включением длиной $2a$, расположенным на оси абсцисс симметрично относительно начала координат. Пусть включение растягивается приложенными на его концах равными и противоположно направленными силами величиною $2P$ каждая и пусть внешняя нагрузка на кромках прямоугольника симметрична относительно обеих осей координат. Примем, для простоты, что на кромках прямоугольника касательные напряжения равны нулю.

В силу симметрии можно рассматривать только четверть прямоугольника (фиг. 1).



Фиг. 1.

На границе рассматриваемой области, согласно условиям задачи и [9], имеем условия

$$\tau_{xy}|_{x=0} = \tau_{xy}|_{x=l} = \tau_{xy}|_{y=b} = u|_{x=0} = v|_{y=0} = 0 \quad (1.1)$$

$$q_{xx}|_{x=l} = f_1(y): \quad f_1(y) = \frac{b_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \cos \beta_k y \quad (1.2)$$

$$\tau_{yy}|_{y=b} = f_2(x); \quad f_2(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos \alpha_k x \quad (1.3)$$

$$\tau_{xy}|_{y=0} = 0 \quad \text{при } a < x < l \quad (1.4)$$

$$Eu' + \beta T = 0 \quad \text{при } 0 < x < a, y = 0 \quad (1.5)$$

где $f_1(y)$ и $f_2(x)$ — заданные функции; τ_{xx} , τ_{yy} , τ_{xy} , u , v — напряжения и перемещения; E , ν — модуль упругости и коэффициент Пуассона материала прямоугольника;

$$\beta = \frac{E(1 - \nu_{\text{вк}}^2)}{E_{\text{вк}} h}, \quad \alpha_k = \frac{k\pi}{l}, \quad \beta_k = \frac{k\pi}{b} \quad (1.6)$$

$2h$ — толщина включения; $2T$ — натяжение включения

$$T = P + \int_a^l \tau_{xy} dx \quad (1.7)$$

Напряжения и перемещения выражаются через функцию напряжений Эйри формулами

$$\begin{aligned} \tau_{xx} &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}, & \tau_{yy} &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}, & \tau_{xy} &= -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \\ Eu &= \int \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} dx - \nu \frac{\partial \Phi}{\partial x}, & Ev &= \int \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} dy - \nu \frac{\partial \Phi}{\partial y} \end{aligned} \quad (1.8)$$

Представим функцию напряжений в виде

$$\begin{aligned} \Phi(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} [A_k \operatorname{ch} \alpha_k y + B_k \operatorname{sh} \alpha_k y + \alpha_k y (C_k \operatorname{ch} \alpha_k y + \\ &+ D_k \operatorname{sh} \alpha_k y)] \cos \alpha_k x + \sum_{k=1}^{\infty} [E_k \operatorname{ch} \beta_k x + F_k \operatorname{sh} \beta_k x + \\ &+ \beta_k x (G_k \operatorname{ch} \beta_k x + H_k \operatorname{sh} \beta_k x)] \cos \beta_k y + t_1 x^2 + t_2 y^2 \end{aligned} \quad (1.9)$$

Удовлетворяя условиям (1.1), получим

$$\begin{aligned} F_k = G_k = 0, \quad (1 + \nu) B_k = (1 - \nu) C_k \\ E_k = -H_k (1 + \beta_k l \operatorname{cth} \beta_k l) \end{aligned} \quad (1.10)$$

$$(A_k + D_k) \operatorname{sh} \alpha_k b + (B_k + C_k) \operatorname{ch} \alpha_k b + \alpha_k b (C_k \operatorname{sh} \alpha_k b + D_k \operatorname{ch} \alpha_k b) = 0$$

Условия (1.2)–(1.5) с учетом (1.7), (1.10) и обозначений

$$x = \frac{l}{\pi} \gamma, \quad \alpha = \frac{\alpha \pi}{l}, \quad \gamma_k = \frac{l}{b} k \quad (1.11)$$

$$\begin{aligned} \alpha_k^2 (D_k \operatorname{sh} \alpha_k b + C_k \operatorname{ch} \alpha_k b) &= \sqrt{\alpha_k} X_k \\ \frac{b}{l} \beta_k^2 H_k \operatorname{sh} \beta_k l &= \sqrt{\beta_k} Y_k, \quad \alpha_k^{2q} C_k = Z_k \end{aligned} \quad (1.12)$$

приводят к следующим уравнениям:

$$\begin{aligned} \frac{l}{b} \sqrt{\beta_k} Y_k \left(\operatorname{cth} \beta_k l + \frac{\beta_k l}{\operatorname{sh}^2 \beta_k l} \right) &= b_k + \frac{4}{b} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^p \alpha_p}{\alpha_p^2 + \beta_k^2} \left\{ \frac{\sqrt{\alpha_p} X_p \beta_k^2 (-1)^{p+1}}{\alpha_p^2 + \beta_k^2} + \right. \\ &\left. + Z_p \alpha_p^{-1} \left[\frac{1}{1+\nu} + \frac{\beta_k^2}{\alpha_p^2 + \beta_k^2} \right] \right\} \end{aligned} \quad (1.13)$$

$$\begin{aligned} \sqrt{\alpha_k} X_k \left(\operatorname{cth} \alpha_k b + \frac{\alpha_k b}{\operatorname{sh}^2 \alpha_k b} \right) + \frac{Z_k}{\alpha_k^{1/2}} \left(\frac{1-\nu}{1+\nu} \frac{1}{\operatorname{sh} \alpha_k b} - \frac{\alpha_k b \operatorname{ch} \alpha_k b}{\operatorname{sh}^2 \alpha_k b} \right) &= \\ = a_k - \frac{4 \alpha_k^2 (-1)^k}{b} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^p \beta_p l \sqrt{\beta_p} Y_p}{(\beta_p^2 + \alpha_k^2)^2} \end{aligned} \quad (1.14)$$

$$t_2 = \frac{b_0}{4}, \quad t_1 = \frac{a_0}{4} \quad (1.15)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} Z_k \alpha_k^{-1/2} \sin k \gamma = 0 \quad \text{при } \alpha < \gamma < \pi \quad (1.16)$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} Z_k \alpha_k^{-1/2} \cos k \gamma &= \frac{1}{3-\nu} \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{\sqrt{\alpha_k} X_k}{\operatorname{sh} \alpha_k b} [1-\nu - (1+\nu) \alpha_k b \operatorname{cth} \alpha_k b] + \right. \\ &+ \frac{Z_k}{\alpha_k^{1/2}} \left[\frac{(1+\nu) \alpha_k b}{\operatorname{sh}^2 \alpha_k b} + (3-\nu) (1 - \operatorname{cth} \alpha_k b) - \frac{2\beta_k^2}{1+\nu} \frac{1}{\alpha_k} \right] \left. \right\} \cos k \gamma + \\ &+ \frac{l}{b(3-\nu)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{\beta_k} Y_k}{\operatorname{sh} \beta_k l} [(1-\nu) \operatorname{ch} \gamma_k \gamma + (1+\nu) \beta_k l \operatorname{cth} \beta_k l \operatorname{ch} \gamma_k \gamma - \\ &- (1+\nu) \gamma_k \gamma \operatorname{sh} \gamma_k \gamma] + \frac{2\beta_k^2}{(1+\nu)(3-\nu)} \sum_{k=1}^{\infty} Z_k \alpha_k^{-1/2} \cos \alpha_k a + \\ &+ \frac{2t_2 - 2\nu t_1 + \beta P}{3-\nu} \quad \text{при } 0 < \gamma < \alpha \end{aligned} \quad (1.17)$$

Используя решение парных рядов-уравнений, данное А. А. Баблюком в [10], из (1.16)–(1.17) для неизвестных коэффициентов Z_k получим

$$Z_k = \frac{k \alpha_k^{1/2}}{2(3-\nu)} \sum_{p=1}^{\infty} \left\{ \frac{\sqrt{\alpha_p} X_p}{\operatorname{sh} \alpha_p b} [1-\nu - (1+\nu) \alpha_p b \operatorname{cth} \alpha_p b] + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{Z_p}{\alpha_p^{\frac{1}{2}}} \left[\frac{(1+\nu)\alpha_p b}{\operatorname{sh}^2 \alpha_p b} - (3-\nu)(\operatorname{cth} \alpha_p b - 1) - \frac{2\beta}{1+\nu} \frac{1}{\alpha_p} \right] I_{kp} + \\
& + \frac{l_2^{\frac{1}{2}} k \sqrt{2}}{\pi b (3-\nu)} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{V \beta_p Y_p}{\operatorname{sh} \beta_p l} \{ [1-\nu + (1+\nu)\beta_p \operatorname{cth} \beta_p l] J_{kp} - (1+\nu)\gamma_k K_{kp} \} \\
& + \frac{k \alpha_k^{\frac{1}{2}}}{2(3-\nu)} \left[\frac{4\beta}{1+\nu} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{Z_p}{\alpha_p^{\frac{1}{2}}} \cos \alpha_p a + 4(t_2 - \nu t_1) + 2\beta P \right] I_k \quad (1.18)
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
I_{kp} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} y_k(\cos \theta) y_p(\cos \theta) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} d\theta \\
J_{kp} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} y_k(\cos \theta) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{ch} \gamma_k \gamma \cos \frac{\gamma}{2} d\gamma}{(\cos \gamma - \cos \theta)^{1/2}} \\
K_{kp} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} y_k(\cos \theta) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sh} \gamma_k \gamma \cos \frac{\gamma}{2} d\gamma}{(\cos \gamma - \cos \theta)^{1/2}} \\
I_k &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} y_k(\cos \theta) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} d\theta \\
y_k(\cos \theta) &= \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos k\varphi \cos \frac{\varphi}{2} d\varphi}{(\cos \varphi - \cos \theta)^{1/2}} \quad (1.19)
\end{aligned}$$

Все искомые коэффициенты могут быть определены решением бесконечных систем (1.13)–(1.15) и (1.18).

2. Докажем, что бесконечные системы (1.13)–(1.15) и (1.18) квази-вполне регулярны. Для этого достаточно воспользоваться следующими оценками:

$$\begin{aligned}
\frac{4k\sqrt{k}l\sqrt{l}b^2\sqrt{b}}{\pi} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{p\sqrt{p}}{(p^2b^2 + k^2l^2)^2} &= \frac{1}{1/2} + O\left(\frac{1}{k}\right) \\
b^2 \sum_{p=1}^{\infty} \frac{p}{p^{\frac{1}{2}}(b^2p^2 + l^2k^2)} &= O(k^{-\frac{1}{2}}) \quad (2.1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 k^{\frac{1}{2}} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{V_p}{\operatorname{sh} \alpha_p b} I_{kp} &= O(k^{-\frac{1}{2}}), & k^{\frac{1}{2}} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{I_{kp}}{p^{\frac{1}{2}}} &= O\left(\frac{\ln k}{k^{\frac{1}{2}}}\right) \\
 k^{\frac{1}{2}} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{J_{kp}}{\operatorname{sh} \beta_p l} &= O(k^{-\frac{1}{2}}), & k^{\frac{1}{2}} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{K_{kp}}{\operatorname{sh} \beta_p l} &= O(k^{-\frac{1}{2}}) \\
 k^{\frac{1}{2}} \sum_{p=1}^{\infty} p^{-\frac{1}{2}} I_k \cos \alpha_p a &= O(k^{-\frac{1}{2}}), & I_k &= O(2k^{-\frac{1}{2}})
 \end{aligned} \quad (2.2)$$

Свободные члены систем (1.13)–(1.15) и (1.18) при обычных предположениях относительно заданных функций $f_1(y)$, $f_2(x)$ вследствие (2.2) ограничены и при больших k убывают не медленнее, чем $k^{-\frac{1}{2}}$.

При получении оценок (2.1)–(2.2) были использованы значения интегралов I_{kp} , J_{kp} , K_{kp} , I_k , асимптотические разложения функций $y_k(\cos \theta)$, $z_k(\cos \theta)$, $Y_p(\cos \theta)$, $V_p(\cos \theta)$, приведенных в работах [10, 11].

3. В окрестности концов включения напряжения имеют особенность. Приведем выражения для напряжений на линии $y=0$, содержащие в виде множителя эту особенность

$$\begin{aligned}
 \sigma_{xy}|_{y=0} &= \frac{2\sqrt{2}}{1+\nu} \frac{\sin \frac{\gamma}{2}}{\sqrt{\cos \gamma - \cos \alpha}} \left\{ \frac{1}{2(3-\nu)} \sum_{p=1}^{\infty} M_1 y_p(\cos \alpha) + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{l}{2b(3-\nu)} \sum_{p=1}^{\infty} M_2 Y_{\gamma_p}(\cos \alpha) - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{l(1+\nu)}{2b(3-\nu)} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\gamma_p l^{\frac{1}{2}} Y_p}{\operatorname{sh} \beta_p l} V_{\gamma_p}(\cos \alpha) + M_3 \right\} + \\
 &\quad + \frac{1}{(1+\nu)(3-\nu)} \left\{ \sum_{p=1}^{\infty} p M_1 \sum_{k=1}^{\infty} L_1 \sin \alpha_k x - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{l}{b} \sum_{p=1}^{\infty} \gamma_p M_2 \sum_{k=1}^{\infty} L_2 \sin \alpha_k x + \frac{l(1+\nu)}{b} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{l^{\frac{1}{2}} Y_p \gamma_p}{\operatorname{sh} \beta_p l} \sum_{k=1}^{\infty} L_3 \sin \alpha_k x \right. \\
 \sigma_{xx}|_{y=0} &= N_2 \frac{3+\nu}{1+\nu} \left\{ \frac{1}{2(3-\nu)} \sum_{p=1}^{\infty} M_1 \left[y_p(\cos \alpha) - p \sum_{k=1}^{\infty} L_1 \cos \alpha_k x \right] + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{l}{2b(3-\nu)} \sum_{p=1}^{\infty} \left[M_2 Y_{\gamma_p}(\cos \alpha) - \gamma_p M_2 \sum_{k=1}^{\infty} L_2 \cos \alpha_k x - \right. \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{(1+\nu) V \sqrt{\beta_p} \gamma_p Y_p}{\text{sh } \beta_p l} \left(V_{\gamma_p}(\cos \alpha) - \sum_{k=1}^{\infty} L_k \cos \alpha_k x \right) \Big| + M_3 \Big\} + \\
& + \frac{H(x-a) V \sqrt{2} \sin \frac{\gamma}{2}}{V \cos \alpha - \cos \gamma} \frac{3+\nu}{2(1+\nu)(3-\nu)} \left\{ \sum_{p=1}^{\infty} M_1 y_p(\cos \alpha) + \right. \\
& + \left. \frac{l}{b} \sum_{p=1}^{\infty} \left[M_2 Y_{\gamma_p}(\cos \alpha) - \frac{(1+\nu) V \sqrt{\beta_p} \gamma_p Y_p}{\text{sh } \beta_p l} V(\cos \alpha) \right] + M_3 \right\} \\
\sigma_{yy}^I \Big|_{y=0} = & N_1 + \frac{1-\nu}{2(1+\nu)(3-\nu)} \left\{ \sum_{p=1}^{\infty} M_1 \left[y_p(\cos \alpha) - p \sum_{k=1}^{\infty} L_k \cos \alpha_k x \right] + \right. \\
& + \left. \frac{l}{b} \sum_{p=1}^{\infty} \left[M_2 \left(Y_{\gamma_p}(\cos \alpha) - \gamma_p \sum_{k=1}^{\infty} L_k \cos \alpha_k x \right) - \right. \right. \\
& - \left. \left. \frac{(1-\nu) \gamma_p V \sqrt{\beta_p} Y_p}{\text{sh } \beta_p l} \left(V_{\gamma_p}(\cos \alpha) - \sum_{k=1}^{\infty} L_k \cos \alpha_k x \right) \right] + 2(3-\nu) M_3 \right\} + \\
& + \frac{(1-\nu) H(x-a) V \sqrt{2} \sin \frac{\gamma}{2}}{2(1+\nu)(\nu-3) V \cos \alpha - \cos \gamma} \left\{ \sum_{p=1}^{\infty} M_1 y_p(\cos \alpha) + \right. \\
& + \left. \frac{l}{b} \sum_{p=1}^{\infty} \left[M_2 Y_{\gamma_p}(\cos \alpha) - \frac{(1+\nu) \gamma_p V \sqrt{\beta_p} Y_p}{\text{sh } \beta_p l} V_{\gamma_p}(\cos \alpha) \right] + 2(3-\nu) M_3 \right\}
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
N_1 = & \frac{l}{b} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{V \sqrt{\beta_k} Y_k}{\text{sh } \beta_k l} [\beta_k x \text{sh } \beta_k x + \text{ch } \beta_k x (1 - \beta_k l \text{cth } \beta_k l)] + \\
& + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{V \sqrt{\alpha_k} X_k}{\text{sh } \alpha_k b} (1 + \alpha_k b \text{cth } \alpha_k b) + \frac{Z_k}{\alpha_k^{1/4}} \left(\frac{1-\nu}{1+\nu} (\text{cth } \alpha_k b - 1) - \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{\alpha_k b}{\text{sh}^2 \alpha_k b} \right) \right] \cos \alpha_k x \\
N_2 = & \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{V \sqrt{\alpha_k} X_k}{\text{sh } \alpha_k b} (1 - \alpha_k b \text{cth } \alpha_k b) - \frac{Z_k}{\alpha_k^{1/4}} \left(\frac{3+\nu}{1+\nu} \text{cth } \alpha_k b - \frac{3+\nu}{1+\nu} - \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{\alpha_k b}{\text{sh}^2 \alpha_k b} \right) \right] \cos \alpha_k x - \frac{l}{b} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{V \sqrt{\beta_k} Y_k}{\text{sh } \beta_k l} [\beta_k x \text{sh } \beta_k x - \text{ch } \beta_k x (1 + \\
& + \beta_k l \text{cth } \beta_k l)] + 2t_2
\end{aligned}$$

$$N_3 = \frac{1}{2(3-\nu)} \sum_{p=1}^{\infty} M_1 \left[y_p(\cos \alpha) - P \sum_{k=1}^{\infty} L_1 \cos \alpha_k x \right] +$$

$$+ \frac{l}{2b(3-\nu)} \sum_{p=1}^{\infty} \left[M_2 Y_{\gamma_p}(\cos \alpha) - \gamma_p M_2 \sum_{k=1}^{\infty} L_2 \cos \alpha_k x - \right.$$

$$\left. - \frac{(1+\nu) \gamma_p \sqrt{\beta_p} Y_p}{\operatorname{sh} \beta_p l} \left(V_{\gamma_p}(\cos \alpha) - \sum_{k=1}^{\infty} L_3 \cos \alpha_k x \right) \right] + M_3$$

$$M_1 = \frac{\sqrt{\alpha_p} X_p}{\operatorname{sh} \alpha_p b} [1 - \nu - (1 + \nu) \alpha_p b \operatorname{cth} \alpha_p b] +$$

$$+ \frac{Z_p}{\alpha_p^{3/4}} \left[\frac{(1 + \nu) \alpha_p b}{\operatorname{sh}^2 \alpha_p b} - (3 - \nu) (\operatorname{cth} \alpha_p b - 1) - \frac{2\beta^2}{(1 + \nu) \alpha_p} \right]$$

$$M_2 = \frac{\sqrt{\beta_p} Y_p}{\operatorname{sh} \beta_p l} [1 - \nu + (1 + \nu) \beta_p l \operatorname{cth} \beta_p l]$$

$$M_3 = \frac{2\beta^2}{(3 - \nu)(1 + \nu)} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{Z_p}{\alpha_p^{3/4}} \cos \alpha_p a + \frac{2(t_2 - \nu t_1) + \beta P}{3 - \nu}$$

$$L_1 = \int_0^{\pi} z_k(\cos \theta) z_p(\cos \theta) \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} d\theta$$

$$L_2 = \int_0^{\pi} z_k(\cos \theta) Z_{\gamma_p}(\cos \theta) \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} d\theta$$

$$L_3 = \int_0^{\pi} z_k(\cos \theta) [Z_{\gamma_p}(\cos \theta) + \gamma_p W_{\gamma_p}(\cos \theta)] \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} d\theta$$

$$H(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases} \text{ — функция Хевисайда}$$

$$z_k(\cos \theta) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \int_0^{\theta} \frac{\sin k\varphi \sin \frac{\varphi}{2} d\varphi}{(\cos \varphi - \cos \theta)^{1/2}}$$

$$Z_k(\cos \theta) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \int_0^{\theta} \frac{\operatorname{sh} kx \sin \frac{x}{2} dx}{(\cos x - \cos \theta)^{1/2}}$$

$$W_p(\cos \theta) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \int_0^{\theta} \frac{x \operatorname{ch} px \sin \frac{x}{2} dx}{(\cos x - \cos \theta)^{1/2}} \quad (3.1)$$

$$Y_p(\cos \theta) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \int_0^{\theta} \frac{\operatorname{ch} px \cos \frac{x}{2} dx}{(\cos x - \cos \theta)^{1/2}}$$

$$V_p(\cos \theta) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \int_0^{\theta} \frac{x \operatorname{sh} px \cos \frac{x}{2} dx}{(\cos x - \cos \theta)^{1/2}}$$

Ряды, содержащиеся в выражениях для напряжений, очевидно, сходятся абсолютно и равномерно.

При получении этих формул использованы значения некоторых рядов и интегралов, а также свойства функций (1.20) и (3.1), полученные в работах [10, 11].

4. Рассмотрим некоторые частные случаи и видоизменения первой начальной задачи.

а) Полоса с периодическими включениями, параллельными ее краям.

Решение этой задачи получим, если в граничных условиях (1.1)–(1.5) заменим условие (1.2) на

$$u \Big|_{x=l} = 0 \quad (4.1)$$

оставляя остальные неизменными.

Бесконечную систему для определения неизвестных коэффициентов в этой задаче получим из системы (1.18), если положим $Y_k = 1$

$$V_{\alpha_k} \bar{X}_k \left(\operatorname{cth} \alpha_k b + \frac{\alpha_k b}{\operatorname{sh}^2 \alpha_k b} \right) + \frac{Z_k}{\alpha_k^{1/4}} \left(\frac{1-\nu}{1+\nu} \frac{1}{\operatorname{sh} \alpha_k b} - \frac{\alpha_k b \operatorname{ch} \alpha_k b}{\operatorname{sh}^2 \alpha_k b} \right) = a_k \quad (4.2)$$

$$t_2 = \nu t_1, \quad t_1 = \frac{a_0}{4}$$

б) Полоса с периодическими включениями, перпендикулярными к ее краям.

Решение этой задачи получим, если в граничных условиях (1.1)–(1.5) заменим условие (1.3) на

$$\nu \Big|_{y=b} = 0 \quad (4.3)$$

оставляя остальные неизменными.

Бесконечные системы для определения неизвестных коэффициентов этой задачи получим из систем (1.13) и (1.18), если положим

$$X_k = 0, \quad t_1 = \nu t_2, \quad t_2 = \frac{b_0}{4} \quad (4.4)$$

в) Плоскость с двоякопериодическими включениями.

Выполняя одновременно замены в граничных условиях, выполненных в случаях а) и б), получим

$$X_k = 0, \quad Y_k = 0$$

$$Z_k = \frac{k\alpha_k^{\frac{1}{2}}}{2(3-\nu)} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{Z_p}{\alpha_p^{1/4}} \left[\frac{(1+\nu)\alpha_p b}{\operatorname{sh}^2 \alpha_p b} - (3-\nu)(\operatorname{cth} \alpha_p b - 1) - \frac{2\beta}{1+\nu} \frac{1}{\alpha_p} \right] I_{kp} + \\ + \frac{k\alpha_k^{\frac{1}{2}}}{2(3-\nu)} \left[\frac{4\beta}{1+\nu} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{Z_p}{\alpha_p^{5/4}} \cos \alpha_p a + 2\beta P \right] I_k, \quad t_1 = t_2 = 0 \quad (4.5)$$

г) Переходя формально к пределу при $l \rightarrow \infty$ и $b \rightarrow \infty$ в системах (1.13)–(1.15), (1.18), получим интегральные уравнения задач для полосы или плоскости с единичными и $\frac{1}{2}$ -периодическими включениями. Однако, более удобные для вычислений интегральные уравнения можно получить непосредственным рассмотрением названных задач.

Приведем интегральное уравнение задачи для плоскости с периодическими включениями, центры которых лежат на прямой $x=0$, под действием равномерного, параллельного включения растягивающего напряжения на бесконечности.

Представляя функцию напряжений в виде

$$\Phi(x, y) = \int_0^{\infty} \{ A(\lambda) \operatorname{ch} \lambda y + B(\lambda) \operatorname{sh} \lambda y + \lambda y [C(\lambda) \operatorname{ch} \lambda y + \\ + D(\lambda) \operatorname{sh} \lambda y] \} \cos \lambda x d\lambda + ty^2$$

удовлетворяя соответствующим граничным условиям и условиям на бесконечности и поступая аналогично [12], получим

$$D(\lambda) = -C(\lambda) \operatorname{cth} \lambda b - \frac{\nu \sigma_0 b}{2 \operatorname{sh} \lambda b}$$

$$A(\lambda) = C(\lambda) \left[\frac{\lambda b}{\operatorname{sh}^2 \lambda b} - \frac{1-\nu}{1+\nu} \operatorname{cth} \lambda b \right] + \frac{\nu \sigma_0 b}{2 \operatorname{sh} \lambda b} (1 + \lambda b \operatorname{cth} \lambda b)$$

$$B(\lambda) = C(\lambda) \frac{1-\nu}{1+\nu}, \quad t = \frac{\sigma_0}{2}$$

$$\psi(x) = \int_0^a \psi(y) H(x, y) dy + f(x) \quad (4.6)$$

где

$$\psi(x) = \frac{\varphi(x)}{x}, \quad z(\lambda) = \lambda^2 C(\lambda)$$

$$z(\lambda) = \int_0^a \varphi(y) J_1(\lambda y) dy$$

$$H(x, y) = \frac{\pi}{2} \int_0^{\infty} \lambda N(\lambda) J_1(\lambda y) H_0(x, \lambda) d\lambda +$$

$$+ \begin{cases} \frac{2\beta_0}{\pi} \left[E\left(\frac{y}{x}\right) - K\left(\frac{y}{x}\right) \right] & \text{при } y < x \\ \frac{2\beta_0}{\pi} \frac{y}{x} \left[E\left(\frac{x}{y}\right) - K\left(\frac{x}{y}\right) \right] & \text{при } y > x \end{cases}$$

$$N(\lambda) = \operatorname{cth} \lambda b - 1 + \frac{1 + \nu}{\nu - 3} \frac{\lambda b}{\operatorname{sh}^2 \lambda b}$$

$$f(x) = \int_0^{\infty} \lambda F(\lambda) H_0(\lambda x) d\lambda$$

$$F(\lambda) = \frac{\nu \tau_0 b \lambda^2}{2 \operatorname{sh} \lambda b} [1 + \nu + (\nu - 1) \lambda b \operatorname{cth} \lambda b], \quad \beta_0 = \frac{2\beta}{(1 + \nu)(\nu - 3)}$$

τ_0 — заданное напряжение на бесконечности; $E(k)$, $K(k)$ — полные эллиптические интегралы; $J_1(z)$ — функция Бесселя; $H_0(z)$ — функция Струве.

Уравнение (4.6) является уравнением Фредгольма второго рода.

д) Растяжение полосы с периодическими включениями, параллельными ее краям.

Решение этой задачи получим, если в граничных условиях (1.1)–(1.5) заменим условие (1.2) на

$$Eu \Big|_{x=l} = 2lf\tau_0 \quad (4.7)$$

где τ_0 — заданное напряжение на бесконечности; f — постоянная, подлежащая определению.

Поступая аналогично п. 1, получаем бесконечную систему

$$Z_k = \frac{k\alpha_k^{\frac{1}{2}}}{2(3-\nu)} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{Z_p}{\alpha_p^{\frac{1}{4}}} I_{kp} \left(Q_p - \frac{2\beta}{1+\nu} \frac{1}{\alpha_p} \right) + \\ + \frac{k\alpha_k^{\frac{1}{2}}}{2(3-\nu)} \left[\frac{4\beta}{1+\nu} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{Z_p}{\alpha_p^{\frac{5}{4}}} \cos \alpha_p a + 4f \right] I_k \quad (4.8)$$

$$Y_k = 0, \quad t_1 = 0, \quad t_2 = \pm \sigma_0 f \quad (4.9)$$

$$\sqrt{z_k} X_k \left(\operatorname{cth} \alpha_k b + \frac{z_k b}{\operatorname{sh}^2 \alpha_k b} \right) + \frac{Z_k}{\alpha_k^{1/4}} \left(\frac{1-\nu}{1+\nu} \frac{1}{\operatorname{sh} \alpha_k b} - \frac{z_k b \operatorname{cth} \alpha_k b}{\operatorname{sh} \alpha_k b} \right) = 0$$

где

$$Q_p = \frac{(3-\nu)(z_p b - \exp(-z_p b) \operatorname{ch} z_p b) - (1+\nu) z_p^2 b^2 - \frac{(1-\nu)^2}{1+\nu}}{\operatorname{ch} z_p b \operatorname{sh} z_p b + z_p b} \quad (4.10)$$

Постоянная f определяется из условия равновесия некоторой бесконечной части полосы

$$\sigma_0 b = \int_0^b \sigma_{xx} dy \quad (4.11)$$

где путь интегрирования проходит по некоторому сечению $x = d$, не проходящему через включение.

5. Рассмотрим более подробно задачу, решение которой приведено в п. 4д.

В этом случае, как и во всех рассмотренных выше случаях, бесконечной системе можно придать более удобный для вычислений вид.

Введем обозначение

$$Z_k = 4f(1 + C_0) \alpha_k^{1/4} \gamma_k$$

где

$$C_0 = \frac{\frac{4\beta}{1+\nu} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\gamma_p}{\alpha_p} \cos \alpha_p a}{1 - \frac{4\beta}{1+\nu} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\gamma_p}{\alpha_p} \cos \alpha_p a} \quad (5.1)$$

Система (4.8) примет вид

$$\gamma_k = \frac{k}{2(3-\nu)} \sum_{p=1}^{\infty} \gamma_p I_{kp} \left(Q_p - \frac{2\beta}{(1+\nu)\alpha_p} \right) + \frac{z_k (\cos z)}{2(3-\nu)} \quad (5.2)$$

Решая эту систему, можно определить неизвестные заранее постоянные C_0 и f .

Из (4.11) для постоянной f получаем

$$f = \left[\frac{8(1+C_0)}{\pi} \frac{l}{b} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \gamma_k}{k} \left(\frac{z_k b \operatorname{cth} z_k b - \frac{1-\nu}{1+\nu}}{\operatorname{ch} z_k b + \frac{z_k b}{\operatorname{sh} z_k b}} - \frac{\nu}{1+\nu} \right) \right]^{-1}$$

Были проведены вычисления при следующих значениях параметров:

$$\frac{l}{b} = 3, \quad \beta = \frac{15}{16} b; \quad \nu = 0.25$$

$$\frac{a}{l} = 0.25, \quad 0.50, \quad 0.75$$

Вычисления показывают, что при этих значениях параметров система (5.2) вполне регулярна.

Вычисленные значения натяжения включения $\left(\frac{2T}{2bz_0}\right)$ и коэффициента особенности напряжений σ_{yy} в окрестности конца включения $\left(\frac{A}{z_0}\right)$ приведены в табл. 1.

Таблица 1

$\frac{a}{l}$	$\frac{x}{a}$	$\frac{T}{bz_0}$	σ_{yy}/σ_0	$\frac{A}{z_0}$	ν_{y_0}
0.25	0	0.254	5.9	-0.419	0.24
	0.25	0.241	1.2		
	0.50	0.215	3.2		
	0.75	0.172	2.3		
0.50	0	0.392	1.0	-0.553	0.72
	0.25	0.385	1.8		
	0.50	0.353	3.1		
	0.75	0.268	2.2		
0.75	0	0.439	8.2	-0.453	9.0
	0.25	0.437	6.2		
	0.50	0.404	0.5		
	0.75	0.336	3.0		

Неизвестные коэффициенты определялись из укороченной системы (5.2) при $p = 16$ и $p = 20$. Разность результатов вычислений (δ) увеличивается при больших $\frac{a}{l}$.

Вычисления показывают, что коэффициент особенности напряжений уменьшается по модулю при $\frac{a}{l} \rightarrow 0$ или $\frac{a}{l} \rightarrow 1$.

Автор выражает благодарность К. С. Чобаяну за ценные советы в ходе решения задачи.

Ա. Ս. ԽԱՉԻԿՅԱՆ

ԱՌՈՂԳՈՎԱՆՈՒԹՅԱՆ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՀԱՐԹ ԽՆԴԻՐԸ ԲԱՐԱԿՈՊՈՍ
ՆԵՐԳՐԱԿՈՎ ՈՒՂՂԱՆԿՅԱՆ ՀԱՄԱՐ

Ա մ փ ո փ ո լ մ

Դիտարկվում է առանգակաձևության տեսության հարթ խնդիրը սիմետրիկ արտաքին բևեռ աղգեցության տակ գտնվող բարակապատ ենթդրակով ուղ-
ղանկյան համար: Խնդիրը բերվում է գծային հանրահաշվական համասարում-
ների բվագի-լիովին սեկուլյար երեք անվերջ սիստեմների լուծման:

Բերված են նաև բարակապատ ենթդրակներով շերտի և անվերջ հարթու-
թյան համար մի քանի պարբերական խնդիրների լուծումները: Դիտարկված է
բվային օրինակ:

ON A PLANE PROBLEM OF THE THEORY OF ELASTICITY
FOR A RECTANGULAR REGION WITH THIN-WALLED
INCLUSION

A. S. KHACHIKIAN

S u m m a r y

A plane problem of the theory of elasticity for a rectangular region with thin-walled inclusion under the action of symmetrical external forces is considered.

The problem is reduced to the three quasi-regular infinite systems of linear algebraic equations.

Solutions of some periodical problems for a strip and infinite plane with thin-walled inclusion are also presented.

A numerical example is given.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Melan E. Ein Beitrag zur Theorie geschweißter Verbindungen. Ing.-Archiv, 1932. Bd. 3, Heft 2, s. 123.
2. Reissner E. Note on the problem of the distribution of stress in a thin stiffened elastic sheet. Proc. Nat. Acad. of Sci. U.S.A., 1940, Vol. 26, p. 300.
3. Kotter W. T. On the diffusion of load from a stiffener into a sheet. Quart. J. Mech. and Appl. Math., 1955, vol. 8, p. 164.
4. Толкачев В. М. Передача нагрузки от стрингера конечной длины в бесконечной и полубесконечной пластине. Докл. АН СССР, т. 154, № 4, 1964.
5. Муки, Стернберги. Передача нагрузки от растягиваемого поперечного стержня в полубесконечной упругой пластине. Прикл. механ., Тр. ASME, № 4, 1968.
6. Арутюнян Н. Х. Контактная задача для полуплоскости с упругим креплением. ПММ, т. 32, в. 4, 1968.
7. Арутюнян Н. Х., Мхитарян С. М. Периодическая контактная задача для полуплоскости с упругими накладками. ПММ, т. 33, в. 5, 1969.

8. Хачикян А. С. Равновесие плоскости с тонкостенным упругим включением конечной длины. Изв. АН АрмССР, Механика, т. XXIII, № 3, 1970.
9. Чобанян К. С., Хачикян А. С. Плоское деформированное состояние упругого тела с тонкостенным гибким включением. Изв. АН АрмССР, Механика, т. XX, № 6, 1967.
10. Библоян А. А. Решение некоторых парных уравнений, встречающихся в задачах теории упругости. ПММ. т. 31, в. 4, 1967.
11. Библоян А. А., Гулакян Н. О. Об одной смешанной задаче для прямоугольника. Изв. АН АрмССР, Механика, т. XXII, № 1, 1969.
12. Уфлянд Я. С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. М.-Л., 1963.