

Р. К. АЛЕКСАНЫАН

ТЕРМОУПРУГИЕ НАПРЯЖЕНИЯ СОСТАВНОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ

Задачу теории упругости для кусочно-однородных тел рассматривали Н. И. Мусхелишвили, Д. И. Шерман, С. Г. Михлин, Г. Н. Савин и Н. П. Флейшман, М. И. Шереметьев, Д. В. Вайнберг и другие. Г. П. Черепанов [1] решил плоскую задачу неоднородной бесконечной пластинки с разрезами вдоль прямолинейной и круговой контактной линии. Позднее эта задача рассмотрена другими авторами. Вильямс исследовал особенности напряжений около края трещины в плоской задаче теории упругости составных тел [2—3]. В работе Д. Боджи [4] рассмотрена первая основная задача теории упругости для плоской деформации и плоского напряженного состояния двух прямоугольных упругих клинов с различными упругими постоянными, соединенных по граням. Полученная граничная задача для функции напряжений решена с помощью преобразования Меллина.

В настоящей работе рассматривается задача термоупругости для плоской деформации полуплоскости, составленной из двух четверть-плоскостей с различными теплофизическими и упругими характеристиками материалов. Четверть-плоскости соединены между собой вдоль общей границы при некоторой температуре. Полуплоскость подвергается стационарному температурному воздействию.

1. Составную полуплоскость отнесем к полярной системе координат (фиг. 1). Плоская задача термоупругости приводится к интегрированию уравнений равновесия [5]

$$r \frac{\partial \sigma_r^{(i)}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{r\varphi}^{(i)}}{\partial \varphi} + \sigma_r^{(i)} - \sigma_{\varphi}^{(i)} = 0 \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial \sigma_{\varphi}^{(i)}}{\partial z} + r \frac{\partial \sigma_{r\varphi}^{(i)}}{\partial r} + 2\sigma_{r\varphi}^{(i)} = 0 \quad (i = 1, 2)$$

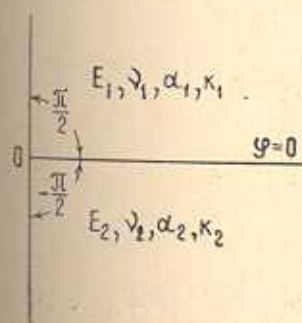
и условий совместности деформаций

$$\Delta (\sigma_r^{(i)} + \sigma_{\varphi}^{(i)}) = 0 \quad (i = 1, 2) \quad (1.2)$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} \sigma_{\varphi}^{(1)} \Big|_{\varphi = \frac{\pi}{2}} &= 0, & \sigma_{r\varphi}^{(1)} \Big|_{\varphi = \frac{\pi}{2}} &= 0 \\ \sigma_{\varphi}^{(2)} \Big|_{\varphi = -\frac{\pi}{2}} &= 0, & \sigma_{r\varphi}^{(2)} \Big|_{\varphi = -\frac{\pi}{2}} &= 0 \end{aligned} \quad (1.3)$$

и условий непрерывности напряжений и перемещений на линии контакта $\varphi = 0$



Фиг. 1.

$$\begin{aligned}
\sigma_{\varphi}^{(1)}|_{\varphi=0} &= \sigma_{\varphi}^{(2)}|_{\varphi=0}, & \sigma_{r\varphi}^{(1)}|_{\varphi=0} &= \sigma_{r\varphi}^{(2)}|_{\varphi=0} \\
m_1 \sigma_r^{(1)} - (1 - m_1) \sigma_{\varphi}^{(1)}|_{\varphi=0} &= \mu [m_2 \sigma_r^{(2)} - (1 - m_2) \sigma_{\varphi}^{(2)}] + MT_{\varphi}^{(1)}|_{\varphi=0} \\
2r \frac{\partial \sigma_{r\varphi}^{(1)}}{\partial r} + 2\sigma_{r\varphi}^{(1)} - m_1 \frac{\partial \sigma_r^{(1)}}{\partial \varphi} + (1 - m_1) \frac{\partial \sigma_{\varphi}^{(1)}}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=0} &= \mu \left[2r \frac{\partial \sigma_{r\varphi}^{(2)}}{\partial r} + \right. \\
&\quad \left. + 2\sigma_{r\varphi}^{(2)} - m_2 \frac{\partial \sigma_r^{(2)}}{\partial \varphi} + (1 - m_2) \frac{\partial \sigma_{\varphi}^{(2)}}{\partial \varphi} \right] + N \frac{\partial T_2}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=0} \quad (1.4)
\end{aligned}$$

где условия непрерывности перемещений u_i, v_i ($i=1, 2$) на линии контакта $\varphi=0$ заменены [6, 7] условиями непрерывности $\frac{\partial u_i}{\partial r}$ и $\frac{\partial^2 v_i}{\partial r^2}$ ($i=1, 2$) соответственно.

Здесь введены следующие обозначения:

$$m_i = 1 - \nu_i \quad (i=1, 2), \quad \mu = \frac{G_1}{G_2}, \quad \nu_i = \frac{k_1}{k_2} \quad (1.5)$$

$$M = 2G_1 [\alpha_2(1 + \nu_2) - \alpha_1(1 + \nu_1)], \quad N = 2G_1 [\alpha_1 \nu_1(1 + \nu_1) - \alpha_2(1 + \nu_2)]$$

где ν_i, G_i, k_i ($i=1, 2$) — коэффициенты Пуассона, модули сдвига и коэффициенты теплопроводности материалов в областях I и II.

Предполагается, что напряжения $\sigma_{\varphi}^{(i)}, \sigma_{r\varphi}^{(i)}, \sigma_r^{(i)}$ ($i=1, 2$) при $r \rightarrow \infty$ имеют порядок r^{-1} , а при $r \rightarrow 0$ — r^{-1} ($0 < \varphi < 1$).

Применяя к уравнениям (1.1)–(1.4) преобразование Меллина, будем иметь

$$\begin{aligned}
-p \bar{\sigma}_r^{(i)} - \bar{\sigma}_{\varphi}^{(i)} + \frac{d \bar{\sigma}_{r\varphi}^{(i)}}{d\varphi} &= 0 \\
\frac{d \bar{\sigma}_{\varphi}^{(i)}}{d\varphi} + (1 - p) \bar{\sigma}_{r\varphi}^{(i)} &= 0 \quad (1.6)
\end{aligned}$$

$$\frac{d^2 \bar{\sigma}_r^{(i)}}{d\varphi^2} + \frac{d^2 \bar{\sigma}_{\varphi}^{(i)}}{d\varphi^2} + (p+1)^2 (\bar{\sigma}_r^{(i)} + \bar{\sigma}_{\varphi}^{(i)}) = 0$$

$$\bar{\sigma}_{\varphi}^{(1)} \Big|_{\varphi = \frac{\pi}{2}} = 0, \quad \bar{\sigma}_{r\varphi}^{(1)} \Big|_{\varphi = \frac{\pi}{2}} = 0$$

$$\bar{\sigma}_{\varphi}^{(2)} \Big|_{\varphi = -\frac{\pi}{2}} = 0, \quad \bar{\sigma}_{r\varphi}^{(2)} \Big|_{\varphi = -\frac{\pi}{2}} = 0 \quad (1.7)$$

$$\bar{\sigma}_{\varphi}^{(1)} \Big|_{\varphi=0} = \bar{\sigma}_{\varphi}^{(2)} \Big|_{\varphi=0}, \quad \bar{\sigma}_{r\varphi}^{(1)} \Big|_{\varphi=0} = \bar{\sigma}_{r\varphi}^{(2)} \Big|_{\varphi=0}$$

$$m_1 \bar{\sigma}_r^{(1)} - (1 - m_1) \bar{\sigma}_{\varphi}^{(1)} \Big|_{\varphi=0} = \mu [m_2 \bar{\sigma}_r^{(2)} - (1 - m_2) \bar{\sigma}_{\varphi}^{(2)}] + M \bar{T}_{\varphi} \Big|_{\varphi=0}$$

$$2p \bar{\sigma}_{r\varphi}^{(1)} - m_1 \frac{d \bar{\sigma}_r^{(1)}}{d\varphi} + (1 - m_1) \frac{d \bar{\sigma}_{\varphi}^{(1)}}{d\varphi} \Big|_{\varphi=0} =$$

$$= \mu \left[2p \bar{\sigma}_{r\varphi}^{(2)} - m_2 \frac{d \bar{\sigma}_r^{(2)}}{d\varphi} + (1 - m_2) \frac{d \bar{\sigma}_{\varphi}^{(2)}}{d\varphi} \right] + N \frac{d \bar{T}_2}{d\varphi} \Big|_{\varphi=0}$$

где введено обозначение

$$\bar{f}(\varphi, p) = \int_0^{\infty} f(\varphi, r) r^p dr \quad (1.8)$$

Сходимость интегралов типа (1.8) обеспечивается, если параметр p меняется в полосе

$$-1 + \varepsilon < \operatorname{Re} p < 0 \quad (A)$$

Общее решение уравнений (1.6) имеет вид [8]

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{\varphi}^{(i)} &= A_i \cos(p+1)\varphi + B_i \cos(p-1)\varphi + C_i \sin(p+1)\varphi + D_i \sin(p-1)\varphi \\ \bar{\sigma}_r^{(i)} &= \frac{1}{p} \left[\frac{1}{p-1} \frac{d^2 \bar{\sigma}_{\varphi}^{(i)}}{d\varphi^2} - \bar{\sigma}_{\varphi}^{(i)} \right], \quad \bar{\sigma}_{r\varphi}^{(i)} = \frac{1}{p-1} \frac{d \bar{\sigma}_{\varphi}^{(i)}}{d\varphi} \end{aligned} \quad (1.9)$$

Для решения плоской задачи термоупругости составных тел при стационарном тепловом воздействии, как это видно из уравнений (1.1)–(1.4), достаточно иметь только распределение температуры и ее нормальной производной на контактной поверхности.

Входящие в (1.7) $\bar{T}_1|_{\varphi=0}$ и $\frac{d\bar{T}_2}{d\varphi}|_{\varphi=0}$ определяются решениями соответствующих задач теплопроводности для составной полуплоскости.

Решение стационарной задачи теплопроводности для составной полуплоскости с температурными граничными и контактными условиями

$$\begin{aligned} T_1\left(r, \frac{\pi}{2}\right) &= \begin{cases} T_0 & r < 1 \\ 0 & r > 1 \end{cases} \\ T_2\left(r, -\frac{\pi}{2}\right) &= \begin{cases} T_0 & r < 1 \\ 0 & r > 1 \end{cases} \end{aligned}$$

$$T_1(r, 0) = T_2(r, 0), \quad k_1 \frac{\partial T_1}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=0} = k_2 \frac{\partial T_2}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=0}$$

легко можно получить с помощью преобразования Меллина

$$\bar{T}_1 = -\frac{T_0 \cos(p+1)\varphi}{(p+1) \sin \frac{p\pi}{2}}, \quad \bar{T}_2 = -\frac{T_0 \cos(p+1)\varphi}{(p+1) \sin \frac{p\pi}{2}}$$

На линии контакта имеем

$$\bar{T} = \bar{T}_1 \Big|_{\varphi=0} = \bar{T}_2 \Big|_{\varphi=0} = -\frac{T_0}{(p+1) \sin \frac{p\pi}{2}}, \quad \frac{d\bar{T}_1}{d\varphi} \Big|_{\varphi=0} = \frac{d\bar{T}_2}{d\varphi} \Big|_{\varphi=0} = 0 \quad (1.10)$$

Удовлетворяя граничным и контактным условиям (1.7), с помощью (1.9) и (1.10) для неопределенных коэффициентов A_i, B_i, C_i, D_i ($i=1, 2$) получаем неоднородную систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned}
& -A_1 S + B_1 S + C_1 C - D_1 C = 0 \\
& -A_1 p^+ C + B_1 p^- C - C_1 p^+ S + D_1 p^- S = 0 \\
& -A_2 S + B_2 S - C_2 C + D_2 C = 0 \\
& A_2 p^+ C - B_2 p^- C - C_2 p^+ S + D_2 p^- S = 0 \\
& A_1 + B_1 - A_2 - B_2 = 0 \\
& C_1 p^+ + D_1 p^- - C_2 p^+ - D_2 p^- = 0
\end{aligned} \tag{1.11}$$

$$-A_1(4m_1 + p^-) - B_1 p^- + A_2 \mu(4m_2 + p^-) + B_2 \mu p^- = -\frac{MT_0 p^-}{p^+ S}$$

$$C_1(4m_1 - p^+) - D_1 p^- - C_2 \mu(4m_2 - p^+) + D_2 \mu p^- = 0$$

где приняты обозначения

$$p^+ = p + 1, \quad p^- = p - 1, \quad \sin \frac{p\pi}{2} = S, \quad \cos \frac{p\pi}{2} = C$$

Для A_i, B_i, C_i, D_i ($i = 1, 2$) из (1.11) получим

$$\begin{aligned}
A_i &= -\frac{MT_0}{2p^+ S} \frac{p^- a_i}{\Delta}, & B_i &= -\frac{MT_0}{2p^+ S} \frac{b_i}{\Delta} \\
C_i &= -\frac{MT_0}{4p^+ S} \frac{p^- \sin p\pi c_i}{\Delta}, & D_i &= -\frac{MT_0}{4p^+ S} \frac{\sin p\pi d_i}{\Delta}
\end{aligned} \tag{1.12}$$

где

$$\begin{aligned}
a_1 &= (\mu - 1)(p + S^2)(p^2 - S^2) - 2n(p^2 - S^2) - \mu m_2 \sin^2 p\pi \\
b_2 &= p^+(\mu - 1)(p - S^2)(p^2 - S^2) - 2n(p + \cos p\pi)(p^2 - S^2) + p^- \mu m_2 \sin^2 p\pi \\
c_1 &= -(\mu - 1)(p^2 - S^2) + 4\mu m_1(p - S^2) \\
d_1 &= p^+(\mu - 1)(p^2 - S^2) - 4\mu m_2 p C^2 + 4m_1(p^2 - S^2) \\
a_2 &= (\mu - 1)(p + S^2)(p^2 - S^2) - 2n(p^2 - S^2) + m_1 \sin^2 p\pi \\
b_2 &= p^+(\mu - 1)(p - S^2)(p^2 - S^2) - \\
& - 2n(p + \cos p\pi)(p^2 - S^2) - p^- m_1 \sin^2 p\pi \\
c_2 &= (\mu - 1)(p^2 - S^2) + 4m_1(p - S^2) \\
d_2 &= -p^+(\mu - 1)(p^2 - S^2) + 4\mu m_2(p^2 - S^2) - 4m_1 p C^2 \\
\Delta &= 4\mu m_1 m_2 \sin^2 p\pi - (p^2 - S^2)[4n^2 - (\mu - 1)(p^2 - S^2) - 4S^2(\mu - 1)n]
\end{aligned} \tag{1.13}$$

(1.14)

Здесь

$$n = m_1 - \mu m_2$$

В случае, когда упругие свойства материалов в областях I и II одинаковы, то есть $\mu = 1$, $m_1 = m_2 = m$, а коэффициенты линейных тепловых расширений различны $\alpha_1 \neq \alpha_2$, выражения (1.5), (1.13) и (1.14) упрощаются

$$\begin{aligned} a_1 &= -a_2 = -m \sin^2 p\pi, & b_1 &= -b_2 = p^{-1} m \sin^2 p\pi \\ c_1 &= c_2 = 4m(p - S^2), & d_1 &= d_2 = -4m(pC^2 - p^2 + S^2) \\ \Delta' &= 4m^2 \sin^2 p\pi, & M' &= 2G(1 + \nu)(\alpha_2 - \alpha_1) \end{aligned} \quad (1.15)$$

Подставляя (1.12) в (1.9), для преобразованных напряжений получим следующие выражения:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{r\varphi}^{(i)} &= \frac{MT_0}{4p^+ S\Delta} [2a_i p^+ \sin p^+ \varphi + 2b_i \sin p^- \varphi - \\ &\quad - (c_i p^+ \cos p^+ \varphi + d_i \cos p^- \varphi) \sin p\pi] \\ \bar{\sigma}_{\varphi}^{(i)} &= -\frac{MT_0}{4p^+ S\Delta} [2a_i p^- \cos p^- \varphi + 2b_i \cos p^+ \varphi + \\ &\quad + \sin p\pi (c_i p^- \sin p^+ \varphi + d_i \sin p^- \varphi)] \\ \bar{\sigma}_r^{(i)} &= \frac{MT_0}{4p^+ S\Delta} [2a_i (p + 3) \cos p^+ \varphi + 2b_i \cos p^- \varphi + \\ &\quad + c_i (p + 3) \sin p\pi \sin p^- \varphi + d_i \sin p\pi \sin p^+ \varphi] \quad (i = 1, 2) \end{aligned} \quad (1.16)$$

Напряжения в областях I и II получаются с помощью формул обращения Меллина [8]

$$\sigma^{(i)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{(L)} \bar{\sigma}^{(i)} r^{-p-1} dp \quad (i = 1, 2) \quad (1.17)$$

где за путь интегрирования (L) можно принять прямую, параллельную мнимой оси комплексной переменной p и находящуюся внутри полюсы (A) правее первого полюса подынтегральной функции.

2. Рассмотрим поведение напряжений на линии контакта при $r \rightarrow 0$. Из (1.16) и (1.17) получим

$$\begin{aligned} \sigma_{r\varphi} &= \sigma_{r\varphi}^{(i)} \Big|_{r=0} = \sigma_{r\varphi}^{(2)} \Big|_{r=0} = -\frac{MT_0}{8\pi i} \int_{(L)} \frac{f_1(p) r^{-p-1}}{p^+ S\Delta} dp \\ \sigma_{\varphi} &= \sigma_{\varphi}^{(1)} \Big|_{r=0} = \sigma_{\varphi}^{(2)} \Big|_{r=0} = -\frac{MT_0}{4\pi i} \int_{(L)} \frac{f_2(p) r^{-p-1}}{p^- S\Delta} dp \\ \sigma_r &= \sigma_r^{(i)} \Big|_{r=0} = \frac{MT_0}{4\pi i} \int_{(L)} \frac{g_i(p) r^{-p-1}}{p^+ S\Delta} dp \quad (i = 1, 2) \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$f_1(p) = (c_1 p^+ + d_1) \sin p\pi, \quad f_2(p) = a_1 p^- + b_1$$

$$g_i(p) = a_i(p+3) + b_i \quad (i=1, 2)$$

Как видно из формул (1.13) и (1.14), подынтегральные функции в (2.1) являются мероморфными функциями от p ; полюсам этих функций, определяющимся корнями трансцендентного уравнения $\Delta=0$, расположенными в полосе (A) и имеющими наибольшую действительную часть при различных конкретных комбинациях значений упругих констант, соответствуют различные порядки особенности напряжений. Значения корней с наибольшей действительной частью для некоторых комбинаций значений μ , ν_1 , ν_2 приведены в табл. 1.

Для вычисления интегралов (2.1) при $r < 1$ контур интегрирования (L) дополним дугой окружности $p = Re^{i\varphi}$, $\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{3\pi}{2}$ и применим теорему о вычетах

$$\int_{(L)} \frac{f(p) r^{-p-1}}{p^+ S \Delta} dp = 2\pi i \sum_{(p_k)} \operatorname{res} \left[\frac{f(p) r^{-p-1}}{p^+ S \Delta} \right] - \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} \frac{f(p) r^{-p-1}}{p^+ S \Delta} dp \quad (2.2)$$

Интеграл по дуге C_R при $R \rightarrow \infty$ стремится к нулю в силу леммы Жордана [9].

Из (2.1) и (2.2) для напряжений получим выражения

$$\sigma_{rz} = -\frac{MT_0}{4} \sum_{(p_k)} \operatorname{res} \left[\frac{f_1(p) r^{-p-1}}{p^+ S \Delta} \right]$$

$$\sigma_{\varphi} = -\frac{MT_0}{2} \sum_{(p_k)} \operatorname{res} \left[\frac{f_2(p) r^{-p-1}}{p^+ S \Delta} \right] \quad (2.3)$$

$$\sigma_r^{(i)} \Big|_{\varphi=0} = \frac{MT_0}{2} \sum_{(p_k)} \operatorname{res} \left[\frac{g_i(p) r^{-p-1}}{p^+ S \Delta} \right] \quad (i=1, 2) \quad 0 < r < 1$$

где p_k — полюсы подынтегральных функций в (2.1), имеющие отрицательные действительные части. Очевидно, что ряды в (2.3) сходятся.

Рассмотрим частный случай $\mu = 1$, $\nu_1 = \nu_2$. Из (1.15) и (1.17) для напряжений на линии контакта $\varphi = 0$ получим

$$\sigma_{\varphi}^{(i)} \Big|_{\varphi=0} = 0, \quad \sigma_{rz}^{(i)} = -\frac{M'T_0}{8\pi im} \int_{(L)} \frac{2p^+ - 1 + \cos p\pi}{p^+ S \sin p\pi} r^{-p-1} dp \quad (2.4)$$

$$\sigma_r^{(i)} \Big|_{\varphi=0} = -\sigma_r^{(2)} \Big|_{\varphi=0} = -\frac{M'}{4\pi im} \int_{(L)} \frac{r^{-p-1}}{p^+ \sin \frac{p\pi}{2}} dp$$

В этом случае подынтегральные функции не имеют полюсов в полосе $-1 < \operatorname{Re} p < 0$, поэтому за путь интегрирования (L) можно взять в той же полосе любую прямую, параллельную мнимой оси.

Вычислим напряжения (2.4) при $0 < r < 1$. С помощью теоремы о вычетах для интегралов в (2.4) получим

$$I_1(r) = \int_{(L)} \psi_1(r, p) dp = 2\pi i \left[\sum_{(p_k^{(1)})} \operatorname{res} \psi_1(r, p) + \sum_{(p_k^{(2)})} \operatorname{res} \psi_1(r, p) \right]$$

$$I_2(r) = \int_{(L)} \psi_2(r, p) dp = 2\pi i \sum_{(p_k)} \operatorname{res} \psi_2(r, p), \quad 0 < r < 1 \quad (2.5)$$

где

$$\psi_1(r, p) = \frac{2p^2 - 1 + \cos p\pi}{(p+1) \sin p\pi \sin \frac{p\pi}{2}} r^{-p-1}, \quad \psi_2(r, p) = \frac{r^{-p-1}}{(p+1) \sin \frac{p\pi}{2}}$$

а $p_k^{(1)} = -(2k-1)$, $p_k^{(2)} = -2k$ ($k=1, 2, \dots$) — полюсы функции $\psi_1(r, p)$ первого и второго порядка соответственно, $p_0 = -1$, $p_k = -2k$ ($k=1, 2, \dots$) — полюсы второго порядка функции $\psi_2(r, p)$.

После некоторых вычислений из (2.5) и (2.4) получим

$$\sigma_{rr}^{(1)} = -\frac{M'T_0}{\pi m} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k k r^{2k-2} + \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k k r^{2k-1}}{(2k-1)^2} [(2k-1)(1+k \ln r) - k] \right\} \quad (2.6)$$

$$\sigma_r^{(1)} \Big|_{z=0} = -\sigma_r^{(2)} \Big|_{z=0} = \frac{M'T_0}{\pi m} \left[1 - \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k r^{2k-1}}{2k-1} \right] \quad 0 < r < 1$$

Суммируя ряды в (2.6), имеем

$$\sigma_{rr}^{(1)} \Big|_{z=0} = \frac{M'T_0}{\pi m} \left\{ \frac{1}{(1+r^2)^2} + \frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{1+r^2} - \frac{r(1-r^2) \ln r}{(1+r^2)^2} + \ln r \operatorname{arctg} r + \int_0^r \frac{\operatorname{arctg} r_1}{r_1} dr_1 \right] \right\} \quad (2.7)$$

$$\sigma_r^{(1)} \Big|_{z=0} = -\sigma_r^{(2)} \Big|_{z=0} = \frac{M'T_0}{2m} \left(1 - \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} r \right), \quad 0 < r < 1$$

Аналогичные выражения получаются и при $r > 1$, но, если поведение напряжений в окрестности точки $r=0$ выяснено, удобно интеграл $I_1(r)$ привести к вещественной форме. Переноса путь интегри-

рования на мнимую ось ($p = i\lambda$), после некоторых преобразований получим

$$\sigma_{r\varphi} = -\frac{M' T_0}{2\pi mr} \int_0^{\infty} \frac{\left(\operatorname{sh}^2 \frac{\lambda\pi}{2} - \lambda^2\right) [\cos(\lambda \ln r) - \lambda \sin(\lambda \ln r)]}{(1 + \lambda^2) \operatorname{sh} \lambda\pi \operatorname{sh} \frac{\lambda\pi}{2}} d\lambda \quad 0 < r < \infty$$

В табл. 1 приведены значения корней уравнения $\Delta = 0$ с наибольшей действительной частью для некоторых комбинаций значений μ , ν_1 , ν_2 .

Таблица 1

μ	0.0625	0.25	1	1.0625	1.25	2	17
$p_1 = \gamma_1 + i\delta_1$							
	$\nu_1 = 0.2$			$\nu_2 = 0.4$			
p_1	-0.832	-0.934	-1.014	-1.015	-1.005	-0.957	-0.764
	$\nu_1 = 0.24$			$\nu_2 = 0.36$			
p_1	-0.806	-0.912	-1.006	-1.005	-0.978	-0.957	-0.781
	$\nu_1 = 0.32$			$\nu_2 = 0.36$			
p_1	-0.762	-0.882	-1.001	-1.001	-0.998	-0.968	-0.816
	$\nu_1 = 0.34$			$\nu_2 = 0.26$			
p_1	-0.752	-0.882	-1.003	-1.003	-1.001	-0.974	-0.825
	$\nu_1 = 0.28$			$\nu_2 = 0.32$			
p_1	-0.782	-0.900	-1.001	-1	-0.995	-0.960	-0.797
	$\nu_1 = \nu_2 = 0.3$						
p_1	-0.772	-0.893	-1	-0.996	-0.996	-0.962	-0.804

Как видно из формул (2.3) и табл. 1, в рассмотренных случаях напряжения при $r = 0$ имеют особенность порядка $-\gamma_1 - 1$ и являются монотонными функциями, стремящимися к бесконечности при $r \rightarrow 0$. Из общих формул обращения (1.17) следует, что этот вывод верен при любом значении φ в интервале $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

В частном случае $\mu = 1$, $\nu_1 = \nu_2$, напряжения (2.4) или (2.7) не имеют особенностей при $r = 0$, что совпадает с результатом, полученным в [10]: особенности напряжений в задаче термоупругости составного тела существуют, если они существуют в соответствующей первой основной задаче теории упругости.

Автор выражает благодарность К. С. Чобаняну за критические замечания.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 14 XII 1970

Թ. Կ. ԱԵՔՍՆԻԱՆ

ԹԵՐՄՈԵԼԱՍՏԻԿԱՆ ԿՐԻՍՏՈՒԹՅԱՆ ԶԵՐՄԱՌԱԶԳԱԿԱՆ ԼԱՐՈՒՄՆԵՐԸ

Ա մ ֆ ո ֆ ո ս լ մ

Գրառիցված է տարրեր չեղմային և առաձգական հատկություններ ունեցող քառորդ հարթություններից կազմված, արտաքին ուժերի և կապերի շեղման կիսահարթության հարթ ղեկորմացիայի խնդիրը ժամանակի ընթացքում անփոփոխ չեղմային դաշտի ազդեցության տակ:

Խնդիրը լուծված է Մելինի ձևափոխության օգնությամբ: Հետազոտված է լարումների վարքը նյութերի միացման զծի և ազատ եզրերի համան կետի շրջակայքում: Լարումների համար ստացված է $-\gamma_1 - 1$ կարգի եղանկություն, $\gamma_1 = \operatorname{Re} p_1$, $p_1 - \Delta = 0$ տրանսցենդենտ հավասարման $-1 + z < \operatorname{Re} p < 0$ շերտում գտնվող և ամենամեծ իրական մաս ունեցող արմատն է: Առաձգական հատկությունների որոշ արժեքների դեպքում բերված են p_1 -ի արժեքները:

THE THERMOELASTICITY PROBLEM FOR A COMPOSITE HALF-PLANE

R. K. ALEXANIAN

S u m m a r y

The problem of plane deformation for a composite half-plane, free from any effect of external forces and restrictions, under the action of a static thermal field is considered. The half-plane is composed of two quadrants, which have different elastic and thermal properties.

The problem is solved with the aid of Mellin's transformation. The behaviour of the stresses near the point of intersection of the contact line of quadrants with the free border of the half-plane is investigated. The singularity of the order $-\gamma_1 - 1$ for the stresses is obtained where $\gamma_1 = \operatorname{Re} p_1$, p_1 is the root of the equation $\Delta = 0$ which has a maximum real part in the strip $-1 + z < \operatorname{Re} p < 0$. For some magnitudes of the elastic constants the values of p_1 are given.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Черепанов Г. П. О напряженном состоянии в неоднородной пластинке с разрывом. Изв. АН СССР, ОН, механика и машиностроение, № 1, 1962.
2. Williams M. L. The stresses around a fault or a crack in dissimilar media. Bulletin of the seismological society of America, vol. 49, 1959.
3. Zak A., Williams M. Crack point stress singularities at a bi-material interface. J. of Appl. Mech., vol. 30, № 1, 1963.
4. Боджи Д. Действие касательных и нормальных нагрузок на прямоугольные клинья, выполненные из разных материалов и соединенные по границе. Прикл. мех., тр. ASME, т. 35, серия E, № 3, 1968.
5. Боли Б., Уэйкер Дж. Теория температурных напряжений. Изд. Мир, М., 1964.
6. Чобанян К. С. О функции напряжений для плоской задачи теории упругости составных тел. Докл. АН Арм.ССР, т. XXXII, № 2, 1961.
7. Ду Цин-хуа. Плоская задача теории упругости неоднородной изотропной среды. Проблемы механики сплошной среды. К семидесятилетию академика Н. И. Мехлишвили, Изд. АН СССР, М., 1961.
8. Уфлянд Я. С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Изд. АН СССР, М.-Л., 1963.
9. Лаврентьева М. А. и Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. Гостехтеориздат, М.-Л., 1951.
10. Чобанян К. С., Алексанян Р. К. Термоупругие напряжения в окрестности поверхности соединения составного тела. Изв. АН Арм.ССР, Механика, т. XXIV, № 3, 1971.