ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXIV, № 4, 1971 Механика

В. Х. СИРУНЯН

ДВЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ТРЕЩИН В ОБЛАСТЯХ С КРУГОВЫМИ ГРАНИЦАМИ

Рассматриваются следующие задачи теории трещин:

1) равномерное одностороннее растяжение бесконечной упругой плоскости, ослабленной круговым отверстием и имеющей две симметричные трещины, не выходящие на границу кругового отверстия;

2) широкое кольцо, имеющее внутри длинные симметричные трещины и находящееся под равномерным давлением.

Сначала определяем комплексные потенциалы Н. И. Мусхелишвили [1] для упругой бесконечной плоскости, имеющей на действительной оси симметричные трещины. Трещины рассматриваются как разрыв нормальных перемещений.

Далее находим напряжения от неизвестных разрывов перемещения на окружностях $R_1(R_2)$, внутри и вне которых находятся трещины. Решаем плоскую задачу теории упругости, прикладывая эти напряжения с обратным знаком и заданную внешнюю нагрузку на границах тех же областей, но не имеющих внутри трещин.

Складывая решения последней задачи с решением задачи для упругой бесконечной плоскости, имеющей трещины, определяем напряжения на гранях трещин. Требуя обращения в нуль этих напряжений, получаем интегральные уравнения задач. Полученные интегральные уравнения решаются методом больших λ [2].

Приведены формулы для определения предельной нагрузки. По аналогичной схеме в работе [3] была решена задача о растяжении кругового диска, внутри которого есть центральная трещина.

§ 1. Две симметричные трещины в плоскости с отверстием

1. Вывод интегрального уравнения. Пусть L — совокупность отрезков a_1b_1, a_2b_2 действительной оси ox. Будем различать верхнюю (обозначаемую индексом $+$) и нижнюю (обозначаемую знаком $-$) окрестности каждой точки t, расположенной на L.

Пусть на L заданы скачки смещения, то есть значения разностей

$$u^+ - u^- = 0, \quad v^+ - v^- = g(t)$$

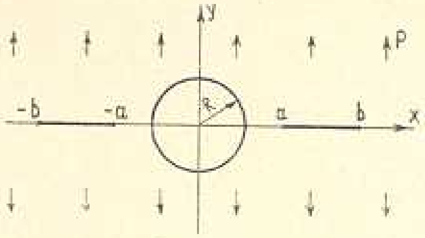
Комплексные потенциалы $\varphi_0(z)$ и $\psi_0(z)$, определяющие упругое равновесие, голоморфные во всей плоскости, разрезанной вдоль L, и равные нулю на бесконечности, определяются формулами [1]

$$\varphi_0(z) = \frac{G}{\pi(\varkappa+1)}\int\limits_L \frac{g(t)\,dt}{t-z}, \quad \psi_0(z) = \frac{G}{\pi(\varkappa+1)}\int\limits_L \frac{g(t)-tg'(t)}{t-z}\,dt \tag{1.1}$$

где G — модуль сдвига, $\varkappa = 3-4\nu$ в случае плоской деформации или $\varkappa = \frac{3-\nu}{1+\nu}$ в случае плоского напряженного состояния, ν — коэффициент Пуассона.

Дифференцируя выражения (1.1) по z, будем иметь:

$$\varphi_0'(z) = \frac{G}{\pi(\varkappa+1)}\int\limits_L \frac{g(t)}{(t-z)^2}\,dt, \qquad \psi_0'(z) = \frac{G}{\pi(\varkappa+1)}\int\limits_L \frac{g(t)-tg'(t)}{(t-z)^2}\,dt \tag{1.2}$$



Фиг. 1

Предположим, что функция, определяющая разрыв перемещений, удовлетворяет условию

$$g(a_k) = g(b_k) = 0, \quad k = 1,\ 2 \tag{1.3}$$

Интегрируя в соотношениях (1.2) по частям, с учетом условия (1.3), будем иметь:

$$\varphi_0'(z) = D\int\limits_L \frac{\mu(t)\,dt}{t-z}$$

$$\psi_0'(z) = -Dz\int\limits_L \frac{\mu(t)\,dt}{(t-z)^2} \tag{1.4}$$

Здесь введены обозначения:

$$D = \frac{G}{\pi(\varkappa+1)}, \quad g'(t) = \mu(t).$$

Компоненты напряженного состояния, вызванного указанным выше разрывом перемещений, в прямоугольных прямолинейных и полярных координатах определяются из соотношений [1]

$$\sigma_x^0 + \sigma_y^0 = \sigma_\theta^0 + \sigma_r^0 = 2\left[\varphi_0'(z) + \overline{\varphi_0'(z)}\right]$$

$$\sigma_y^0 - \sigma_x^0 + 2i\tau_{xy}^0 = (\sigma_\theta^0 - \sigma_r^0 + 2i\tau_{r\theta}^0)\,e^{-2i\theta} = 2\left[\bar z\,\varphi_0''(z) + \psi_0'(z)\right] \tag{1.5}$$

Подставляя в последние равенства выражения для функций $\varphi_0'(z)$ и $\psi_0'(z)$, из (1.4) получим:

$$\sigma_x^0 + \sigma_y^0 = \sigma_\theta^0 + \sigma_r^0 = 2D \int_L \left[\frac{1}{t-z} + \frac{1}{t-\bar{z}} \right] \mu(t)\, dt$$

$$\sigma_y^0 - \sigma_x^0 + 2i\tau_{xy}^0 = e^{-2i\theta}(\sigma_\theta^0 - \sigma_r^0 + 2i\tau_{r\theta}^0) = 2D(\bar{z} - z) \int_L \frac{\mu(t)\, dt}{(t-z)^2} \qquad (1.6)$$

Для комбинации нормального и касательного напряжений в полярной системе координат из формулы (1.6) получим:

$$\sigma_r^0 + i\tau_{r\theta}^0 = D\left[\int_L \left(\frac{1}{t-z} + \frac{1}{t-\bar{z}} \right) \mu(t)\, dt + (\bar{z} - z)e^{2i\theta} \int_L \frac{\mu(t)\, dt}{(t-z)^2} \right] \qquad (1.7)$$

На окружности радиуса R имеем $z = Re^{i\theta} = R\sigma$ и выражение (1.7) запишется в виде:

$$\sigma_r^0 + i\tau_{r\theta}^0 = D \int_L \left[\frac{1}{t-\sigma R} + \frac{\sigma}{t\sigma - R} + \frac{R(1-\sigma^2)}{\sigma(t\sigma - R)^2} \right] \mu(t)\, dt \qquad (1.8)$$

Рассмотрим теперь бесконечную пластинку с круговым отверстием, по контуру которой действуют напряжения, обратные по знаку напряжениям (1.8). При помощи $z = \omega(\zeta) = R\zeta$ бесконечная плоскость с круговым отверстием отображается на внешность единичного круга. Функции Мусхелишвили определяются формулами [1]:

$$\varphi_1(\zeta) = \frac{1}{2\pi i\zeta} \int_\gamma \frac{X_n + iY_n}{\sigma - \zeta}\, d\sigma + \frac{a_1}{\zeta}$$

$$\psi_1(\zeta) = -\frac{1}{2\pi i\zeta} \int_\gamma \frac{X_n + iY_n}{\sigma - \zeta}\, d\sigma + \frac{\varphi_1'(\zeta)}{\zeta^2} - \frac{\varphi_1'(\zeta)}{\zeta} + \frac{a_2}{\zeta} \qquad (1.9)$$

$$a_1 = -\frac{X - iY}{2\pi R(1+\varkappa)}, \qquad a_2 = \frac{\varkappa(X - iY)}{2\pi R(1+\varkappa)}$$

где γ — единичная окружность, X_n и Y_n — компоненты внешних усилий со стороны положительной нормали, (X, Y) — главный вектор внешних усилий. В нашем случае:

$$X_n \pm iY_n = \sigma(\sigma_r^0 \pm i\tau_{r\theta}^0)$$

$$X_n + iY_n = D \int_L \left[\frac{1}{t-\sigma R} + \frac{\sigma}{\sigma t - R} + \frac{R(1-\sigma^2)}{\sigma(t\sigma - R)^2} \right] \sigma\mu(t)\, dt$$

$$X_n - iY_n = D \int_L \left[\frac{1}{t-\sigma R} + \frac{\sigma}{t\sigma - R} - \frac{R\sigma(1-\sigma^2)}{(t-\sigma R)^2} \right] \frac{\mu(t)}{\sigma}\, dt \qquad (1.10)$$

$$X \pm iY = R \int_0^{2\pi} (X_n \pm iY_n)\, d\theta, \qquad d\theta = -i\frac{d\sigma}{\sigma}$$

Вычисление интегралов, входящих в формулы (1.9) с учетом (1.10) и соотношений

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\left[\frac{\sigma}{t-\sigma R}+\frac{\sigma^2}{t\sigma-R}+\frac{R(1-\sigma^2)}{(t\sigma-R)^2}\right]\frac{d\sigma}{\sigma-\zeta}=$$

$$=\frac{R(\zeta^2-1)}{(t\zeta-R)^2}-\frac{R}{t^2}+\frac{R^2}{t^2(t\zeta-R)}$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\left[\frac{1}{\sigma(t-\sigma R)}+\frac{1}{t\sigma-R}+\frac{R(1-\sigma^2)}{(t-\sigma R)^2}\right]\frac{d\sigma}{\sigma-\zeta}=$$

$$=-\frac{1}{t\zeta}-\frac{1}{t\zeta-R} \tag{1.11}$$

не представляет особого труда.

Соответственно для $X\pm iY$ получаем

$$X-iY=2RDi\int\limits_{L}\left[\frac{R}{t^2}\ln\left(\frac{R-t}{R+t}\right)^2+\frac{4}{t}\right]\mu(t)\,dt$$

$$X+iY=-4Di\int\limits_{L}\ln\left(\frac{t-R}{t+R}\right)\mu(t)\,dt \tag{1.12}$$

После подстановки (1.12), (1.11) и (1.10) в выражение (1.9) и перехода к старым переменным $z=R\zeta$ получим

$$\varphi_1'(z)=D\int\limits_{L}\left[\frac{R^2(z^2-R^2)}{z(tz-R^2)^2}-\frac{R^2}{t^2z}-\frac{R^4}{t^2z(tz-R^2)}+\right.$$

$$\left.+\frac{2i}{\pi z(1+\varkappa)}\ln\left(\frac{t-R}{t+R}\right)\right]\mu(t)\,dt \tag{1.13}$$

$$\psi_1'(z)=D\int\limits_{L}\left[\frac{R^2(2t^2z^2-R^2tz-R^4)}{t^2z^3(tz-R^2)}-\frac{2R^4}{t^2z^3}+\right.$$

$$+\frac{R^4(t^2z^2-R^2t^2-2R^2tz+R^4)}{t^2z^3(tz-R^2)^2}-\frac{R^4(3R^2tz-tz^3-R^4-R^2z^2)}{z^3(tz-R^2)^3}+$$

$$\left.+\frac{4R^3i}{\pi Rz^3(1+\varkappa)}\ln\left(\frac{t-R}{t+R}\right)+\frac{2\varkappa Ri}{\pi z(\varkappa+1)}\left(\frac{2}{t}+\frac{R^2}{t^2}\ln\left(\frac{t-R}{t+R}\right)\right)\right]\mu(t)\,dt$$

Суммируя (1.13) и (1.4), найдем комплексные потенциалы для пластинки с круговым отверстием со свободными от усилий границами и указанным выше разрывом перемещений на линии L

$$\varphi'(z)=\varphi_1'(z)+\varphi_0'(z),\quad \psi_1'(z)=\psi_1'(z)+\psi_0'(z)$$

Подставляя последние выражения в формулы (1.5), после некоторых преобразований будем иметь на действительной оси

$$\sigma_y^g(x,\ 0)=D\int\limits_L\left[\frac{2}{t-x}-\frac{R^2(x^2+2R^2)}{t^2x^3}+\frac{2R^2(x^2-R^2)}{x(tx-R^2)^2}-\right.$$

$$-\frac{2R^4}{t^2x(tx-R^2)}+\frac{R^4(2tx-R^2)}{t^2x(tx-R^2)^2}+\frac{R^2(2t^2x^2-R^2tx-R^4)}{t^2x^3(tx-R^2)}+$$

$$\left.+\frac{R^4(t^2x^2-R^2t^2-2R^2tx+R^4)}{t^2x^3(tx-R^2)^2}+\frac{R^2(x^2-R^2)(3R^2tx-tx^3-R^4-R^2x^2)}{x^3(tx-R^2)^3}\right]\mu(t)\,dt$$

(1.14)

Индекс g обозначает, что напряжение $\sigma_y^g(x)$ вызвано на оси ox разрывом перемещений, задаваемых функцией $g(t)$.

Пусть $\sigma_y^p(x)$ — напряжение на оси ox в пластинке с круговым отверстием, вызванное внешними силами, приложенными в бесконечности и симметричными относительно этой оси. Предполагая $\sigma_y^p(x)$ известным и приравнивая сумму $\sigma_y^g(x)+\sigma_y^p(x)$ для x на L к нулю, получим интегральное уравнение для определения функции $\mu(t)$

$$D\int\limits_L K(x,\ t)\,\mu(t)\,dt+\sigma_y^p(x,\ o)=0 \qquad (1.15)$$

$$a_k\leqslant x\leqslant b_k,\quad k=1,\ 2$$

Здесь введено обозначение

$$K(x,\ t)=\frac{2}{t-x}-R^2(x^2+2R^2)+\frac{2R^2(x^2-R^2)}{x(tx-R^2)^2}-\frac{2R^4}{t^2x(tx-R^2)}+$$

$$+\frac{R^2(2tx-R^2)}{t^2x(tx-R^2)^2}+\frac{R^4(t^2x^2-R^2t^2-2R^2tx+R^4)}{t^2x^3(tx-R^2)^2}+$$

$$+\frac{R^4(2tx-R^2)}{t^2x(tx-R^2)^2}+\frac{R^2(x^2-R^2)(3R^2tx-tx^3-R^2x^2-R^4)}{x^3(tx-R^2)^3}$$

Уравнение (1.15) представляет собой сингулярное интегральное уравнение первого рода с ядром Коши и регулярной частью. В нашем случае оно примет вид:

$$D\int\limits_{-a}^{-b}K(x,\ t)\,\mu(t)\,dt+D\int\limits_a^b K(x,\ t)\,\mu(t)\,dt=-\sigma_y^p(x)$$

Функция $\mu(t)$ удовлетворяет условию

$$\mu(-t)=-\mu(t) \qquad (1.16)$$

После замены переменной t на $-t$ в первом интеграле с учетом (1.16) будем иметь

$$D\int_{a}^{b} | K(x,\ t) - K(x,\ -t) |\, \mu(t)\, dt = -\sigma_y^0(x) \tag{1.17}$$

где

$$K(x,\ t) - K(x,\ -t) = 4 \Bigg| \frac{t}{t^2 - x^2} +$$

$$+ R^2 \left(\frac{2t^8x^6 - 4R^2t^5x^5 + 14R^4x^4t^4 + 18R^8t^2x^2}{tx^2(t^2x^2 - R^4)^3} + \right.$$

$$\left. + \frac{R^{10}(7t^2 - 10x^2) - 2R^{12} - R^6(t^2x^4 + 13t^4x^2 - 12t^3x^3)}{tx^2(t^2x^2 - R^4)^3} \right) \Bigg|$$

2. *Пример*. Рассмотрим растяжение бесконечной пластинки с круговым отверстием и двумя симметричными трещинами, не выходящими на границы круга, равномерно распределенными нагрузками, приложенными на бесконечности и перпендикулярными оси ox.

Тогда

$$\sigma_y^0(x,\ o) = \frac{P}{2}\left(2 + \frac{R^2}{x^2} + \frac{3R^4}{x^4}\right)$$

Произведем в (1.17) замену переменных и введем обозначения

$$\frac{x^2}{a^2} = \xi, \quad \frac{b^2}{a^2} = \eta, \quad \frac{a}{R} = \lambda, \quad \mu(t) = \mu(a\sqrt{\eta}) = \mu_0(\eta) \tag{1.18}$$

После этого (1.17) примет вид

$$\int_{1}^{b^2/a^2} \left[\frac{1}{\eta - \xi} + K_1(\xi,\ \eta)\right] \mu_0(\eta)\, d\eta = -\frac{P}{4D}\left(2 + \frac{1}{\lambda^2\xi} + \frac{3}{\lambda^4\xi^2}\right) \tag{1.19}$$

где

$$K_1(\xi,\ \eta) = \frac{\lambda^2(2\lambda^2\xi - 1)}{(\lambda^4\xi\eta - 1)^2} + \frac{\lambda^4\xi\eta - \lambda^2\xi - 1}{\lambda^2\xi\eta(\lambda^4\xi\eta - 1)} + \frac{1}{\xi(\lambda^4\xi\eta - 1)^2} +$$

$$+ \frac{(\lambda^2\xi - 1)(4\lambda^4\xi\eta + \lambda^6\xi^2\eta - \lambda^2\xi - 3)}{\xi(\lambda^4\xi\eta - 1)^3} \tag{1.19}$$

Обозначим

$$\psi(\xi) = -\frac{1}{\pi}\left[\frac{P}{4D}\left(2 + \frac{1}{\lambda^2\xi} + \frac{3}{\lambda^4\xi^2}\right) + \int_{1}^{d} K_1(\xi,\ \eta)\, \mu_0(\eta)\, d\eta\right]$$

где

$$\frac{b^2}{a^2} = d.$$

Уравнение (1.19) перепишется в форме

$$\int_{1}^{d} \frac{\mu_0(\eta)}{\eta - \xi}\, d\eta = \pi \psi(\xi)$$

которое имеет решение

$$\mu_0(\xi) = \frac{1}{\pi \sqrt{(d-\xi)(\xi-1)}} \left\{ C - \int_{1}^{d} \frac{\sqrt{(d-\eta)(\eta-1)}}{\eta - \xi} \psi(\eta)\, d\eta \right\} \qquad (1.20)$$

$$(C = \text{const})$$

Подставляя в (**1**.20) значение $\psi(\eta)$ и $K_1(\xi, \eta)$ из (1.19), окончательно получим:

$$\mu_0(\xi) = \frac{1}{\pi \sqrt{(d-\xi)(\xi-1)}} \left\{ C + \frac{P}{4\pi D} \int_{1}^{d} \frac{\sqrt{(d-\eta)(\eta-1)}}{\eta - \xi} \times \right.$$

$$\times \left(2 + \frac{1}{\lambda^2 \eta} + \frac{3}{\lambda^4 \eta^2} \right) d\eta + \frac{1}{\pi} \int_{1}^{d} \mu_0(\eta)\, d\eta \int_{1}^{d} \frac{\sqrt{(d-\eta)(\eta-1)}}{t - \xi} \times$$

$$\times \left[\frac{\lambda^2 (2x^2 t - 1)}{(\lambda^4 t\eta - 1)^2} + \frac{1}{t(\lambda^4 t\eta - 1)^2} + \frac{\lambda^4 t\eta - \lambda^2 t - 1}{\lambda^2 t\eta (\lambda^4 t\eta - 1)^2} + \right.$$

$$\left. \left. + \frac{(\lambda^2 t - 1)(4\lambda^4 t\eta + \lambda^8 t^2 \eta - \lambda^2 t - 3)}{t(\lambda^4 t\eta - 1)^4} \right] dt \right\} \qquad (1.21)$$

Изменим порядок интегрирования во втором интеграле и возьмем внутренний интеграл. Разлагая затем в ряд ядро по степеням λ^{-1} и ограничиваясь членами порядка λ^{-5}, получим:

$$\mu_0(\xi) = \frac{1}{\pi \sqrt{(d-\xi)(\xi-1)}} \left\{ C + \frac{P}{4D} \left[1 + d - 2\xi + \frac{1}{\lambda^2} \left(\frac{d}{\xi} - 1 \right) + \right. \right.$$

$$\left. + \frac{3}{2\lambda^4} \left(\frac{2\sqrt{d}}{\xi^2} + \frac{\sqrt{d}}{\xi} - \frac{1}{\xi \sqrt{d}} \right) \right] +$$

$$\left. + \int_{1}^{d} \mu_0(\eta) \left[(\sqrt{d} - \xi) \left(\frac{1}{\lambda^2 \xi \eta} - \frac{2}{\lambda^4 \xi \eta^2} \right) + O(\lambda^{-6}) \right] d\eta \right\} \qquad (1.22)$$

Решим (1.22) методом больших λ [2].

Разыскиваем решение уравнения (1.22) в форме

$$\mu_0(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{-2k} \mu^{2k}(\xi) \qquad (1.23)$$

Подставляя выражение (1.23) в уравнение (1.22) и приравнивая члены при одинаковых степенях λ^{-1}, с точностью до членов порядка λ^{-6} получим

$$\mu^0(\xi) = \left[C + \frac{P}{4D}(1 + d - 2\xi) \right] \pi^{-1} [(d-\xi)(\xi-1)]^{-1/2}$$

$$\mu^2(\xi) = \left[C\left(\frac{1}{\xi} - \frac{1}{\sqrt{d}}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{P}{4D}\left(\frac{\sqrt{d}}{\xi} - 1\right)\left(\sqrt{d} + \frac{1}{\sqrt{d}} - 1\right)\right] \pi^{-1} [(d-\xi)(\xi-1)]^{-1/2}$$

$$\mu^4(\xi) = \left\{ C\left(1 - \frac{\sqrt{d}}{\xi}\right)\left[1 + \left(2 - \frac{1}{\xi}\right)\left(\frac{1+d}{2d\sqrt{d}}\right)\right] + \right.$$

$$+ \frac{P}{4D}\left(1 - \frac{\sqrt{d}}{\xi}\right)\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{d}}{2} + \frac{1}{\sqrt{d}} + \right.$$

$$\left.\left. + \frac{1}{2d} + \frac{1}{2d\sqrt{d}}\right)\right\} \pi^{-1} [(d-\xi)(\xi-1)]^{-1/2}$$

Суммируя μ^0, $\lambda^{-2}\mu^2$, $\lambda^{-4}\mu^4$ и возвращаясь к старым переменным (1.18), для неизвестной функции $\mu(x)$ получим выражение:

$$\mu(x) = \frac{a^2}{\pi\sqrt{(b^2-x^2)(x^2-a^2)}} \left\{ C \left[1 - \frac{a}{b\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^4} - \frac{a(a^2+b^2)}{2b^3\lambda^4} \right.\right.$$

$$\left. + \frac{1}{x^2}\left(\frac{a^2}{\lambda^2} - \frac{ab}{\lambda^4} + \frac{a^2(a^2+b^2)}{2b^2\lambda^4} - \frac{a^3(a^2+b^2)}{2b^3\lambda^4}\right) - \frac{1}{x^4}\frac{a^4(a^2+b^2)}{2b^2\lambda^4} \right] +$$

$$+ \frac{P}{4D}\left[1 + \frac{b^2}{a^2} - \frac{1}{\lambda^2}\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} - 1\right) + \right.$$

$$+ \frac{1}{\lambda^4}\left(\frac{1}{2} + \frac{b}{2a} + \frac{a}{b} + \frac{a^2}{2b^2} + \frac{a^3}{2b^3}\right) + \frac{b\varkappa}{\lambda^2 x^2}\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} - 1\right) +$$

$$\left.\left. + \frac{ab}{\lambda^4 x^2}\left(\frac{1}{2} + \frac{b}{2a} + \frac{a}{b} + \frac{a^2}{2b^2} + \frac{a^3}{2b^3}\right) - \frac{2x^2}{a^2} \right] + O(\lambda^{-6}) \right\} \tag{1.24}$$

Интегрируя $\mu(x)$ в пределах от a до b и используя условия $g(a) = g(b) = 0$, получим:

$$C = -\frac{P}{4D}\left[\frac{F(q)\Phi_1 + E(q)\Phi_2}{F(q)\Phi_3 + E(q)\Phi_4}\right] \tag{1.25}$$

где $F(q)$ и $E(q)$ — полные эллиптические интегралы первого и второго рода,

$$q = \frac{\sqrt{b^2-a^2}}{b}, \quad b = 2l + a, \quad 2l \text{ — длина трещин.}$$

$$\Phi_1=\frac{1}{b}+\frac{b}{a^2}-\frac{1}{\lambda^2}\left(\frac{a}{b^2}+\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)+\frac{1}{\lambda^4}\left(\frac{1}{2b}+\frac{1}{2a}+\frac{a}{b^2}+\frac{a^2}{2b^3}+\frac{a^3}{2b^4}\right)$$

$$\Phi_2=\frac{1}{\lambda^2}\left(\frac{1}{b}+\frac{b}{a^2}-\frac{1}{a}\right)+\frac{1}{\lambda^4}\left(\frac{1}{2a}+\frac{b}{2a^2}+\frac{1}{b}+\frac{a}{2b^2}+\frac{a^2}{2b^3}\right)-\frac{2b}{a^2}$$

$$\Phi_3=\frac{1}{b}-\frac{a}{b^2\lambda^2}+\frac{1}{b\lambda^4}-\frac{a\,(a^2+b^2)}{2b^4\lambda^4}+\frac{a^2\,(a^2+b^2)}{6\lambda^4 b^5}$$

$$\Phi_4=\frac{1}{\lambda^2 b}-\frac{1}{\lambda^4 a}+\frac{a^2+b^2}{2\lambda^4 b^3}-\frac{a\,(a^2+b^2)}{2b^4\lambda^4}+\frac{(a^2+b^2)^2}{3b^5}$$

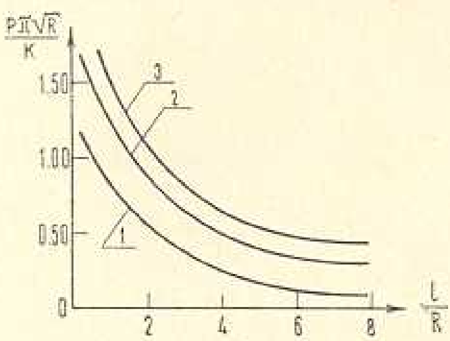
3. Определим коэффициенты интенсивности напряжений по формулам

$$N_a=\lim_{x\to a}2\pi D\sqrt{x-a}\,\mu(x);\quad N_b=-\lim_{x\to b}2\pi D\sqrt{b-x}\,\mu(x)$$

$$N=\frac{K}{\pi}\tag{1.26}$$

где k — модуль сцепления [4].

В частном случае при $R=0\ (\lambda\to\infty)$ получаем известные формулы этих зависимостей.



Фиг. 2.

На фиг. 2 изображена зависимость между критической силой и длиной трещины. Кривые 1 и 2 показывают эту зависимость в начале трещин при разных λ. При увеличении длины трещин быстро уменьшается критическая сила, при увеличении длины перемычки критическая сила увеличивается. Кривая 3 показывает ту же зависимость, но в точке b. Здесь критическая сила всегда больше, чем в точке a. При увеличении растягивающих сил вначале разрушаются перемычки между отверстием и началом трещин, а потом пластинка работает почти так же, как и пластинка, имеющая центральную трещину.

Для первой кривой $\frac{a}{R}=1.5$, второй и третьей $\frac{a}{R}=3$.

§ 2. Две симметричные трещины в круговом кольце

Определим по формуле (1.8) напряжения на окружности R и $R+h$. Разлагая эти выражения как на внутренних, так и на внешних окружностях в комплексные ряды, получим:

$$\sigma_r^R - i\tau_{r\theta}^R = -D\int\limits_L \left[\frac{2}{t} + \frac{1}{t}\sum_{k=1}^{\infty}(1-k)\left(\frac{R}{t}\right)^k e^{ik\theta} + \frac{1}{t}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{R}{t}\right)^k e^{-ik\theta} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{t}\sum_{k=3}^{\infty}(k-2)\left(\frac{R}{t}\right)^{k-2} e^{ik\theta}\right]\mu(t)\,dt \tag{2.1}$$

$$\sigma_r^{R+h} - i\tau_{r\theta}^{R+h} = D\int\limits_L \left[\frac{1}{t}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{t}{R+h}\right)^k e^{ik\theta} + \frac{1}{t}\sum_{k=1}^{\infty}(k+1)\left(\frac{t}{R+h}\right)^k e^{-ik\theta} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{t}\sum_{k=1}^{\infty}(k+2)\left(\frac{t}{R+h}\right)^{k+2} - \frac{2t}{(R+h)^2} - \frac{e^{i\theta}}{R+h}\right]\mu(t)\,dt \tag{2.2}$$

На основании [1] граничные условия запишутся так:

$$\Phi_1(z) + \overline{\Phi_1(z)} - e^{2i\theta}\left[\bar{z}\Phi_1'(z) + \Psi_1(z)\right] =$$

$$= \begin{cases} \sum\limits_{-\infty}^{\infty} A_k' e^{ik\theta} & \text{при } r = R \\ \sum\limits_{-\infty}^{\infty} A_k'' e^{ik\theta} & \text{при } r = R+h \end{cases} \tag{2.3}$$

Внутри кольца будем иметь:

$$\Phi_1(z) = A\ln z + \sum_{-\infty}^{\infty} a_k z^k, \quad \Psi_1(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_k' z^k \tag{2.4}$$

В нашем случае

$$A_0' = -2D\int\limits_L \frac{\mu(t)}{t}\,dt, \quad A_1' = 0, \quad A_2' = DR^2\int\limits_L \frac{\mu(t)}{t^3}\,dt$$

$$A_k' = D\int\limits_L \left[\frac{(k-1)R^k}{t^{k+1}} - \frac{(k-2)R^{k-2}}{t^{k-1}}\right]\mu(t)\,dt \quad \text{при } k \geqslant 3, 4, \cdots$$

$$A_{-1}' = -D\int\limits_L \frac{R}{t^2}\mu(t)\,dt, \quad A_{-k}' = -DR^k\int\limits_L \frac{\mu(t)}{t^{k+1}}\,dt \quad \text{при } k \geqslant 2, 3, \cdots$$

$$A_0'' = -\frac{2D}{(R+h)^2}\int\limits_L t\mu(t)\,dt, \quad A_1'' = 0,$$

$$A'_k = D \int\limits_L \frac{t^{k-1} \mu(t)}{(R+h)^k} dt, \quad k \geqslant 2, 3, \cdots$$

$$A'_{-k} = D \int\limits_L \left[\frac{(k+1)\, t^{k-1}}{(R+h)^k} - \frac{(k+2)\, t^{k+1}}{(R+h)^{k+2}} \right] \mu(t)\, dt \quad k = 1, 2, \cdots$$

Удовлетворяется условие равенства нулю главного вектора внешних усилий $(R+h) A'_{-} - A'_{.} R = 0$.

Используя готовые выражения из [1] для a_k и a'_k, получаем выражения, зависящие от функции $\mu(t)$. Эти выражения опущены ввиду громоздкости.

Комплексные потенциалы для кольца со свободной внешней и внутренней границей при наличии разрыва смещения на линии L равны:

$$\Phi(z) = \int\limits_L \left[\frac{D}{t-z} + \sum_{-\infty}^{\infty} a_k z^k \right] \mu(t)\, dt$$

$$\Psi(z) = \int\limits_L \left[-\frac{Dz}{(t-z)^2} + \sum_{-\infty}^{\infty} a'_k z^k \right] \mu(t)\, dt$$

Напряжение на действительной оси равно

$$\sigma_y^g(x) = \int\limits_L \left[\frac{2D}{t-x} + 2 \sum_{-\infty}^{\infty} a_k x^k + \right.$$

$$\left. + \sum_{-\infty}^{\infty} k a_k x^k + \sum_{-\infty}^{\infty} a'_k x^k \right] \mu(t)\, dt$$

Здесь тоже, как и в § 1, приравнивая сумму $\sigma_y^g(x) + \sigma_y^p(x)$ на L нулю, получим интегральное уравнение для определения функции

$$D \int\limits_L K(x, t)\, \mu(t)\, dt + \sigma_y^p(x) = 0 \tag{2.5}$$

Пусть внутри кольца действует равномерное давление и трещины расположены на оси ox. С учетом нечетности функции $\mu(t)$ уравнение (2.5) принимает вид

$$D = \int\limits_a^b [K(x, t) - K(x, -t)]\, \mu(t)\, dt = -\sigma_y^p(x)$$

$$K(x, t) - K(x, -t) = \frac{4t}{t^2 - x^2} + 4a_0 + 8a_2 x^2 + 12 a_4 x^4 - \frac{4a_{-4}}{x^4} +$$

$$+2a_0' + 2a_2' x^2 + 2a_4' x^4 + \frac{2a_{-2}'}{x^2} + \frac{2a_{-4}'}{x^4}$$

Здесь мы взяли первые пять членов из каждой суммы. Произведем замену переменных и введем обозначения

$$\frac{x^2}{l^2} = \xi, \quad \frac{t^2}{l^2} = \eta, \quad \frac{h}{l} = \lambda, \quad \frac{R}{l} = \beta, \quad \varepsilon = \frac{e}{l} \tag{2.6}$$

$\mu(t) = \mu(l\sqrt{\eta}) = \mu_0(\eta)$, ε — характеризует расположение трещин внутри кольца.

Интегральное уравнение (2.5) запишется так:

$$2D\int_L \left[\frac{2}{\eta - \xi} + K_1(\xi, \eta) \right] \mu_0(\eta)\, d\eta = -\frac{P\beta^2}{2\beta\lambda + \lambda^2}\left[1 + \frac{(\lambda+\beta)^2}{\xi} \right] \tag{2.7}$$

Общеизвестной процедурой интегральное уравнение первого рода (2.7) переведем в уравнение второго рода

$$\mu_0(\xi) = \frac{1}{\pi\sqrt{(\delta_2 - \xi)(\xi - \delta_1)}} \left\{ C + \frac{P\beta^2}{2\pi D(2\beta\lambda + \lambda^2)} \int_{\delta_1}^{\delta_2} \frac{\sqrt{(\delta_2 - \eta)(\eta - \delta_1)}}{\eta - \xi} \times \right.$$

$$\left. \times \left[1 + \frac{(\beta+\lambda)^2}{\eta} \right] d\eta + \frac{1}{\pi}\int_{\delta_1}^{\delta_2} \frac{\sqrt{(\delta_2 - t)(t - \delta_1)}}{t - \xi}\, dt \int_{\delta_1}^{\delta_2} \mu_0(\eta) K_1(t, \eta)\, d\eta \right\}$$

$$\delta_1 = (\beta + \varepsilon - 1)^2, \quad \delta_2 = (\beta + \varepsilon + 1)^2 \tag{2.8}$$

Изменим порядок интегрирования во втором интеграле и возьмем внутренний интеграл. Разлагая затем в ряд ядро по степеням λ^{-1} и ограничиваясь членами порядка λ^{-3}, получим:

$$\mu_0(\xi) = \frac{1}{\pi\sqrt{(\delta_2 - \xi)(\xi - \delta_1)}} \left\{ C + \frac{P}{4D}\left[\frac{(\beta+\varepsilon)^2 - 1}{\xi} - 1 \right] + \right.$$

$$+ \frac{P\beta^2}{2D}\left[(\beta+\varepsilon)^2\left(1 + \frac{\beta^2}{\xi}\right) + 1 - \xi - \beta^2 - \frac{\beta^2}{\xi} \right]\left(\frac{1}{\lambda^2} - \frac{2\beta}{\lambda^3} \right) +$$

$$\left. + O(\lambda^{-4}) + \int_{\delta_1}^{\delta_2} \mu_0(\eta) K_2(\xi, \eta)\, d\eta \right\} \tag{2.9}$$

где

$$K_2(\xi, \eta) = \frac{12\beta^8}{\eta^4}\left[(\beta+\varepsilon)^2 - \frac{\beta+\varepsilon+1}{\eta(\beta+\varepsilon-1)} \right] +$$

$$+ \frac{1}{\lambda^2}\left\{ [1 - \xi + (\beta+\varepsilon)^2] \left[3 + 2\beta(\beta^2 - 1) + \frac{4\beta^4}{\eta^2}\right] + \right.$$

$$+ \beta^2\left(\frac{\beta^2}{\eta^2} - 1 \right)\left[\frac{(\beta+\varepsilon)^2 - 1}{\xi} - 1 \right] + \frac{24\beta^4}{\xi}\left(\frac{\beta^5}{\eta^2} - 1 \right)\left[(\beta+\varepsilon)^2 - \right.$$

$$-\frac{\beta+\varepsilon+1}{\xi(\beta+\varepsilon-1)}\Bigg]\Bigg\}+\frac{1}{\lambda^3}\Bigg\{[1-\xi+(\beta+\varepsilon)^2]\Bigg(16\beta^2-6\beta+4\beta^3-16\beta^4+4\beta^7-$$

$$-\frac{8\beta^5}{\eta^2}\Bigg)+4\beta^4\Bigg(1-\frac{1}{\eta}\Bigg)\Bigg[\frac{(\beta+\varepsilon)^2-1}{\xi}-1\Bigg]-$$

$$-\frac{8\beta^{11}}{\xi}\Bigg[(\beta+\varepsilon)^2-\frac{\beta+\varepsilon+1}{\xi(\beta+\varepsilon-1)}\Bigg]\Bigg\}+O(\lambda^{-4})$$

Анализ показывает, что все остальные коэффициенты a_k и $a_k'\,(k\geqslant 5)$, входящие под знаком суммы в ядро $K(x,\,t)$ или взаимно уничтожаются, или имеют порядок выше, чем λ^{-4}.

Рассмотрим достаточно широкое кольцо, имеющее внутри трещины, длина которых больше, чем внутренний диаметр кольца. При этих условиях $\beta<1$ и, пренебрегая членом, имеющим порядок $O(\beta^4)$, можно (2.9) решать методом, разработанным в [2].

Разыскивая решение уравнения (2.9) в форме

$$\mu_0(\xi)=\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^{-k}\mu^k(\xi)$$

суммируя μ^0, $\lambda^{-2}\mu^2$, $\lambda^{-3}\mu^3$ и возвращаясь к старым переменным (2.6), получим $\mu(x)$, в выражение которого входит неизвестная постоянная C. Из условия плавного смыкания берегов трещин на конце $R+e-l$ и $R+e+l$ определяем C. Окончательно имеем:

$$\mu(x)=\frac{Pl^2}{2\pi D\sqrt{[(R+e+l)^2-x^2][x^2-(R+e-l)^2]}}\Bigg[f_1(x)+$$

$$+\frac{S_1(\beta,\,\lambda,\,\varepsilon)}{S_2(\beta,\,\lambda,\,\varepsilon)}f_2(x)\Bigg]$$

Критическую силу определим по формуле:

$$\frac{P\pi\sqrt{h}}{K}=\frac{2\sqrt{2\lambda(\beta+\varepsilon)(\beta+\varepsilon-1)}}{f_1(R+e-l)+\dfrac{S_1}{S_2}f_2(R+e-l)}$$

где

$$f_1(R+e-l)=\frac{(\beta+\varepsilon)^2-1}{(\beta+\varepsilon-1)^2}+\frac{\beta^2}{\lambda^2}(3\varepsilon+2\beta-\varepsilon^2)-$$

$$-\frac{2\beta^3}{\lambda^3}(1+3\varepsilon-\varepsilon^2)+O(\lambda^{-4})$$

$$f_2(R+e-l)=1+\frac{\beta^2}{\lambda^2}\Bigg[1+(3-2\beta)(2\beta+2\varepsilon-\beta^2)-\frac{\beta^2\varepsilon^2}{(\beta+\varepsilon-1)^2}\Bigg]+$$

$$+\frac{2\beta}{\lambda^3}(8\beta-3)(2\beta+2\varepsilon-\beta^2)+O(\lambda^{-4})$$

$$S_1(\beta, \lambda, \varepsilon) = E(q) + \frac{\beta^3}{\lambda^2}\left[(2\beta\varepsilon + \varepsilon + 1)F(q) - \varepsilon(2\beta + \varepsilon)E(q)\right] +$$

$$+ \frac{2\beta^3(\varepsilon + 1)}{\lambda^3}\left[(\varepsilon + 1)E(q) - F(q)\right] + O(\lambda^{-4})$$

$$S_2(\beta, \lambda, \varepsilon) = F(q) + \frac{1}{\lambda^2}\left\{\left[\beta^2 + (3 - 2\beta)(1 + 2\beta\varepsilon + \varepsilon^2)\right]F(q) - \right.$$

$$\left. - \left[\frac{(2\beta\varepsilon + \varepsilon^2 - 1)^2(3 - 2\beta) - \beta^2\varepsilon^2}{(\beta + \varepsilon - 1)^2}\right]E(q)\right\} +$$

$$+ \frac{2\beta(8\beta - 3)}{\lambda^3}\left[(1 + 2\beta\varepsilon + \varepsilon^2)F(q) - (\beta + \varepsilon + 1)^2E(q)\right] + O(\lambda^{-4})$$

$q = \dfrac{2\sqrt{\beta + \varepsilon}}{\beta + \varepsilon + 1}$; $F(q)$ и $E(q)$ — полные эллиптические интегралы первого и второго рода. $1 < \varepsilon < \lambda - 1$; l — полудлина трещины; e — расстояние от внутреннего отверстия до середины трещины.

Ростовский государственный
университет

Поступила 23 IX 1970

Վ. Խ. ՍԻՐՈՒՆՅԱՆ

ՃԱՔԵՐԻ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ԵՐԿՈՒ ԽՆԴԻՐ ՇՐՋԱՆԱՅԻՆ ԵԶՐԵՐՈՎ ՏԻՐՈՒՅԹՆԵՐԻ ՀԱՄԱՐ

Ամփոփում

Դիտարկվում են հետևյալ խնդիրները՝

1) Շրջանային անցքով թուլացված, ներսում սիմետրիկ ճաքեր ունեցող անվերջ առաձգական հարթության ձգումը ճաքերի տարածման ուղղահայաց ուղղությամբ հավասարաչափ բաշխված ուժերով, երբ ճաքերը դուրս չեն գալիս տիրույթի եզրերը,

2) Ներսում սիմետրիկ ճաքեր ունեցող օղակը հավասարաչափ ճնշման տակ։

Երկու խնդիրն էլ բերվում են ճաքերի եզրերի անհայտ տեղափոխության ածանցյալի նկատմամբ առաջին սեռի սինգուլյար ինտեգրալ հավասարման։ Այդ հավասարումների ասիմպտոտիկ լուծումները փնտրվում են «մեծ λ»-ների եղանակով, որը համապատասխանում է այնպիսի ճաքերին, որոնք համեմատաբար հեռու են գտնվում տիրույթի եզրերից։

Դուրս են բերված բանաձևեր ճաքերի ծայրերում լարման կոնցենտրացիայի գործակիցների համար։ Առաջին խնդրի համար բերված է գրաֆիկական առնչություն կրիտիկական ուժի և երկրաչափական պարամետրերի միջև։

ON TWO PROBLEMS OF THE THEORY OF CRACKS IN DOMAINS WITH CIRCULAR BOUNDARIES

V. Kh. SIRUNIAN

S u m m a r y

The article deals with two problems on:

1. Uniform one-axial tension of an infinite elastic plane, weakened by a circular opening and by two symmetrical cracks not reaching the boundary of the circular opening;

2. A ring under uniform pressure with symmetrical cracks inside it.

Both problems are reduced to singular integral equations of the first kind with respect to the derivative of the unknown function of crack bank displacements.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. Изд-во Наука, 1966.
2. *Александров В. М.* О приближенном решении одного типа интегральных уравнений. ПММ, т. 26, вып. 5, 1962.
3. *Либацкий Л. Л.* Применение сингулярных интегральных уравнений для определения критических усилий в пластинках с трещинами. ФХММ, № 4, 1965.
4. *Irwin G. R.*, Fracture In: Handbuch der Physik, Bd. VI, Springer, Berlin, 1958, p. 551—590.